

O finančni matematiki

Tomaž Košir

Oddelek za matematiko FMF

Moderni izzivi v poučevanju matematike
21. september 2007

Vsebina

- 1 Uvod
- 2 Razvoj finančne matematike
 - Začetki
 - Moderna doba
- 3 Finančni inštrumenti
 - Definicije
 - Primeri
- 4 Finančni trg in vrednotenje
 - Idealni finančni model
 - Vrednotenje
 - Matematična orodja
- 5 Zaključek

Opravičilo

- nisem specialist za finančno matematiko,
- ne poznam slovenskih izrazov za nekatera poimenovanja iz ekonomije; navajam svoje prevode in angleške izraze,
- poljudno predavanje, bolj malo matematike.

Kaj je finančna matematika?

- Del matematike, ki se ukvarja z uporabo v financah.
- Včasih se uporabljata tudi izraza matematične finance ali kvantitativne finance.

Motivacija za razvoj področja

- potrebe po znanju matematike na svetovnem finančnem trgu in v finančnih inštitucijah,
- zahteve regulatorjev svetovnega finančnega trga,
- zelo zanimivi izzivi za matematično raziskovanje.

Zgodnji začetki

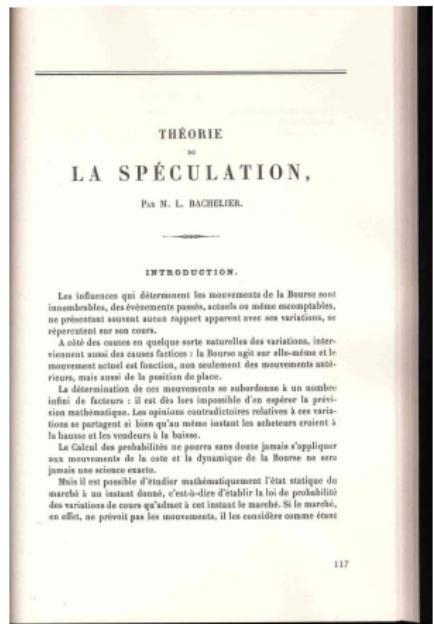
- trgovanje z odpustki (15. in 16. stoletje),
- Pascal, de Méré v 16. stoletju,
- Bernouliji v 18. stoletju.



Daniel Bernoulli
1700-1782

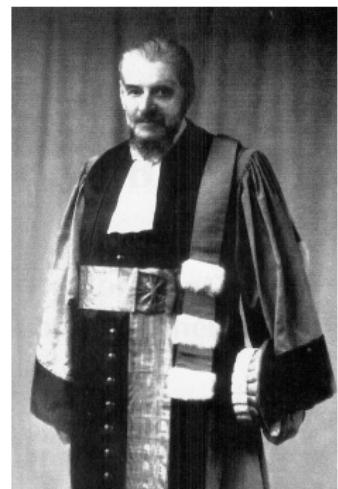
Louis Bachelier 1870-1946

- Francoski matematik, **začetnik finančne matematike**.
- Leta 1900 napisal doktorsko disertacijo *Teorija napovedovanj (Théorie de la spéculation)*. Obravnava gibanja vrednosti na finančnih trgih in predstavi matematični model za njih.
- V disertaciji je prvi opis Brownovega gibanja. Einstein ga je podal s fizikalnim ozadjem leta 1905.



Louis Bachelier 1870-1946

- Bachelier je bil prvi na svojem področju, ne dovolj cenjen in ne prav razumljen. Samo področje je imelo določeno stigmo.
- Do 1927 ni dobil stalne zaposlitve v akademskem svetu, le začasne. Bil je vpoklican v francosko vojsko v prvi svetovni vojni.
- 1927-37 je bil profesor na univerzi v Besançonu.
- Napisal knjigo *Igra, sreča in tveganje*, učbenik iz teorije verjetnosti in več člankov.



Formula Blacka in Scholesa

- Fischer Black (1938-1995) in Myron S. Scholes (1941-) sta leta 1969 dokazala danes slavno Black-Scholesovo formulo za vrednotenje opcij.
- Neodvisno od njiju jo je dokazal nekaj kasneje tudi Robert C. Merton (1944-).



Black



Scholes



Merton

Formula Blacka in Scholesa

- Nobelova nagrada za ekonomijo leta 1997 za Scholesa in Mertona.
- Nova teorija je povzročila najprej počasen razvoj trga izpeljanih vrednostnih papirjev v Chicagu in nato New Yorku v 1970-ih letih. In skokovit razvoj tega trga od 1980-ih in 1990-ih dalje v razvitih zahodnih državah.
- Danes je ta trg po obsegu večji od trga dobrin.



Black



Scholes



Merton

Finančni inštrumenti

- Finančni sistem je ustvaril tako imenovane **finančne inštrumente**.
- Finančni inštrument je *pogodba* med dvema osebama, v kateri se obvezeta na določena plačila ob določenih časih v prihodnosti. Dogovorita se za plačilo ene strani drugi ob začetku.

Finančni inštrumenti

- Finančni sistem je ustvaril tako imenovane **finančne inštrumente**.
- Finančni inštrument je *pogodba* med dvema osebama, v kateri se obvezeta na določena plačila ob določenih časih v prihodnosti. Dogovorita se za plačilo ene strani drugi ob začetku.
- Primeri: delnice, obveznice, zakladne menice, vzajemni skladi, posojila, zavarovalne police, ...

Izvedeni finančni inštrumenti

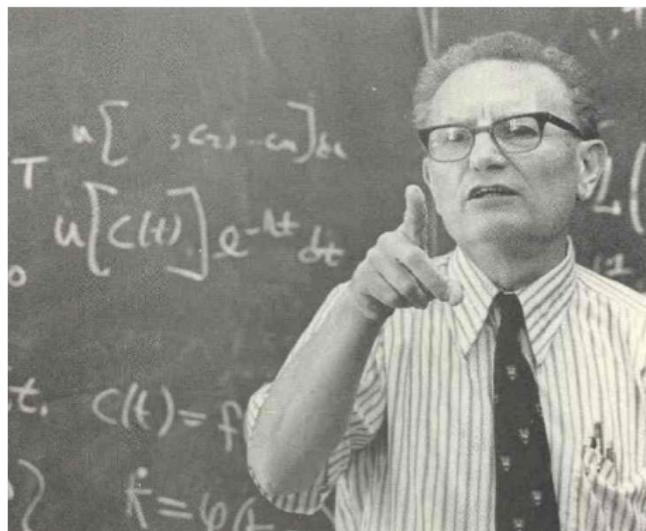
- Finančni inštrumenti, katerih pogodba se nanaša na druge finančne inštrumente, so **izvedeni finančni inštrumenti**.
- Primeri: opcije (options), terminske pogodbe (futures), zamenjave (swaps), ...
- Prvi primeri opcij v kmetijstvu.

INDEX OPTIONS TRADING									
	Strike	Vol.	Net Chg.	Chg. Int.	Strike	Vol.	Net Chg.	Chg. Int.	Strike
Tuesday, January 4, 2000									
Volumes, close-to-change and open interest are for all contracts. Volume figures are in thousands. Open interest reflects derivative trading day. A P/L is calculated for each option. Premiums paid and open interest are midday figures.									
Strike	Vol.	Net Chg.	Chg. Int.		Strike	Vol.	Net Chg.	Chg. Int.	
MEXICO (INDEX/MEXICO)									
Jan 80 95 c 5 18% - 1% 12	1,000	-10	-10		Jan 112.5 95 c 10 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Feb 80 95 c 10 18% - 1% 12	1,000	-10	-10		Mar 112.5 95 c 10 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	116		Put Vol.	18	Open Int.	116	
PUT VOL.					PUT VOL.				
CHICAGO									
CB TECHNOLOGY(TEK) (INDEX/TEK)									
Jan 800 9 18% - 1% 16	1,000	-10	-10		Mar 800 9 17% 14 - 1% 16	1,000	-10	-10	
Feb 800 9 18% - 1% 16	1,000	-10	-10		Mar 800 9 17% 14 - 1% 16	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	317		Put Vol.	18	Open Int.	317	
PUT VOL.					PUT VOL.				
INDIA (INDEX/INDIA)									
Jan 1,000 9 18% - 1% 17	1,000	-10	-10		Mar 1,000 9 18% - 1% 17	1,000	-10	-10	
Feb 1,000 9 18% - 1% 17	1,000	-10	-10		Mar 1,000 9 18% - 1% 17	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	381		Put Vol.	18	Open Int.	381	
PUT VOL.					PUT VOL.				
AMERICAN									
CMP (FUTURES)									
Jan 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10		Mar 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Feb 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10		Mar 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	319		Put Vol.	18	Open Int.	319	
PUT VOL.					PUT VOL.				
JAPAN (INDEX/JPN)									
Jan 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10		Mar 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Feb 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10		Mar 112.5 2 18% + 1% 11	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	319		Put Vol.	18	Open Int.	319	
PUT VOL.					PUT VOL.				
MS CYCLICAL(CYC)									
Jan 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10		Mar 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10	
Feb 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10		Mar 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	319		Put Vol.	18	Open Int.	319	
PUT VOL.					PUT VOL.				
MS Hitech (SMHS)									
Jan 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10		Mar 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10	
Feb 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10		Mar 120 2 18% + 1% 12	1,000	-10	-10	
Call Vol.	18	Open Int.	319		Put Vol.	18	Open Int.	319	
PUT VOL.					PUT VOL.				

Figure 2.2 The Wall Street Journal Europe of 5th January 2000, Index Options. Reproduced by permission of Dow Jones & Company, Inc.



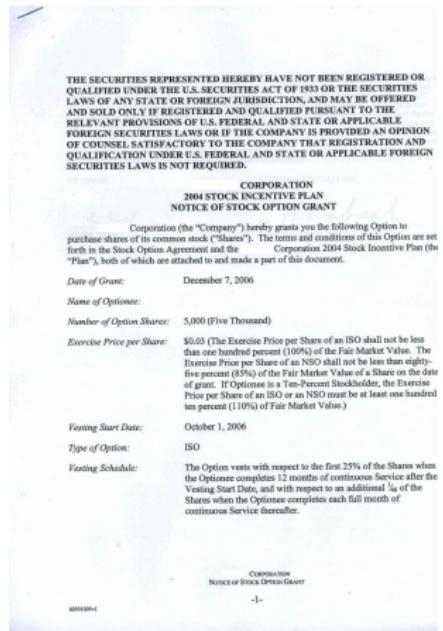
Borza v Chicago, kjer se je začelo trgovanje z opcijami



Paul Samuelson (1915-) - eden najvplivnejših ameriških ekonomistov

Kaj so opcije?

- Npr. **evropska nakupna opcija** (European call option) daje lastniku *pravico* (in ne obveznost) nakupa določenega premoženja (npr. delnice) za določeno ceno ob določenem času v prihodnosti. Za to pravico mora lastnik plačati določeno vrednost.
- Podobno **evropska prodajna opcija** daje lastniku *pravico* (in ne obveznost) prodaje določenega premoženja za določeno ceno ob določenem času v prihodnosti.



Zgled

- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR120 čez tri mesece, to je 21. 12. 2007.

Zgled

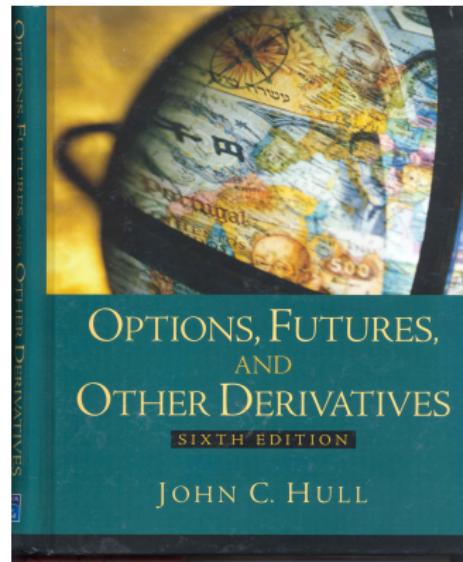
- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR120 čez tri mesece, to je 21. 12. 2007.
- Če bo 21. 12. vrednost delnic Krke nad EUR120, boste delnice takrat kupili, saj jih lahko takoj prodate po višji ceni.

Zgled

- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR120 čez tri mesece, to je 21. 12. 2007.
- Če bo 21. 12. vrednost delnic Krke nad EUR120, boste delnice takrat kupili, saj jih lahko takoj prodate po višji ceni.
- Če bo vrednost pod EUR120, delnic ne boste kupili.

Zgled

- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR120 čez tri mesece, to je 21. 12. 2007.
- Če bo 21. 12. vrednost delnic Krke nad EUR120, boste delnice takrat kupili, saj jih lahko takoj prodate po višji ceni.
- Če bo vrednost pod EUR120, delnic ne boste kupili.



Za kaj se uporabljajo opcije?

- Opcije so zelo atraktivni finančni inštrumenti tako za investicije kot tudi za zaščito pred finančnimi tveganji (hedging).
- Na primer: zaščita pred valutnimi tveganji, pred tveganji izgube vrednosti delnic, itd.

GLXO LN Gbp ↑ 1688 -13 L 5s L 1686/1689 L Trd Equity OCM												
At 12:50 Vol: 854,194 Op: 1694 L Hi: 1703 L Lo: 1686 L Prev: 1701												
OPTION MONITOR 3 COMP Center: 1687 I <G> to Edit Spreadsheet												
BID	mASK	mLAST	mICHG	mLVBD	IVAS	BEST	DEBS	GABS	WEB5	THEO	7 DEC	
CALLS	Bid	Ask	Last	Net	Volat	Volat	Best	Best	Best	Best	Theo.	7 Day
	Price	Price	Trade	Change	Bid	Ask	Price	Price	Price	Price	Value	Decay
GLXOC199	1686.01689.01688.0	-13.0				1687						
1	1200	489.50404.50609.50unch	N.A.	69.97504.50	.942	.0003	.674494.094.6870					
2	1250	440.00455.00460.00unch	N.A.	63.58455.00	.936	.0003	.689444.924.6853					
3	1300	390.50405.50410.50unch	N.A.	57.38405.50	.928	.0004	.837396.334.6828					
4	1350	342.00357.00362.00unch	N.A.	52.29357.00	.915	.0005	.853348.724.6888					
5	1400	294.50309.50314.50unch	N.A.	48.07309.50	.895	.0007	1.018302.625.2385					
6	1450	249.00264.00268.50unch	29.45	45.11264.00	.864	.0008	1.194258.665.8316					
7	1500	203.00218.00224.00unch	30.67	42.27220.00	.823	.0011	1.538217.536.3538					
8	1600	125.00137.50136.00-6.00	29.86	37.59136.00	.706	.0017	2.013146.027.0423					
9	1700	69.00 76.00 80.00unch	30.95	34.02 76.00	.516	.0020	2.28080.9567.4785					
10	1800	32.00 38.00 40.00unch	30.62	33.12 37.00	.319	.0019	2.00552.7136.2390					
11	1900	16.00 20.00 21.50unch	32.84	35.47 20.00	.190	.0013	1.55228.3864.8611					
12	2000	6.00 9.00 9.00unch	32.53	35.83 9.00	.099	.0008	1.04114.2732.9660					
13	2100	2.00 4.00 3.50unch	32.32	36.52 3.50	.044	.0005	.581 6.7281.4568					
14	2200	2.00 1.00unch	N.A.	38.08 1.00	.015	.0002	.232 2.968 .5272					
15	2300	1.50 .50unch	N.A.	41.58 -.50	.008	.0001	.132 1.262 .2929					
16	2400	1.00 .50unch	N.A.	43.98 -.50	.007	.0001	.126 .502 .2977					
17	2500	1.00 .50unch	N.A.	48.40 .50	.007	.0001	.101 .195 .3010					

Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt: 159-920410 London: 171-330-7600 New York: 212-314-2000

Princeton: 609-479-3000 Singapore: 229-3000 Sydney: 02-8777-0886 Tokyo: 3-3201-8890 Hong Kong: 852-2574-414-0 08-Sep-99 11:50:14



Figure 2.4 Prices for Glaxo-Wellcome calls expiring in October. Source: Bloomberg L.P.

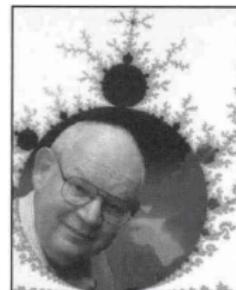
Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- Ni arbitraže, trg je učinkovit.
- Možno je kupiti poljuben del premoženja.
- Ni transakcijskih stroškov.

Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- Ni arbitraže, trg je učinkovit.
- Možno je kupiti poljuben del premoženja.
- Ni transakcijskih stroškov.

Kritiki modela, npr. Benoit Mandelbrot.



Kaj je arbitraža?

- Na kratko, **arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev.

Na primer:

- Nakupni tečaj za tujo valuto je višji od prodajnega.

Kaj je arbitraža?

- Na kratko, **arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev.

Na primer:

- Nakupni tečaj za tujo valuto je višji od prodajnega.
- Vrednosti nakupne in prodajne opcije sta povezani:

$$N + Ee^{-rT} = P + V.$$

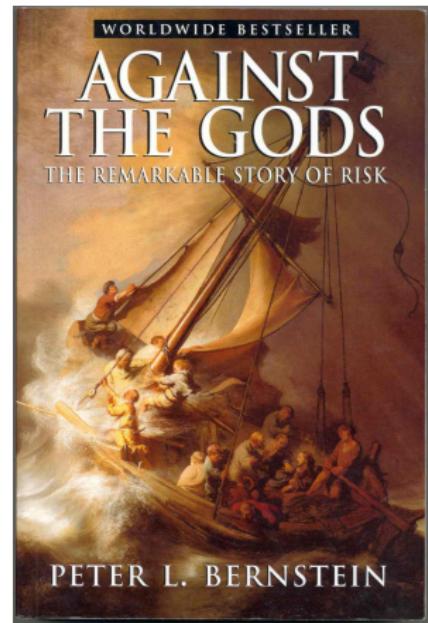
(N - vrednost nakupne opcijskega kontrakta, P - vrednost prodajne opcijskega kontrakta, V - vrednost delnice v času 0, E - vrednost ob zapadlosti, r - bančna obrestna mera.)

Finančni inštrumenti 2

- Določeni (osnovni) finančni inštrumenti, ki dosegajo dovolj veliko likvidnost, tvorijo *trg*. Trgovanje s temi inštrumenti je redno in njihove cene so znane in realne, to je, ob vsakem času jih lahko kupimo ali prodamo po navedeni ceni. Za druge finančne inštrumente velja, da se lahko prodajajo in kupujejo, vendar moramo najti kupca, oziroma prodajalca. Njihova cena ni javna.
- Kako vrednotiti te inštrumente? V današnjem svetu je najboljše vrednotenje glede na trg (marked-to-market). To nam da dobro referenco za začetek trgovanja.
- Primeri bazičnih inštrumentov so delnice, zakladne menice, osnovne opcije, ...

Uporaba modela

- za vrednotenje finančnih produktov
- za upravljanje tveganj
- oblikovanje in upravljanje porfeljev
- oblikovanje novih finančnih produktov



Vrednotenje

- Vsak finančni inštrument ima svojo sedanjo vrednost.
- Zahteva regulatorjev finančnega trga je, da mora finančna inštitucija za vse finančne produkte podati **realno vrednost** (fair value, real value). (Basel II, Solvency 2)

Basel II

- Druga baselska pogodba, ki jo je pripravil Baselski komite za nadzor bančništva.
- Zaščita svetovnega finančnega trga pred finančnimi tveganji.
- Stroga pravila za upravljanje s tveganji in kapitalom.
- Ustvariti enotne mednarodne standarde za bančne rezerve, ki jih morajo imeti banke za zaščito pred tveganji.

Basel II

- Druga baselska pogodba, ki jo je pripravil Baselski komite za nadzor bančništva.
- Zaščita svetovnega finančnega trga pred finančnimi tveganji.
- Stroga pravila za upravljanje s tveganji in kapitalom.
- Ustvariti enotne mednarodne standarde za bančne rezerve, ki jih morajo imeti banke za zaščito pred tveganji.

Solvency 2 je evropska pobuda za zaščito zavarovalniškega trga pred tveganji.

Primer vrednotenja iz zavarovalništva

- Večje število posameznikov izpostavljeni istemu tveganju, ki jim povzroči določeno škodo. Potencialna škoda, ki jo utrpi posameznik i , naj bo X_i . Skupna škoda, ki jo utrpijo vsi posameniki je

$$\sum_{i=1}^N X_i.$$

- Povprečna škoda

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

je potem dober približek za pričakovano škodo vsakega posameznika, kar nam pove Zakon velikih števil.

Vrednotenje opcij

- Black-Scholesova diferencialna enačba:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

V - vrednost opcijskega kontraktu, S - vrednost delnice, σ^2 - disperzija za delnico S

Vrednotenje opcij

- Black-Scholesova diferencialna enačba:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

V - vrednost opcijskega kontraktu, S - vrednost delnice, σ^2 - disperzija za delnico S

- Spominja na toplotno enačbo - tudi fiziki med finančnimi matematiki

Vrednotenje opcij 2

Black-Scholesova formula za evropsko nakupno opcijo:

$$C(S, t) = S \Phi(d_1) - E e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

kjer je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$d_1 = \frac{\log S - \log E + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Orodja iz teorije verjetnosti

- slučajni procesi, Winerjev proces, Brownovo gibanje,
- Itov integralski račun, Itove formule,
- metode Monte-Carlo.

Druga orodja

- numerične metode,
- iz matematične analize - diferencialne enačbe, iskanje negibnih točk...
- iz kombinatorike in diskretne matematike,
- iz teorije iger, itd.

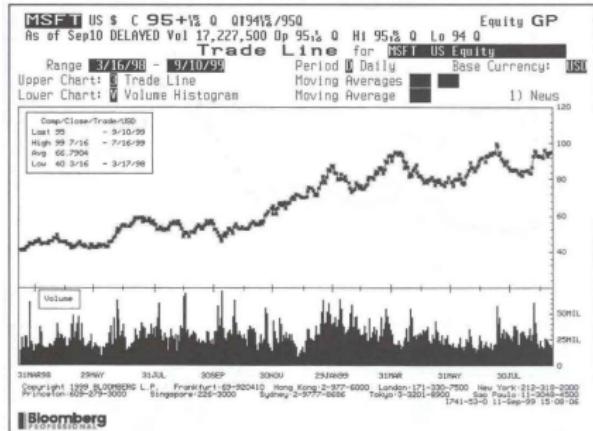


Figure 3.1 Price and volume. Source: Bloomberg L.P.

Povzemimo:

- Številne finančne inštitucije in podjetja v zahodnem svetu ičšejo doktorje matematike (in tudi fizike) ki so pripravljeni delovati na področju finančne matematike. To so zelo dobro plačani kadri.

Povzemimo:

- Številne finančne inštitucije in podjetja v zahodnem svetu ičšejo doktorje matematike (in tudi fizike) ki so pripravljeni delovati na področju finančne matematike. To so zelo dobro plačani kadri.
- Vloga finančnih matematikov v poslovнем svetu je v pripravi novih finančnih produktov, upravljanju s tveganji, vrednotenju finančnih produktov, pripravi ustreznih algoritmov in metod za izračune potrebne pri tem, itd.

Povzemimo:

- Številne finančne inštitucije in podjetja v zahodnem svetu ičšejo doktorje matematike (in tudi fizike) ki so pripravljeni delovati na področju finančne matematike. To so zelo dobro plačani kadri.
- Vloga finančnih matematikov v poslovнем svetu je v pripravi novih finančnih produktov, upravljanju s tveganji, vrednotenju finančnih produktov, pripravi ustreznih algoritmov in metod za izračune potrebne pri tem, itd.
- Finančni matematiki v akademskem svetu se tudi ukvarjajo s tem, poleg tega pa tudi s temeljnimi matematičnimi raziskavami.

Študij finančne matematike

- V oktobru začnemo s študijskim programom Finančna matematika na FMF.

Študij finančne matematike

- V oktobru začnemo s študijskim programom Finančna matematika na FMF.
- Zastavljen tako, da študent čim prej spozna ožja področja pomembna v financah in širše v ekonomiji.

Študij finančne matematike

- V oktobru začnemo s študijskim programom Finančna matematika na FMF.
- Zastavljen tako, da študent čimprej spozna ožja področja pomembna v financah in širše v ekonomiji.
- Program narejen po vzoru sorodnih programov v Srednji Evropi in drugod.

Študij finančne matematike

- V oktobru začnemo s študijskim programom Finančna matematika na FMF.
- Zastavljen tako, da študent čimprej spozna ožja področja pomembna v financah in širše v ekonomiji.
- Program narejen po vzoru sorodnih programov v Srednji Evropi in drugod.
- Predvideno sodelovanje z matematiki iz Trsta, Zagreba in Dunaja.

Študij finančne matematike

- V oktobru začnemo s študijskim programom Finančna matematika na FMF.
- Zastavljen tako, da študent čimprej spozna ožja področja pomembna v financah in širše v ekonomiji.
- Program narejen po vzoru sorodnih programov v Srednji Evropi in drugod.
- Predvideno sodelovanje z matematiki iz Trsta, Zagreba in Dunaja.
- Pomembna komponenta študija je tudi sodelovanje s finančnim sektorjem v Sloveniji.

Literatura

- 1 Peter Bernstein: *Against the Gods*, Wiley, 1996
- 2 M. Davis, A. Ethridge: *Louis Bachelier's Theory of Speculation*, Princeton University Press, 2006
- 3 Emanuel Derman: *My Life as a Quant*, Wiley, 2004
- 4 Desmond J. Highman: *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge University Press, 2004
- 5 Benoit Mandelbrot: *The (mis)Behavior of Markets*, Basic Books, 2004
- 6 Perry Mehrling: *Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance*, Wiley, 2005
- 7 Leo Melamed: *Escape to Futures*, Wiley, 1996
- 8 William Poundstone: *Fortune's Formula*, Hill & Wang, 2005
- 9 Paul Wilmott: *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, Wiley, 2001

Nekaj spletnih strani

- ① <http://finance.yahoo.com/>
- ② <http://www.wilmott.com/>
- ③ <http://www.outbacksoftware.com/finEngineer/financialEngineering.html>
- ④ <http://www.bloomberg.com/index.html?Intro=intro3>
- ⑤ <http://www.risk.net/>
- ⑥ <http://www.global-derivatives.com/>