Fibonaccijevo zaporedje

Milan Hladnik

Eno najznamenitejših zaporedij naravnih števil v matematiki je zaporedje Fibonaccijevih števil 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Kot je znano, je v tem zaporedju vsak člen od tretjega naprej vsota predhodnih dveh. Če torej označimo n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja z F_n, velja rekurzivna formula

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, ...,$$

pri čemer je $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$. Včasih je ugodno definirati še $F_0 = 0$ (in rekurzijo uporabiti za $n \geq 1$).

Fibonaccijeva števila so v preteklosti velikokrat obravnavali in to z zelo različnih vidikov. Radovedne ljudi, laike in strokovnjake, so vedno znova fascinirala s svojimi presenetljivimi pojavljanji v najrazličnejših situacijah in povezavah z drugimi vedami. Proučevali so njihove aritmetične in druge lastnosti, od najbolj elementarnih do matematično najbolj kompliciranih. Vedno znova tudi odkrivajo njihove nove značilnosti in nove relacije. Razvila se je cela nova disciplina, fibonaciologija, raziskovanje Fibonaccijevih števil. Povejmo le, da izdajajo posebno revijo, *Fibonnaci Quarterly*, ki je posvečena izključno novim spoznanjem na tem področju.

Namen tega sestavka je bolj skromen. Na osnovi nekaterih konkretnih primerov bomo skušali odkriti matematično strukturo, ki tiči za vsem tem in opozoriti na nekatere zanimive in nenavadne pojave.

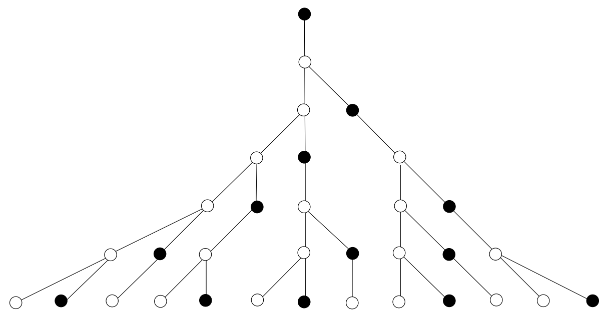
1. Zgledi iz narave in vsakdana

V tem razdelku bomo zbrali različne pojave v naravi, matematiki in v vsakdanjem življenju, kjer se naravno pojavijo Fibonaccijeva števila. Nekatere primere bomo obravnavali bolj obširno, druge pa zgolj omenili. Začeli bomo z bolj ali manj znanimi in zanimivimi zgledi iz narave.

1.1. **Zajčji pari**. Fibonaccijeva števila so dokumentirana več kot 800 let. Leta 2002 je v svoji knjigi *Liber Abaci* Leonardo iz Pise, znan tudi kot Fibonacci, objavil znamenito nalogo o zajčjih parih:

Zajčji par skoti nov zajčji par na koncu vsakega meseca, prvič po dveh mesecih. Koliko zajčjih parov je na začetku n-tega meseca $(n = 1, 2, 3, ...)$?

Odgovor se glasi: na začetku n-tega meseca je natanko F_n zajčjih parov. Če je $n \geq 3$, lahko povemo tudi to, da je med njimi F_{n-1} odraslih (tj. reproduktivno sposobnih) zajčjih parov in F_{n-2} mladih (tj. reproduktivno še nesposobnih) zajčjih parov. Situacijo si lahko predstavimo z drevesom življenja (slika 1).



Slika 1

1.2. **Čebele**. Zgodba o zajcih je zanimiva, a se ne zdi preveč prepričljiva, ker se ne ujema z biološkimi dejstvi. Zato so jo tudi preoblačili v različne preobleke. Namesto zajcev so se ukvarjali z ovcami, kravami itd. Na resnično naravno zaporedje Fibonaccijevih števil pa naletimo pri čebelah.

Znano je, da ima v nasprotju s čebelami delavkami čebelji samec, trot, samo enega od staršev, matico. Za rojstvo ne potrebuje očeta, saj se razvije iz neoplojenega jajčeca. Zdaj samo preštejemo, koliko staršev, starih staršev, praprastaršev itd. ima trot. Če bi začeli šteti s trotom kot s 1. generacijo in bi bili njegovi starši 2. generacija, stari starši 3. generacija itd., bi bilo število trotovih prednikov v n-ti generaciji ravno F_n in spet bi imeli za $n \geq 3$ od tega F_{n-1} matic in F_{n-2} trotov. Situacijo si lahko predstavimo z istim drevesom kot prej (slika 1), obrnjenim na glavo. Beli krogci zdaj predstavljajo matice, črni pa trote.

Ker gre za drevesasto strukturo, so zaporedje Fibonaccijevih števil pogosto predstavljali z drevesnim deblom, iz katerega poganjajo veje v skladu z znanim pravilom. To ni slučajno. Cela veja botanike, t.i. filotaksa, se dejansko ukvarja z razporeditvijo in številom listov na steblu, novih poganjkov, lusk pri češarku, cvetnih košaric, semen pri sončnicah itd. Zadeva je precej popularna, o njej je v zadnjem času pisal tudi Presek. Dobršen del te ureditve je, kot kaže, res povezan s Fibonaccijevimi števili (t.i. Fibonaccijeva filotaksa), vendar je nestrokovnjaku težko oceniti, v kolikšni meri je matematika res vpletena v dogajanje. Narava je morda bolj nepredvidljiva, kot si mislimo. Pač pa je v nekaterih drugih bolj preprostih in preglednih primerih Fibonaccijeva struktura bolj razvidna.

1.3. **Nalezljive bolezni** imajo lahko kaj nenavaden potek in različno hitrost širjenja. Prizadenejo lahko večji ali manjši delež prebivalstva. Z opisom širjenja bolezni, proučevanjem statističnih značilnosti in napovedovanjem nadaljnjega poteka se ukvarja posebna veda, epidemiologija. Ker toliko različnih dejavnikov vpliva na potek bolezni, je raziskovanje bolezenskih epidemij v našem realnem svetu zelo težko. Tu si oglejmo le preprost idealizirani primer.

Denimo, da smo pri okužbi z neko nalezljivo boleznijo prvi teden sicer še zdravi, vendar kot prenašalci klic nevarni za okolico, drugi teden smo tudi sami bolni in še vedno kužni. Po dveh tednih pa popolnoma ozdravimo in tudi ne prenašamo več bolezni naprej. Predpostavimo, da v vsakem od teh dveh tednov v povprečju okužimo enega zdravega človeka. Denimo, da enaki pogoji veljajo za vsakega okuženega v veliki homogeni populaciji v nekem mestu. Koliko okuženih in koliko bolnih bomo imeli v povprečju na začetku n-tega tedna, če je na začetku prišel v mesto le en bolan človek?

Spet imamo enako strukturo kot prej, isto drevo (slika 1). Beli krogec zdaj pomeni okuženega, a ne še bolnega človeka, črni krogec pa bolnega človeka. Kot lahko zdaj že pričakujemo, je torej na začetku n-tega tedna število okuženih enako F_{n-2}, število bolnih pa F_{n-1}, skupaj torej ravno F_n.

1.4. **Drugi zgledi**. Podobno kot zajčje družine ali nekatere bolezni se razvijajo drugi sorodni procesi, npr. širjenje informacij, sodelovanje v različnih športnih dejavnostih, naraščanje članstva v nekaterih organizacijah itd. Bralec naj za vajo sam premisli in reši naslednje tipične naloge:

(a) **Širjenje govoric**: *Nekdo lepega dne izve pomembno novico in jo naslednji dan sporoči enemu od znancev, dan potem še enemu itd., vsak naslednji dan novemu znancu. Koliko ljudi pozna novico na začetku n-tega dne, če vsi ravnajo enako kot prvi? Pri tem predpostavimo, da nihče ne izve novice dvakrat.*

(b) **Množični tek**: *Skupina otrok na stadionu sodeluje v tekaškem nastopu z naslednjimi pravili: Prvi preteče dva kroga, po vsakem krogu se dotakne enega od čakajočih in ga vzpodbudi, da začne tudi sam teči po istih pravilih. Koliko otrok teče v n-tem krogu, če predpostavimo, da vsi tečejo enako hitro?*

(c) **Izbiranje novih članov v akademijo nesmrtnih**: *Vsak polnopravni član vsako leto predlaga svojega kandidata, ki postane naslednje leto dopisni član, leto kasneje pa redni in ima zato pravico predlagati novega (dopisnega) člana. Koliko je vseh članov akademije n-to leto, če je bil prvo leto en sam dopisni član*?

2. Matematična struktura

Vidimo, da smo v omenjenih primerih znali prešteti, koliko imamo udeležencev na n-tem koraku in dobili (skoraj) enak rezultat ne glede na različne formulacije problemov. Zakaj je to tako? Kaj se lahko naučimo iz teh, na videz tako zelo različnih, primerov? Ali imajo poleg dejstva, da se rešitev izraža s Fibonaccijevimi števili, še kaj skupnega?

2.1. **Predpostavke**. Opazimo, da smo morali v vsakem od obravnavanih primerov predpostaviti idealne pogoje, ki se vsaj določen čas ne spreminjajo (npr. enako ravnanje vseh udeležencev). V matematiki vedno delamo z idealizacijami. Npr. v naravi ni niti idealne točke, ali premice, niti idealnega trikotnika, vsi izreki ravninske geometrije veljajo le za idealne like. Prav tako smo vsaj potiho upoštevali tudi druge naravne predpostavke (npr. da ni umiranja zaradi bolezni, odhajanja ali prihajanja novih okuženih v mesto itd.). Brez teh dodatnih predpostavk ne bi mogli rešiti problema. Tudi to ni nič nenavadnega pri uporabi matematike v realnem svetu oziroma, kot rečemo, pri *modeliranju* realnih pojavov. Predpostaviti moramo dovolj, da se problem poenostavi in ga tako poenostavljenega lahko uženemo, a spet ne preveč, tako da tudi poenostavljeni problem ohrani vse bistvene značilnosti prvotnega realnega problema. Če se matematično formulirani problem oziroma njegova rešitev preveč oddalji od realnosti, to samo pomeni, da je naš model slab, ker smo morda pozabili upoštevati kaj bistvenega; morali bi ga spremeniti.

Natančen bralec bo morda ugotovil tudi globje razlike v formuliranju zgoraj navedenih problemov. Ne gre samo za to, kakšne vrste dejavnost obravnavamo (se pravi, v kakšno zgodbico je problem preoblečen in kdo v njej nastopa), ampak tudi kakšna je pri tem vloga nastopajočih (trajna ali začasna ali celo samo enkratna). Pri zajčjih parih se npr. produkcija mladih parov nadaljuje nenehno, isti par ostane ves čas v igri in je nenehno aktiven pri produkciji novih parov. V nasprotju s tem, pa se okuženi z boleznijo čez dva tedna pozdravi in tudi ni več prenašalec bolezni. Torej ga pri štetju okuženih oziroma bolnih v n-tem tednu ne moremo več vzeti v poštev. Pri štetju trotovih prednikov vsak individuum nastopa le enkrat. Kljub tem razlikam vidimo, da gre v bistvu v vseh teh problemih za isto strukturo. Vedno npr. nastopata dve vrsti osebkov, ki jih štejemo (mladi in stari zajčji pari, troti in matice, okuženi in bolni itd.). Stanje sistema opišemo tako, da povemo, koliko je enih in drugih, ne glede na to, ali se isti individuum pri tem ponavlja, ali pa je vedno drug. V prvem razredu so tisti, ki na nasednjem koraku prispevajo po enega v vsakem razredu, v drugem pa tisti, ki naslednjič dajo le enega v prvem razredu. Stari zajčji par prispeva en mladi (novi) par in en stari par (sebe), mladi par pa le preide v starega. Pri širjenju bolezni ustrezajo prvemu razredu okužene osebe, ki v naslednjem koraku prispevajo enega (novega) okuženega in enega bolnega (sebe), bolna oseba pa producira le še enega (novega) okuženega. Podobno lahko razložimo oba razreda tudi v drugih primerih.

2.2. **Abstrakcija**. Matematika je veda o prepoznavanju vzorcev. Pod pojmom vzorec ne razumemo zgolj geometrijski ornament, pač pa vsako pravilnost oziroma zakonitost, ki jo opazimo pri naravnih ali umetnih pojavih, tudi v drugih vedah. Zato je matematika idealna za strukturno obravnavo vseh mogočih pojavov. Različnim pojavom išče skupno bistvo in jih, ko ga najde, obravnava na isti način. [1] To ji uspe tako, da zanemari nekatere razlike in se osredotoči na lastnosti, ki so skupne vsem obravnavanim pojavom. Pogosto se obravnava reducira le na en njihov vidik. Rečemo, da matematik rešuje problem skozi *proces abstrakcije*, ki ga lahko opazimo in uporabimo tudi v zvezi s Fibonaccijevimi števili.

Pri dosedanjih zgledih (zajčji pari, čebele, širjenje bolezni) je torej dobro pozabiti na posebnosti oziroma na vsakokraten kontekst problema (tj. na konkretno zgodbico). Pomebna je le ista struktura. Z abstrakcijo nadaljujemo tako, da pojav opazujemo zgolj shematično, npr. z opazovanjem drevesa (slika 1). Tako lažje opazimo pravilnost. Namesto zajcev, čebel, bolnikov itd. imamo samo bele in črne krogce. Na vsakem koraku se vsak beli krogec razcepi v dva, belega in črnega, vsak črni krogec pa spremeni v belega. Lahko bi rekli, da bel krogec v naslednji generaciji nadomestimo z belim in črnim, črnega pa z belim. Simbolično gre torej za transformaciji: $B \to BC$ in $C \to B$, kjer smo beli krogec označili s črko B in črnega s črko C.

2.3. **Fibonaccijevo zaporedje**. Namesto drevesa, ki je sicer zelo nazorna predstavitev pojava, zavzame pa veliko prostora, bi lahko strukturo enakovredno zapisali linearno v obliki neskončnega zaporedja, sestavljenega iz simbolov B in C (z navpičnimi črtami med seboj ločimo različne generacije):

$$C|B|BC|BCB|BCBBC|BCBBCBCB|BCBBCBCBBCBBC|... \tag{1}$$

Kaj vidimo? Najprej to, da nastopata le simbola B in C in, nadalje, da nikoli nimamo zaporedoma dveh simbolov C ali treh simbolov B. V n-ti skupini je natanko F_n simbolov in

[1] V nasprotju z umetnostjo, ki istemu pojavu daje različna imena (pomislimo samo, na koliko načinov pesniki opisujejo npr. ljubezen).

sicer F_{n-1} simbolov B ter F_{n-2} simbolov C, če je le $n \geq 3$. Če še malo bolj pozorno pogledamo, opazimo nekakšno ponavljanje delnih zaporedij, npr. v vsaki novi skupini od druge dalje se najprej ponovi prejšnja skupina, nato pa se ji enostavno priključi še predzadnja skupina.

Uporabna je še ena interpretacija. Vidimo, da se vsaka skupina razen prve začne z B, zato na začetku zaporedja umetno dodajmo še en B. Tako namesto (1) dobimo zaporedje

$$B|C|B|BC|BCB|BCBBC|BCBBCBCB|BCBBCBCBBCBBC|... \tag{2}$$

Potem je vsaka nova skupina ponovitev začetnega odseka zaporedja do konca predzadnje skupine. Zaporedje se tako samo generira s ponovitvijo večjega dela doslej znanega zaporedja. Gre za samoreproduktivno lastnost oziroma za samopodobnost, ki pa ni periodična. Taki strukturi rečemo (enorazsežni) kvazikristal. Nanj naletimo v zelo različnih situacijah, kasneje ga bomo še srečali. Imenovali ga bomo *Fibonaccijevo zaporedje* s simboloma B in C ter označili z $F(B,C)$. Nekateri zaporedje (1) ali (2) imenujejo tudi *zlato zaporedje* ali *neskončno Fibonaccijevo besedo.*

2.4. **Matrike**. Poudariti je treba, da se ti dve spremembi od generacije do generacije zgodita hkrati, torej bi bilo bolje pisati v obliki ene (vektorske) transformacije $(B,C) \to (BC,B)$. Naj pomeni b število simbolov B v neki skupini in c število simbolov C. Številčno stanje v tej skupini (ne pa njena struktura) je potem povsem določena s parom (b,c), ki torej natančno opisuje *stanje* sistema. V naslednji generaciji vsak B prispeva en B in en C, vsak C pa en B (in nobenega C), torej je novo številsko stanje dano s parom $(b+c,b)$. Transformacija $(b,c) \to (b+c,b)$ močno spominja na prejšnjo $(B,C) \to (BC,B)$, le da zdaj na prvem mestu seštejemo obe prejšnji komponenti, namesto da bi jih preprosto staknili skupaj kot prej.

Matematiki so izumili pripraven način, kako zapisovati te spremembe oziroma, kako jih računati. Pare zapišejo v stolpce, npr.

$$(b,c) \to \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

transformacije pa v matriko:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(to je t.i. *Fibonaccijeva matrika*) in uporabijo matrično množenje za spremembo številskega stanja:

$$\begin{bmatrix} b+c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$

To se zgodi na vsakem koraku, tako da imamo po $n \geq 1$ korakih, če začnemo z začetnim stanjem $(1,0)$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je stanje določeno z zaporednima Fibonaccijevima številoma. Prav tako je matrična potenca F^n je sestavljena iz zaporednih Fibonaccijevih števil:

$$F^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

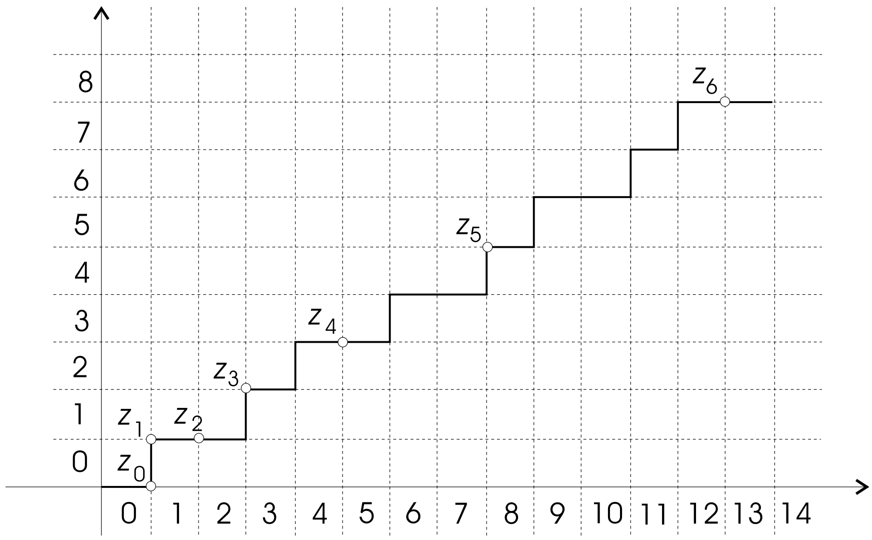
Opomba (za tiste, ki poznajo dovolj linearne algebre): Znano je, da je determinanta produkta (potence) enaka produktu (potenci) determinant. Odtod brez truda dobimo t.i *Cassinijevo identiteto* $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2 = (-1)^n$. Še bolj preprosto dobimo iz (3) zaradi matrične identitete $F^{m+n} = F^m F^n = F^n F^m$ zvezo $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$, ki velja za poljubna m in n. Seveda lahko tu vlogo m in n tudi zamenjamo. To je t.i. *adicijska lastnost* Fibonaccijevih števil.

Fibonaccijevi matriki F lahko brez težav izračunamo tudi lastne vrednosti. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dobimo eno lastno vrednost $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ in drugo $-1/\tau$. Opazimo, da je τ razmerje zlatega reza.

3. Fibonaccijeve stopnice

V zvezi s Fibonaccijevim zaporedjem (1) so zanimive različne geometrijske konstrukcije, ki nam strukturo zaporedja napravijo bolj nazorno.

3.1. **Konstrukcija**. Fibonaccijeve stopnice si lahko predstavimo v koordinatnem sistemu na naslednji način. Začnejo se v koordinatnem izhodišču $(0, 0)$, začetni, 0-ti korak na pravimo v vodoravni smeri: korak v desno, tako da pridemo do začetne točke $z_0 = (1, 0)$. Odslej sledimo Fibonaccijevemu zaporedju, pri čemer naj pomeni C korak navzgor in B korak v desno (glej sliko 2).



Slika 2

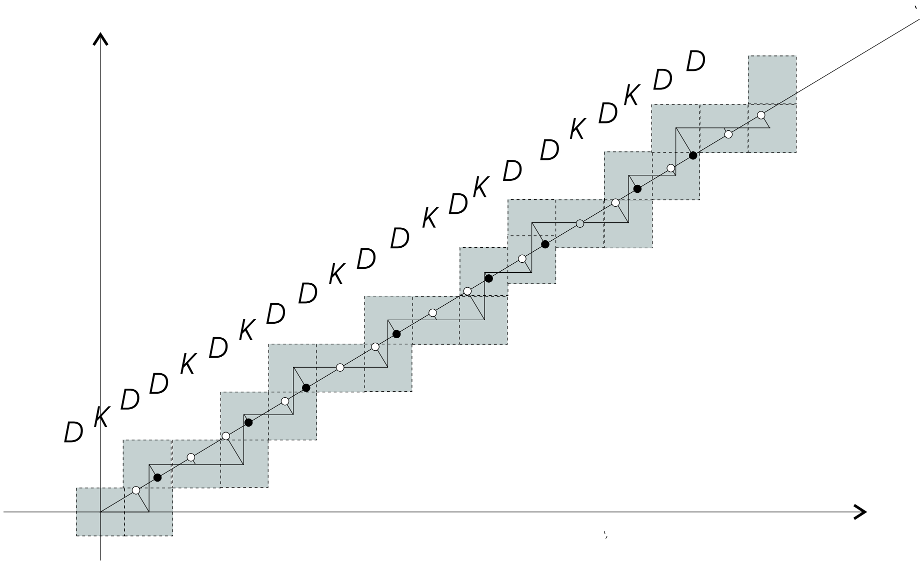
Vse stopnice so enako visoke, nekatere med njimi pa so dvakrat bolj široke oziroma dolge. Posebej označimo točke, do katerih pridemo na koncu vsake skupine korakov. Tako je npr. $z_1 = (1, 1)$, $z_2 = (2, 1)$, $z_3 = (3, 2)$ itd. Vidimo, da dobimo pare zaporednih Fibonaccijevih števil. Na koncu n-te skupine smo v točki $z_n = (F_{n+1}, F_n)$, saj smo morali napraviti F_{n+1} korakov v vodoravni in F_n korakov v navpični smeri, skupaj torej F_{n+2} pomikov za eno enoto. Lahko bi prešteli tudi samo število korakov v n-ti skupini (od točke z_{n-1} do točke z_n (F_{n-1} korakov desno in F_{n-2} korakov navzgor, skupaj ravno F_n). Število vseh stopnic do vključno stopnice, na kateri leži točka z_n (kolikorkrat moramo dvigniti nogo), je torej ravno F_n. Če je

$n \geq 2$ je od tega dolgih stopnic F_{n-1} in kratkih F_{n-2}. Bralec se lahko sam prepriča o tem. Zaporedje dolgih in kratkih stopnic tudi sledi znanemu vzorcu $F(D, K)$ (če odmislimo osnovno kratko podnožje stopnic) $D|K|D|DK|DKD|DKDDK|...$

Opomba. Stopnice lahko realiziramo tudi s t.i. *kompleksnimi Fibonaccijevimi števili.* To so (kompleksna) števila z_n, $n = 1, 2, 3, ...$, ki zadoščajo isti rekuzivni formuli, začetek zaporedja pa je $z_{-1} = i$ (imaginarna enota) in $z_0 = 1$. Sledijo točke $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3 + 2i$ itd.

3.2. **Povprečna strmina stopnic**. Lahko jo izračunamo na različne načine. Najbolj preprosto jo dobimo tako, da najprej določimo strmino premice skozi koordinatno izhodišče in točko z_n, torej $k_n = F_n/F_{n+1}$. Znano je, da v limiti velja $k = \lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} f_n/F_{n+1} = 1/\tau$, kjer je $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ razmerje zlatega reza.

Narišimo si premico $y = x/\tau$, ki ustreza strmini stopnic. Ker je τ iracionalno število, ta premica, razen skozi koordinatno izhodišče $(0, 0)$ ne poteka skozi nobeno celoštevilsko točko (i, j), $i, j \in \mathbb{Z}$. Vendar lahko z njo spet rekonstruiramo Fibonaccijeve stopnice na naslednji način. Najprej okrog vsake celoštevilske točke (i, j) očrtamo kvadrat s središčem v točki (i, j) in stranico 1. V koordinatni ravnini tako dobimo mrežo kvadratov s stranico 1, ki jih določajo navpične in vodoravne premice $x = i + 1/2$, $y = j + 1/2$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Označimo (npr. potemnimo samo tiste kvadrate v prvem kvadrantu, ki jih premica $y = x/\tau$ seka. Ko se pomikamo vzdolž premice v smeri naraščajošega x (oziroma y), potujemo iz enega osenčenega kvadrata v sosednjega. Smer gibanja po premici nam enolično določa zaporedje kvadratov, skozi katere poteka premica. Povežimo med seboj središča teh kvadratov, pa so pred nami spet Fibonaccijeve stopnice (glej sliko 3).



Slika 3

Projicirajmo pravokotno središče vsakega označenega kvadrata (tj. vogal vsake stopnice in sredino vsake dolge stopnice) pravokotno na premico $y = x/\tau$. Dobljeno točko (krogec) pobarvajmo belo (B) ali črno (C), glede na to, ali smo projicirali navzgor (tj. središče je ležalo pod premico) ali navzdol (središče je ležalo nad premico). Vidimo, da si vzdolž premice sledijo beli in črni krogci v zaporedju $BCBBCBCBBCBBC$..., ki ga že poznamo. Oglejmo si še razdalje med temi projekcijami; vidimo, da so samo dveh različnih dolžin: dolge (D), kadar smo projicirali vodoravno daljico, in kratke (K), kadar smo projicirali navpično. Tudi to zaporedje sledi istemu vzorcu: $DKDDKDKDDKDDK$...

3.3. **Število kock za stopnice**. Vprašajmo se, koliko enakih kock (kvadratov) s stranico 1 potrebujemo, da sezidamo Fibonaccijeve stopnice do nekega nivoja. To zna biti kar zapleteno vprašanje. Skušajmo potrebne kvadrate seštevati po stolpcih. Najprej 1, pa še 1, nato 2, potem dvakrat po 3, dvakrat po 4, enkrat 5, dvakrat po 6 itd. (glej sliko 2). Rezultat zapišimo v naslednjo tabelo (spet po skupinah do točke z_n):

Skupina	S_0	S_1	S_2	S_3		S_4			S_5					S_6	
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
p_n	0	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	...
q_n	0	1	2	4	7	10	14	18	23	29	35	42	50	58	...

Tabela 1

Zaporedje p_n v drugi vrstici tabele pomeni število kvadratov potrebnih za posamezno (tj. n-to) stopnico. Tudi to zaporedje ima samoreproduktivno lastnost (na vsakem nivoju se stopnice ponovno gradijo po vzorcu z začetka): Elemente skupine S_n dobimo tako, da številu F_n prištejemo zaporedoma vsa števila od začetka do konca skupine S_{n-2}. Npr. v peti skupini S_5 imamo, $F_5 = 5$ in zato elemente $5 + 0 = 5$, $5 + 1 = 6$, $5{+}1 = 6$, $5{+}2 = 7$ in $5{+}3 = 8$. Nasploh je prvi element v skupini S_n (na mestu F_{n+1}) enak F_n, vseh elementov v skupini pa je F_n. Opazimo tudi, da se razlike v zaporedju p_n ravnajo po pravilu $1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0$ itd., se pravi po pravilu $F(1, 0)$. Zaporedje q_n v zadnji vrstici tabele pa je kumulativna vsota zaporedja p_n, torej $q_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

Če nas zanima samo število kock, potrebnih za zgraditev stopnic do točke z_n oziroma do konca skupine S_{n-1}, moramo izračunati vrednost $s_{n-1} = q_{F_n-1} = \sum_{k=1}^{F_n-1} p_k$. Prepričamo se lahko, da je formula za vsoto

$$s_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} F_{n-j} \cdot F_j^2 = \sum_{j=0}^{n} F_{n-j} \cdot F_j^2.$$

Dobimo jo tudi s slike 4, ko štejemo, koliko kvadratov Fibonaccijevih števil lahko spravimo pod Fibonaccijeve stopnice. Zaporedoma dobivamo števila $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 7$, $s_4 = 18$, $s_5 = 50$ itd.

Naloga: Ali obstaja eksplicitna (kratka) formula za s_{n-1}?

Odgovor je pozitiven. Velja namreč

$$s_{n-1} = F_{n-1}(F_{n+2} - 1)/2.$$

To najlaže vidimo tako, da upoštevamo vzvratno (palindromsko) simetrijo Fibonaccijevih stopnic od začetka do ene stopnice pred točko z_n, se pravi do točke $(F_{n+1} - 1, F_n - 1)$. Najprej izračunamo $q_{F_n-2} = (F_n - 1)(F_{n+1} - 1)/2$ in temu prištejemo izmenično F_n ali $F_n - 1$, odvisno od tega, ali je n sodo ali liho število. Nazadnje upoštevamo še Cassinijevo identiteto.

Zanimivo je tudi samo zaporedje pozicij, kjer se pojavijo ozke stopnice (oziroma kjer se v zgornji tabeli število ne ponovi):

$$(0), 3, 8, 11, 16, 21, 24, 29, 32, 37, 42, 45, 50, 55, ... \tag{4}$$

in seveda višina stopnice (vrednost spodnjega zaporedja v tabeli 1), kadar so stopnice ozke:

$$(0), 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, ... \tag{5}$$

Zaporedji razlik sta: (3), 5, 3, 5, 5, 3, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5 ... in (2), 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, ..., torej spet zaporedji oblike (1), $F(5, 3)$ in $F(3, 2)$.

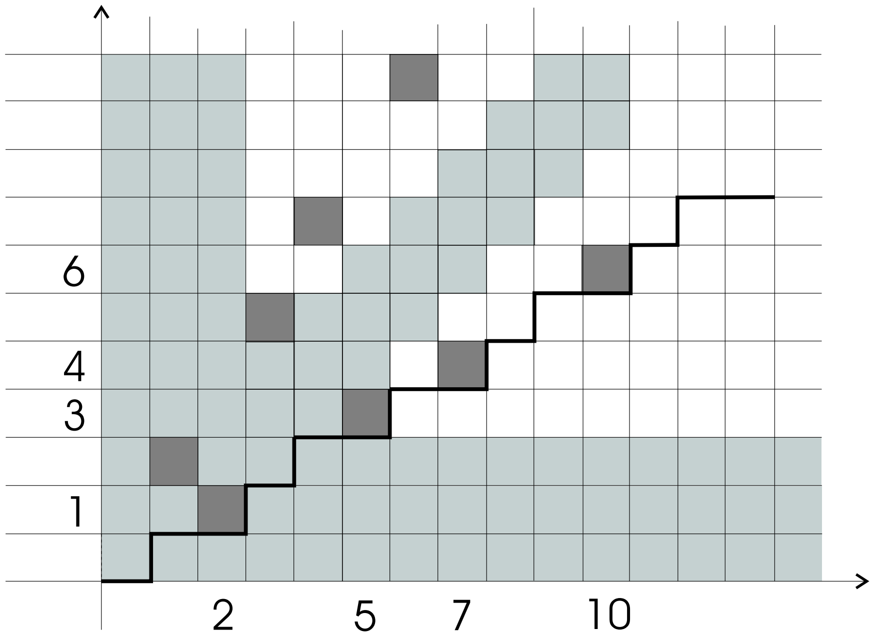
4. Igra z damo.

Kvadratno polje nad drugim delom dolge Fibonaccijeve stopnice ima poseben strateški pomen v neki igri z damo na šahovski deski, ki je povezana z znamenito Wythoffovo igro Nim (glej [2]). Najprej na kratko opišimo igro.

4.1. **Formulacija igre**. Celoštevilsko mrežo kvadratov v prvem kvadrantu opazujmo kot neskončno šahovsko desko, kjer vrste in stolpce označimo z 0,1,2,3,...

Damo postavimo na katerokoli polje v prvem kvadrantu razen polja (0,0). *Dovoljene so poteze dame v levo, navzdol in po diagonali poševno navzdol. Igralca izmenoma premikata damo; zmaga tisti, ki jo prvi spravi na polje* (0,0).

Kakšna je strategija posameznega igralca pri tej igri? Analizirajmo igro retrogradno. Če je dama na osnovni vrsti 0, stolpcu 0 ali na diagonali, zmaga igralec, ki je na potezi. Najpreprostejši poziciji, kjer mu to ni mogoče v eni potezi, sta položaja (2,1) in (1,2). Ker mora igralec, ki je na potezi, obvezno premakniti damo, premakne pa jo lahko samo na položaj, iz katerega je mogoče zmagati v eni potezi, je to dobljeni položaj za nasprotnika. Naslednji najnižji varni položaj, iz katerega nasprotnik ne more zmagati v eni potezi, ob pravilni igri nasprotnika pa niti v več potezah, je položaj (5,3) ali (3,5). Iz njega je možno premakniti damo le na pozicijo, iz katere je možno takoj zmagati, ali pa premakniti damo v nižji varni položaj (2,1) oziroma (1,2) (glej sliko 4).



Slika 4

Opazimo, da so varni položaji za igralca, ki ni na potezi razporejeni sicer simetrično glede na glavno diagonalo (simetralo prvega kvadranta), vendar dokaj neurejeno. Položaje pod diagonalo so določeni s pari (2,1), (5,3), (7,4), (10,6), (13,8) itd. Če jih primerjamo s Fibonaccijevimi stopnicami, vidimo, da so locirani nad zadnjim delom vsake dolge stopnice. Igralec na potezi mora torej vedno premakniti damo na varni položaj. To je mogoče iz vsake startne pozicije. Potem zmaga, ne glede na to, katero potezo potegne nasprotnik.

4.2. **Zveza z Wythoffovo igro Nim**. Preden nadaljujemo, povejmo, da je igra z damo enakovredna skoraj sto let stari Wythoffovi igri *Nim*, pri kateri igralca izmenično z dveh kupov kamenčkov (fižolčkov, žetonov) odstranjujeta kamenčke po pravilu: poljubno število iz enega ali drugega (kar ustreza poljubnemu vodoravnemu ali navpičnemu premiku dame) ali z obeh kupov enako (kar ustreza premiku dame po diagonali). Zmaga tisti, ki prvi odstrani vse kamenčke. Na začetku je npr. na prvem kupu i kamenčkov, na drugem pa j kamenčkov (kar ustreza začetnemu položaju dame (i, j)).

4.3 **Zaporedje varnih položajev**. Zapišimo pare, ki določajo varne položaje v tabelo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49
y_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30

Tabela 2

Zaporedje x_n v tabeli 2 imenujemo *zgornje*, y_n pa *spodnje Wythoffovo zaporedje*.

Hitro vidimo, da je $x_n = y_n + n$. Z nekoliko več truda ugotovimo, da je $y_n = [n\tau]$ in $x_n = [n\tau^2]$, kar je eksplicitna formula za zgornji zaporedji. Ker je $\tau^2 = \tau + 1$, je tudi razumljivo, da je $x_n = [n\tau^2] = [n\tau + n] = [n\tau] + n = y_n + n$.

Opazimo, da v tabeli 2 nastopa vsako naravno število $n \geq 1$ natanko enkrat v eni od spodnjih dveh vrstic (oziroma v množici vseh varnih parov). Torej pomenita zaporedji (x_n) in (y_n), $n \geq 1$, nekakšno porazdelitev množice naravnih števil v dve podmnožici. Rečemo, da sta zaporedji (x_n) in (y_n) komplementarni. Pri tvorbi obeh zaporedij jemljemo naravna števila po vrsti: 1 zapišemo v drugo zaporedje, 2 v prvo zaporedje, nato pa jih izmenično zapisujemo v drugo zaporedje in v prvo zaporedje v skladu s pravilom $F(2,1)$, tj. dva zaporedna v drugo, nato eno v prvo, eno v drugo, eno v prvo, dve zaporedni v drugo itd.

Zadnja lastnost zaporedij (x_n) in (y_n) ni tako redka, kot bi si morda mislili. Sledi iz splošne zakonitosti: če je $\alpha > 1$ poljubno iracionalno število in je $1/\alpha + 1/\beta = 1$, sta zaporedji $([n\alpha])$ in $([n\beta])$ komplementarni (glej [3] ali [4]). Pri nas je $\alpha = \tau$ in $\beta = \tau^2$.

Začetni varni pari so zapisani v tabeli 2. Opazimo, da so varni vsi pari zaporednih Fibonaccijevih števil oblike (F_{2n+1}, F_{2n}), $n \geq 1$, npr. (2,1), (5,3), (13,8) itd. Prvi varni par, ki ni sestavljen iz Fibonaccijevih števil je par (7,4). Tu sta komponenti iz Lucasovega zaporedja 3,4,7, ... in hitro vidimo, da so varni tudi vsi nadaljni pari zaporednih Lucasovih števil oblike (L_{2n+1}, L_{2n}) za $n \geq 1$. Naslednji par, ki ni niti Fibonaccijev niti Lucasov je par (10,6), ki tudi generira celo zaporedje varnih parov (26,16), (68,42), ... Začetne člene teh "varnihžaporedij imenujemo *primitivni pari*. Primitivni pari v tabeli 2 imajo pozicijske številke 1,3,4,6,8,9,11,..., kar spet predstavlja zaporedje (y_n).

Kako direktno ugotovimo, če je par (m, n) varen, ne da bi morali sestaviti celotno tabelo do tega para? Odgovor na to vprašanje bomo našli v razdelku 6.

5. Konstrukcija standardnih zaporedij

Doslej smo spoznali nekaj podzaporedij naravnih števil (z dodatkom števila 0), ki so v zvezi s Fibonaccijevim zaporedjem f_n, določenim s pravilom $F(1,0)$, oziroma Fibonaccijevimi stopnicami, npr. zaporedje (p_n) naravnih števil s ponavljanjem, zgornje in spodnje Wythoffovo zaporedje (x_n) in (y_n). Ta in s tem povezana zaporedja imenujemo *standardna zaporedja*. Zapišimo jih v tabelo v nekoliko drugačnem vrstnem redu

f_n	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
p_n	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30
x_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49
t_n	3	8	11	16	21	24	29	32	37	42	45	50	55	58	63	66	71	76	79

Tabela 3

Zadnje zaporedje t_n je zaporedje (4), ki določa položaje, pri katerih so Fibonaccijeve stopnice ozke oziroma dolge le en korak.

5.1. **Zveza med standardnimi zaporedji**. Prepričajmo se, da so ta zaporedja med seboj povezana na različne zanimive načine. Opazimo npr., da je kumulativno zaporedje za zaporedje f_n ravno zaporedje p_n, ki določa Fibonaccijeve stopnice. Vsa nadaljnja zaporedja so podzaporedja zaporedja p_n, določena z zaporedjem (f_n) oziroma s pravilom $F(1,0)$ na naslednji način. Najprej opazimo, da je (y_n) zaporedje položajev, kjer so v zaporedju (f_n) enke, (x_n) pa zaporedje tistih položajev, kjer so v (f_n) ničle. Na teh mestih so v zaporedju (p_n) ravno členi zaporedja (n) oziroma členi zaporedja (y_n), torej je $p_{y_n} = n$ in $p_{x_n} = y_n$ za vsak n. Nadalje npr. velja $y_{x_n} = t_n$ itd. Zanimiva so diferenčna zaporedja teh zaporedij. Prav tako hitro vidimo, da velja npr. $p_{n-1} + n = y_n$, $y_n + n = x_n$, $x_n + y_n = t_n$ itd.

5.2. **Dvojno Wythoffovo zaporedje**. Varne pare iz razdelka 4 lahko razporedimo še na drug način, v dvorazsežno tabelo. Definirajmo rekurzivno naslednja zaporedja: $w_n^{(1)} = n-1+y_n$, $w_n^{(2)} = y_n + w_n^{(1)}$ ter $w_n^{(k+1)} = w_n^{(k)} + w_n^{(k-1)}$ za $k \geq 2$ in za vsak $n = 1,2,3,...$ Dobimo t.i. *dvojno Wythoffovo zaporedje*:

$n-1$	y_n		$w_n^{(1)}$	$w_n^{(2)}$	$w_n^{(3)}$	$w_n^{(4)}$	$w_n^{(5)}$	$w_n^{(6)}$	$w_n^{(7)}$	$w_n^{(8)}$	$w_n^{(9)}$	
0	1	|	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
1	3	|	4	7	11	18	29	57	86	143	229	...
2	4	|	6	10	16	26	42	68	110	178	288	...
3	6	|	9	15	24	39	63	102	165	267	432	...
4	8	|	12	20	32	52	84	136	220	356	576	...
5	9	|	14	23	37	60	97	157	254	411	665	...
6	11	|	17	28	45	73	118	191	309	500	809	...
7	12	|	19	31	50	81	131	212	343	555	898	...
8	14	|	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	...
9	16	|	25	41	66	107	173	280	453	733	1186	...
10	17	|	27	44	71	115	186	301	487	788	1275	...
..	..	.	..	..	..	...	...	...	...	...	....	...

Tabela 4

To dvojno zaporedje ima zanimive lastnosti (glej npr. [1]):
1. Prva vrstica je zaporedje Fibonaccijevih števil, druga Lucasovih števil.
2. Vsaka vrstica zadošča Fibonaccijevi rekurziji.
3. Prvi element desno od črtice je najmanjše naravno število, ki ni zajeto v prejšnjih vrsticah.
4. Vsako naravno število se pojavi natanko enkrat (desno od navpične črte).
5. Števila v vsaki vrstici ali stolpcu monotono naraščajo.
6. Členi v katerihkoli dveh vrsticah med seboj alternirajo.
7. Vsako zaporedje posplošenih Fibonaccijevih števil, ki so od nekje dalje pozitivna, se pojavijo v neki vrstici.
8. V tabeli so zapisani vsi varni pari. V vsaki vrstici sta prvi dve števili primitiven par, sledijo pa (po dva in dva) iz njega izpeljani pari.

6. Fibonaccijeva binarna notacija

Znano je, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto različnih Fibonaccijevih števil F_n in to celo na več načinov, tudi če vedno uporabljamo padajoči vrstni red, npr. $1 = F_1 = F_2$, $2 = F_3 = F_2 + F_1$, $3 = F_4 = F_3 + F_2 = F_3 + F_1$, $4 = F_4 + F_2 = F_4 + F_1 = F_3 + F_2 + F_1$, $5 = F_5 = F_4 + F_2 + F_1 = F_4 + F_3$, $6 = F_5 + F_2 = F_5 + F_1 = F_4 + F_3 + F_2 = F_4 + F_3 + F_1$, $7 = F_5 + F_3 = F_5 + F_2 + F_1 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1$ itd.

6.1. **Fibonaccijeva binarna notacija**. Če množico Fibonaccijevih števil izberemo za bazo in zapisujemo le koeficiente pri ustreznih Fibonaccijevih številih (uporabljajoč mestni sistem, tako kot v decimalnem zapisu), lahko za začetna naravna števila tako kot zgoraj uporabljamo naslednjo *Fibonaccijevo notacijo*: $1 = 1 = 10$, $2 = 100 = 11$, $3 = 1000 = 110 = 101$, $4 = 1010 = 1001 = 111$, $5 = 10000 = 1011 = 1100$, $6 = 10010 = 10001 = 1110 = 1101$, $7 = 10100 = 10011 = 1111$, itd. Take zapise naravnih števil bomo na kratko imenovali *binarne Fibonaccijeve besede.*

Nerodno je to, da predstavitev števila v tej notaciji ni enolična. Nekoliko zadevo poenostavimo, če zahtevamo, da v zapisu **ni** zaporednih Fibonaccijevih števil, npr. le $5 = 10000$, ne pa $5 = 1011$ ali $5 = 1100$. Dobimo binarne besede (končna binarna zaporedja), sestavljene iz števk 0 in 1 (z enko na prvem mestu), kjer dve enki ne stojita skupaj. To so t.i. *Fibonaccijeve kocke*, ki so zelo uporabne v teoretičnem računalništvu. Tako notacijo bomo imenovali *notacija s Fibonaccijevimi kockami* ali na kratko FK-*notacija.* Na žalost tudi ta notacija ni povsem enolična. Isto število npr. dobimo, če v besedi, ki se konča z 10, to končno desetico zamenjamo z 01, ali če v besedi, ki se konča na 1000, to končno tisočico zamenjamo z 0101. Natančneje: FK-notacija kodira ravno zaporedje p_n. Od prej vemo, da je $p_n = n + y_n$. Vidimo, da imajo števila iz x_n en sam FK - zapis, števila iz y_n pa dva FK - zapisa.

Če pa poleg prepovedi dveh zaporednih enk vedno zahtevamo še, da se mora beseda končati z 10, se pravi, da Fibonaccijevega števila $F_1 = 1$ sploh ne uporabljamo, dobimo enoličnost pri Fibonaccijevem zapisu naravnih števil.

Izrek (Zeckendorf). *Vsako naravno število lahko na en sam način izrazimo kot vsoto nezaporednih Fibonaccijevih števil* F_n*,* $n \geq 2$.

Tako notacijo imenujemo *Zeckendorfova notacija* ali na kratko Z-*notacija* (glej stolpec 1 v tabeli 5). V njej so Fibonaccijeve kocke z 0 na zadnjem mestu (sode kocke). Preostanek Fibonaccijevih kock pa ima na zadnjem mestu 1 (lihe kocke) in kodira zaporedje (y_n) (stolpec 2). V tretjem stolpcu so sode kocke z 1 na predzadnjem mestu, pri katerih je zadnja 0 spremenjena v 1, tako za se notacija konča z 11. Taka notacija kodira zaporedje (x_n). Podobno razvrstimo tudi druge binarne Fibonaccijeve besede v nadaljnje stolpce.

	n	y_n	x_n			
0	0					
1	10	1				
2	100		11			
3	1000	101		110		
4	1010	1001		111		
5	10000		1011		1100	
6	10010	10001		1110	1101	
7	10100		10011		1111	
8	100000	10101		10110	11000	
9	100010	100001		11001	10111	11010
10	100100		100011		11011	11100
11	101000	100101		100110	11101	11110
12	101010	101001		100111	11111	
..	......	......	......	......	......	......

Tabela 5

6.2. **Fibonaccijev predhodnik in naslednik naravnega števila**. Iz Zeckendorfove reprezentacije naravnih števil dobimo FK-notacijo za ponavljajoče zaporedje naravnih števil p_n preprosto tako, da odstranimo zadnjo ničlo. Rečemo, da smo številu poiskali njegovega *Fibonaccijevega predhodnika*. Ostanejo ravno vse Fibonaccijeve kocke.

Iz Zeckendorfove notacije lahko dobimo t.i. *komplementarno Zeckendorffovo* ali Z' - *notacijo* naravnih števil preprosto tako, da izberemo pri tistih naravnih številih, ki imajo dva FK - zapisa, alternativno Fibonaccijevo kocko. Oglejmo si še enkrat tabelo 3. Izhajajoč iz notacije Z′ naravnih števil vsakemu zapisu zapored dodajajmo po eno ničlo. Dobimo zaporedoma iz zaporedja n zaporedja y_n, x_n in t_n. (Če bi začeli z reprezentacijo Z, pa bi najprej dobili zaporedje $y_n - 1$: (0), 2, 3, 5, 7, 8, 10, ..., nato pa zaporedje $x_n - 2$: (0), 3, 5, 8, 11, 13, 16, ...) Vidimo, da je število n', ki ga dobimo iz števila n z dodatkom ničle v dani notaciji, odvisno od tega, kako smo prvotno število n zapisali. V primeru, ko je število n zapisano v Zeckendorfovi notaciji, rečemo, da je dobljeno število n' *Fibonaccijev naslednik* začetnega števila n. Npr. večje število v varnem paru je vedno Fibonaccijev naslednik manjšega števila.

Oglejmo si še en primer naslednikov, tabelo 4 (dvojno Wythoffovo zaporedje). Prvi stolpec je vsota obeh stolpcev pred navpično črto, $w_n^{(1)} = y_n + n - 1$, drugi stolpec je Fibonaccijev naslednik prvega, tretji naslednik drugega itd.

6.3. **Vzorci v Fibonaccijevi binarni notaciji**. Notacija ima zanimive kombinatorične lastnosti. Posebej to velja za Fibonaccijeve kocke in še posebej za Z - notacijo. Oglejmo si nekaj zgledov.

(a) Po dogovoru se vsaka Fibonaccijeva kocka začne z 1 (tj. ničel pred prvo enko ne pišemo). Neničelne Fibonaccijeve kocke razvrstimo v skupine glede na njihovo dolžino: v prvi skupini je 1, v drugi 10, v tretji 100 in 101, v četrti 1000, 1001 in 1010, itd. Opazimo, da je v n-ti skupini ravno F_n Fibonaccijevih kock. Tudi le pri neničelnih sodih Fibonaccijevih kockah, ki določajo Z-reprezentacijo, opazimo enako: v prvi skupini je le 10, v drugi 100, v tretji 1000 in 1010, itd., splošno, v n-ti skupini natanko F_n kock.

(b) Zapišimo zaporedje naravnih števil v Zeckendorfovi predstavitvi drugega pod drugim upoštevajoč mestne vrednosti. Predzadnji stolpec v Zeckendorfovi reprezentaciji (ali zadnji stolpec v zaporedju vseh Fibonaccijevih kock, ki kodirajo zaporedje (p_n) naravnih števil s ponavljanjem, dobimo iz Fibonaccijevega zaporedja (f_n) tako, da v 010110101101101011010... vsako 1 nadomestimo z 10. Predpredzadnji stolpec v Z-notaciji (ali predzadnji v FK-notaciji) dobimo, če v (f_n) vsako 1 nadomestimo z 100, vsako 0 pa z 00, itd. Podobno velja za prejšnje stolpce.

(c) Število enk v Zeckendorfovem zapisu števila n sledi zaporedju 1 1 1 2 1 2 2 1 2 2 2 3 1 2 2 2 3 2 3 3 ... Po skupinah je to 1 | 1 2 | 1 2 2 | 1 2 2 2 3 | 1 2 2 2 3 2 3 3 | ... Bralec naj sam ugotovi, kakšno je pravilo.

(d) Koliko Fibonaccijevih zapisov ima posamezno naravno število? Za n = 0,1,2,3,4,5,6,7,8, 9,10,... dobimo po vrsti 1 2 2 3 3 3 4 3 4 5 4 ... Ali obstaja preprosta formula?

(e) Katere Fibonaccijeve kocke so palindromi (tj. simetrične besede, ki se berejo naprej in nazaj enako)? Očitno so to lahko le lihe kocke, toda katere so to?

7. Fibonaccijeve četverke

Zapišimo zaporedje naravnih števil v običajnem dvojiškem sistemu, torej $0 = 0$, $1 = 1$, $2 = 10$, $3 = 11$, $4 = 100$, ... Tako dobimo vse variacije s ponavljanjem dveh simbolov, 0 in 1, najprej na enem mestu, nato na dveh mestih, na treh mestih, štirih, petih itd. Zdaj pa enke tolmačimo, ne kot koeficiente pri ustrezni potenci števila 2, ampak kot koeficiente pri ustreznem Fibonaccijevem številu. Vrednosti tako dobljenih binarnih Fibonaccijevih besed sestavljajo še eno zanimivo nihajoče in ponavljajoče se zaporedje naravnih števil:

0 1 1 2 2 3 3 4 3 4 4 5 5 6 6 7 5 6 6 7 7 8 8 9 8 9 9 10 10 11 11 12 ...

7.1. **Četverke**. Strukturo tega zaporedja najlažje spoznamo, če ga zapišemo v obliki skupin s štirimi elementi, tj. s četverkami. Obenem zapišimo še binarne Fibonaccijeve besede.

	Binarna	*Fibonac.*	*notacija*	*Vrednost*	*Zapor.*			
00	01	10	11	0 1 0 1		(y_n)		(x_n)
0	1	10	11	0 1 1 2	0	(1)	1	[2]
100	101	110	111	2 3 3 4	2	(3)	–	–
1000	1001	1010	1011	3 4 4 5	3	(4)	4	[5]
1100	1101	1110	1111	5 6 6 7	–	–	–	–
10000	10001	10010	10011	5 6 6 7	5	(6)	6	[7]
10100	10101	10110	10111	7 8 8 9	7	(8)	–	–
11000	11001	11010	11011	8 9 9 10	–	–	–	–
11100	11101	11110	11111	10 11 11 12	–	–	–	–
100000	100001	100010	100011	8 9 9 10	8	(9)	9	[10]
100100	100101	100110	100111	10 11 11 12	10	(11)	–	–
101000	101001	101010	101011	11 12 12 13	11	(12)	12	[13]
101100	101101	101110	101111	13 14 14 15	–	–	–	–
110000	110001	110010	110011	13 14 14 15	–	–	–	–
110100	110101	110110	110111	15 16 16 17	–	–	–	–
111000	111001	111010	111011	16 17 17 18	–	–	–	–
111100	111101	111110	111111	18 19 19 20	–	–	–	–
1000000	1000001	1000010	1000011	13 14 14 15	13	(14)	14	[15]
1000100	1000101	1000110	1000111	15 16 16 17	15	(16)	–	–
1001000	1001001	1001010	1001011	16 17 17 18	16	(17)	17	[18]
1001100	1001101	1001110	1001111	18 19 19 20	–	–	–	–
1010000	1010001	1010010	1010011	18 19 19 20	18	(19)	19	[20]
1010100	1010101	1010110	1010111	20 21 21 22	20	(21)	–	–
1011000	1011001	1011010	1011011	21 22 22 23	–	–	–	–
1011100	1011101	1011110	1011111	23 24 24 25	–	–	–	–

	Binarna	*Fibonac.*	*notacija*	*Vrednost*	*Zapor.*			
1100000	1100001	1100010	1100011	21 22 22 23	–	–	–	–
1100100	1100101	1100110	1100111	23 24 24 25	–	–	–	–
1101000	1101001	1101010	1101011	24 25 25 26	–	–	–	–
1101100	1101101	1101110	1101111	26 27 27 28	–	–	–	–
1110000	1110001	1110010	1100011	26 27 27 28	–	–	–	–
1110100	1110101	1110110	1110111	28 29 29 30	–	–	–	–
1111000	1111001	1111010	1111011	29 30 30 31	–	–	–	–
1111100	1111101	1111110	1111111	31 32 32 33	–	–	–	–
10000000	10000001	10000010	10000011	21 22 22 23	21	(22)	22	[23]
10000100	10000101	10000110	10000111	23 24 24 25	23	(24)	–	–
10001000	10001001	10001010	10001011	24 25 25 26	24	(25)	25	[26]
10001100	10001101	10001110	10001111	26 27 27 28	–	–	–	–
– – –	– – –	– – –	– – –	– – – –	–	–	–	–

Tabela 6

Števila, zapisana v zadnjih štirih stolpcih, imajo poseben pomen. Brez oklepajev smo zapisali vsako naravno število na mestu, kjer je v prvi polovici tabele njegova Zeckendorfova notacija. Skupaj s števili v okroglem oklepaju tvorijo ponavljajoče zaporedje naravnih števil (p_n). Vsak člen predstavlja vrednost istoležne Fibonaccijeve kocke. Zaporedje v okroglem oklepaju je spodnje Wythoffovo zaporedje (y_n), v oglatem oklepaju pa je zgornje Wythoffovo zaporedje (x_n). Vsa števila brez oklepajev in v obeh vrstah oklepajev skupaj kodirajo dvakrat šteto zaporedje naravnih števil. To so binarne besede iz prvih treh stolpcev tabele 5. Črtica je na mestu, kjer nastopi kakšna drugačna binarna beseda (več enk skupaj, vendar ne le na zadnjih dveh mestih).

V drugi vrstici so najprej končnice besed (zadnji dve mesti), nato razlike med njihovimi vrednostmi. Navzdol tečejo razlike kot 0 2 1 2 (znotraj posamezne četverke) in kot 0 5 3 5 (med skupinami četverk).

Zanimivo je opazovati strukturo celotnega zaporedja binarnih besed (ali zgolj njihovih četverk) v skupinah po 1, 2, 4, 8, ... V ničti skupini je ena beseda (0) z vrednostjo $F_0 = 0$, v prvi tudi ena (1) z vrednostjo $F_1 = 1$, v drugi sta dve besedi (10,11) dolžine 2 z vrednostma $F_2 = 1$ in 2, v tretji so štiri besede (100, 101, 110, 111) dolžine 3 z začetno vrednostjo $F_3 = 2$ itd. V n-ti skupini je torej 2^{n-1} besed dolžine n z začetno vrednostjo F_n. V vsaki novi skupini se v bistvu ponovijo vse dotedanje besede, le na njihovem začetku se pojavi 1 (prej si lahko mislimo, da je bila 0). Njihova vrednost pa je vsota začetne vrednosti v skupini F_n in "istoležne"prejšnje vrednosti. Vidimo, da sta dvojiški in Fibonaccijev sistem med seboj lepo usklajena.

7.2. **Črkovna koda**. V zvezi s četverkami binarnih besed omenimo kot zanimivost še gensko kodo v RNK (oziroma DNK). Vsako besedo iz tabele 6 preberimo v parih (dve zaporedni binarni števki skupaj). Če ima beseda liho dolžino, si pred prvo enko mislimo zapisano liho število ničel, pri besedah sode dolžine pa sodo število ničel. Hkrati se dogovorimo npr. še za naslednje oznake: G = 00, U = 01, A = 10 in C = 11. Potem lahko vseh 64 besed v prvih 16 vrsticah zapišemo v obliki kodonov, sestavljenih iz trojic črk G, U, A in C. Tu si lahko mislimo, da pomeni G gvanin, U uracil (v DNK je nameso U črka T - timin), A adenin in C citozin. Črke G, U, A in C sestavljajo bazo, iz katere lahko sestavimo $4^3 = 64$ kodonov. Vsak kodon pa kodira eno izmed dvajsetih aminokislin, iz katerih so sintetizirani proteini, ali pa znak za ustavitev sinteze (STOP). Različni kodoni lahko pomenijo isto aminokislino, zanimivo pa je, da se ista aminokislina pogosto pojavi v isti vrstici, včasih v vseh štirih besedah, včasih v dveh (je tudi nekaj izjem).

Prvih 64 besed (16 vrstic) tabele 6 torej predstavlja *gensko kodo*, ki jo, zapisano s črkami, prikazuje tabela 7. V prvem stolpcu so uradne oznake za aminokisline (glicin, valin, glutamat, aspartat, alanin, triptofan, cistein, leucin, fenilalanin, tirozin, serin, arginin, metionin, izoleucin, lizin, asparagin, treonin, glutamin, histidin in prolin).

Aminokislina		*G*	*U*	*A*	*C*
Gly	*GG*	*GGG*	*GGU*	*GGA*	*GGC*
Val	*GU*	*GUG*	*GUU*	*GUA*	*GUC*
Glu, Asp	*GA*	*GAG*	*GAU*	*GAA*	*GAC*
Ala	*GC*	*GCG*	*GCU*	*GCA*	*GCC*
Trp, STOP, Cys	*UG*	*UGG*	*UGU*	*UGA*	*UGC*
Leu, Phe	*UU*	*UUG*	*UUU*	*UUA*	*UUC*
STOP, Tyr	*UA*	*UAG*	*UAU*	*UAA*	*UAC*
Ser	*UC*	*UCG*	*UCU*	*UCA*	*UCC*
Arg, Ser	*AG*	*AGG*	*AGU*	*AGA*	*AGC*
Met, Ile	*AU*	*AUG*	*AUU*	*AUA*	*AUC*
Lys, Asn	*AA*	*AAG*	*AAU*	*AAA*	*AAC*
Thr	*AC*	*ACG*	*ACU*	*ACA*	*ACC*
Arg	*CG*	*CGG*	*CGU*	*CGA*	*CGC*
Leu	*CU*	*CUG*	*CUU*	*CUA*	*CUC*
Gln, His	*CA*	*CAG*	*CAU*	*CAA*	*CAC*
Pro	*CC*	*CCG*	*CCU*	*CCA*	*CCC*

Tabela 7

Literatura

[1] http://www.research.att.com/ njas/sequences/classic.html

[2] M. Gardner, *Wythoff's Nim*, 8. poglavje v knjigi: Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers ... and the Return of Dr.Matrix, MAA, Washington, D.C., 1997

[3] I. Vidav, *Komplementarna zaporedja naravnih števil*, Obzornik za matematiko in fiziko, 45 (1998), 1-8.

[4] I. Vidav, *O funkciji [x] in komplementarnih zaporedjih naravnih števil*, Obzornik za matematiko in fiziko, 27 (1980), 67-73.