**Definicija.** Naravno število $n$ je popolno, če je enako vsoti svojih pravih deliteljev.

**Primer.** Prva štiri popolna števila so:

$$\begin{aligned} 6 &= 1+2+3 \\ 28 &= 1+2+4+7+14 \\ 496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \\ 8128 &= 1+2+4+8+16+32+64+127+254+ \\ &\quad +508+1016+2032+4064 \end{aligned}$$

Peto popolno število je $2^{12}(2^{13}-1) = 33550336$, šesto pa $2^{16}(2^{17}-1) = 8589869056$.

**Definicija.** Za naravno število $n$ z $s(n)$ označimo vsoto vseh deliteljev števila $n$.

Tako je število $n$ popolno natanko tedaj, ko je $s(n) = 2n$.

**Trditev** (Evklid, Elementi IX)**.** *Naj bo $m$ naravno število. Če je število $2^m - 1$ praštevilo, potem je število*

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

*popolno.*

*Dokaz.* Število $p = 2^m - 1$ je po predpostavki praštevilo. Vsi delitelji števila $n$ so ali oblike $2^k$ ali oblike $2^k p$, kjer je $0 \leq k \leq m-1$. Zato je

$$s(n) = (1 + 2 + \ldots + 2^{m-1})(1+p) = (2^m - 1)(1+p) = 2^m(2^m - 1) = 2n.$$

□

**Definicija.** Če je število $2^m - 1$ praštevilo, mu pravimo *Mersennovo praštevilo.*

**Primer.** $2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 761838257287 \cdot 193707721$ ni Mersennovo praštevilo (Cole, 1903).

**Izrek** (L. Euler)**.** *Vsako sodo popolno število $n$ je oblike*

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1),$$

*pri čemer je $2^m - 1$ praštevilo.*

*Dokaz.* Iz števila $n$ izpostavimo vse dvojke: $n = 2^{m-1}q$, pri čemer je $q$ liho število in $m \geq 2$.

Delitelji števila $n$ so oblike $2^r d$, kjer je $0 \leq r \leq m-1$ in $d|q$. Zato je

$$s(n) = (1 + 2 + \ldots + 2^{m-1})(\sum_{d|q} d) = (2^m - 1)s(q).$$

Ker je po predpostavki število $n$ popolno, je

$$2n = 2^m q = s(n) = (2^m - 1)s(q)$$

Zato je

$$(2^m - 1)s(q) - q = 2^m q - q,$$

$$(2^m - 1)(s(q) - q) = q. \tag{1}$$

Iz zadnje enačbe vidimo, da število $s(q)-q$ deli $q$. Če bi bila števila 1, $s(q)-q$ in $q$ paroma različna, bi torej veljalo

$$s(q) \geq 1 + (s(q) - q) + q = s(q) + 1,$$

kar ne more biti res. Če bi veljalo $s(q) - q = q$, bi iz enačbe (1) dobili

$$(2^m - 1)q = q,$$

kar ni res, ker je $m \geq 2$. Zato mora biti $s(q) - q = 1$ oz. $s(q) = q + 1$, kar pomeni, da je $q$ praštevilo. Ko v enačbo (1) vstavimo $s(q) - q = 1$, dobimo, da je praštevilo $q$ oblike

$$q = 2^m - 1,$$

to pa je bilo treba pokazati. $\square$