# Matematika v ozadju družabne igre Riziko

Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, februar 2011

# Predstavitev igre

Riziko je strateška namizna igra za 3-5 igralcev.

# Predstavitev igre

Riziko je strateška namizna igra za 3-5 igralcev.


Zemlja je razdeljena na 6 kontinentov, ti pa na 42 ozemelj.
Cilj igre je osvojiti čimveč ozemelj (in zavladati svetu).

Najprej pripravimo začetno postavitev igralne plošče in razdelimo ciljne karte.

Najprej pripravimo začetno postavitev igralne plošče in razdelimo ciljne karte.
Igralčeva poteza je sestavljena iz naslednjih korakov:

- okrepitve,

Najprej pripravimo začetno postavitev igralne plošče in razdelimo ciljne karte.
Igralčeva poteza je sestavljena iz naslednjih korakov:

- okrepitve,
- napad,

Najprej pripravimo začetno postavitev igralne plošče in razdelimo ciljne karte.
Igralčeva poteza je sestavljena iz naslednjih korakov:

- okrepitve,
- napad,
- manevriranje.

Igralec poskuša z napadom osvojiti sosednje ozemlje. Uporabi lahko 1, 2 ali 3 enote (1 enota vedno ostane na ozemlju). Branilec se lahko brani z 1 ali 2 enotama.

Igralec poskuša z napadom osvojiti sosednje ozemlje. Uporabi lahko 1, 2 ali 3 enote (1 enota vedno ostane na ozemlju). Branilec se lahko brani z 1 ali 2 enotama.

Vsak vrže toliko kock, kolikor enot izbere za spopad.

Igralec poskuša z napadom osvojiti sosednje ozemlje. Uporabi lahko 1, 2 ali 3 enote (1 enota vedno ostane na ozemlju). Branilec se lahko brani z 1 ali 2 enotama.

Vsak vrže toliko kock, kolikor enot izbere za spopad.

Igralca primerjata najvišja izida. Napadalec izgubi eno enoto, če ne doseže večjega števila pik kot branilec. Sicer branilec izgubi eno enoto.
Če sta oba metala vsaj dve kocki, na enak način primerjata še preostale izide.

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:

Napadalec vrže: ⚀

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:
Napadalec vrže: ⚀ ⚅

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:
Napadalec vrže: ⚀ ⚅ ⚃.

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:

Napadalec vrže: ⚀ ⚅ ⚃.

Branilec vrže: ⚂

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:

Napadalec vrže: ⚀ ⚅ ⚃.

Branilec vrže: ⚂ ⚅.

Denimo, da napadalec napada s tremi enotami, branilec pa se brani z dvema:

Napadalec vrže: ⚀ ⚅ ⚃.

Branilec vrže: ⚂ ⚅.

Vsak izgubi eno enoto.

# Osnovne verjetnosti

Če vsak meče eno kocko, je branilčeva zmaga verjetnejša od poraza

# Osnovne verjetnosti

Če vsak meče eno kocko, je branilčeva zmaga verjetnejša od poraza($\frac{21}{36}$).

# Osnovne verjetnosti

Če vsak meče eno kocko, je branilčeva zmaga verjetnejša od poraza($\frac{21}{36}$).
Če napadalec meče 3 kocke, označimo izide z $Y_1$, $Y_2$ in $Y_3$.
Če napadalec meče 2 kocki, označimo izida z $W_1$ in $W_2$.
Če branilec meče 2 kocki, označimo izida z $Z_1$ in $Z_2$.
Vse te slučajne spremenljivke so diskretne in enakomerno porazdeljene na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

# Osnovne verjetnosti

Če vsak meče eno kocko, je branilčeva zmaga verjetnejša od poraza($\frac{21}{36}$).
Če napadalec meče 3 kocke, označimo izide z $Y_1$, $Y_2$ in $Y_3$.
Če napadalec meče 2 kocki, označimo izida z $W_1$ in $W_2$.
Če branilec meče 2 kocki, označimo izida z $Z_1$ in $Z_2$.
Vse te slučajne spremenljivke so diskretne in enakomerno porazdeljene na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Njihove izide uredimo po velikosti in dobimo *vrstilne statistike*: $Y^{(1)} \geq Y^{(2)} \geq Y^{(3)}$, $W^{(1)} \geq W^{(2)}$ in $Z^{(1)} \geq Z^{(2)}$.

$$P(Z^{(1)} = i, Z^{(2)} = j) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{36} & i = j \\ \frac{2}{36} & i > j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Z^{(1)}=i, Z^{(2)}=j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & i=j \\ \frac{2}{36} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j, Y^{(3)}=k) = \begin{cases} \frac{1}{216} & i=j=k \\ \frac{3}{216} & i=j>k \\ \frac{3}{216} & i>j=k \\ \frac{6}{216} & i>j>k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Z^{(1)}=i, Z^{(2)}=j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & i=j \\ \frac{2}{36} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j, Y^{(3)}=k) = \begin{cases} \frac{1}{216} & i=j=k \\ \frac{3}{216} & i=j>k \\ \frac{3}{216} & i>j=k \\ \frac{6}{216} & i>j>k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Z^{(1)}=i) = \frac{2i-1}{36}.$$

$$P(Z^{(1)}=i, Z^{(2)}=j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & i=j \\ \frac{2}{36} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j, Y^{(3)}=k) = \begin{cases} \frac{1}{216} & i=j=k \\ \frac{3}{216} & i=j>k \\ \frac{3}{216} & i>j=k \\ \frac{6}{216} & i>j>k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$P(Z^{(1)}=i) = \frac{2i-1}{36}.$$

$$P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j) = \begin{cases} \frac{3i-2}{216} & i=j \\ \frac{6j-3}{216} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
P(Z^{(1)}=i, Z^{(2)}=j) &= \begin{cases} \frac{1}{36} & i=j \\ \frac{2}{36} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases} \\
P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j, Y^{(3)}=k) &= \begin{cases} \frac{1}{216} & i=j=k \\ \frac{3}{216} & i=j>k \\ \frac{3}{216} & i>j=k \\ \frac{6}{216} & i>j>k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases} \\
P(Z^{(1)}=i) &= \frac{2i-1}{36}. \\
P(Y^{(1)}=i, Y^{(2)}=j) &= \begin{cases} \frac{3i-2}{216} & i=j \\ \frac{6j-3}{216} & i>j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases} \\
P(Y^{(1)}=i) &= \frac{3i^2-3i+1}{216}.
\end{aligned}
$$

Označimo s $\pi_{ijk}$ verjetnost, da branilec izgubi $k$ enot, če vrže $j$ kock, napadalec pa $i$ kock.

| i | j | Dogodek | Simbol | Verjetnost |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Branilec izgubi 1 enoto | $\pi_{111}$ | $0,417$ |
| 1 | 2 | Branilec izgubi 1 enoto | $\pi_{121}$ | $0,255$ |
| 2 | 1 | Branilec izgubi 1 enoto | $\pi_{211}$ | $0,579$ |
| 2 | 2 | Branilec izgubi 2 enoti | $\pi_{222}$ | $0,228$ |
| 2 | 2 | Oba izgubita 1 enoto | $\pi_{221}$ | $0,324$ |
| 3 | 1 | Branilec izgubi 1 enoto | $\pi_{311}$ | $0,660$ |
| 3 | 2 | Branilec izgubi 2 enoti | $\pi_{322}$ | $0,372$ |
| 3 | 2 | Oba izgubita 1 enoto | $\pi_{321}$ | $0,336$ |

Matematično bomo analizirali napad na sosednje ozemlje.

Matematično bomo analizirali napad na sosednje ozemlje.

Na osnovi zgornje tabele sklepamo, da tako branilec kot napadalec maksimizirata verjetnost zmage, če mečeta največ kock, kolikor je mogoče.

Matematično bomo analizirali napad na sosednje ozemlje.

Na osnovi zgornje tabele sklepamo, da tako branilec kot napadalec maksimizirata verjetnost zmage, če mečeta največ kock, kolikor je mogoče.

Privzeli bomo, da napadalec napada, dokler ne osvoji, ali izgubi ozemlja.

Igralec začne igrati ruleto z 10 €. Vedno stavi 1 € na rdeče polje. Če zmaga, dobi 1 €, sicer ga izgubi.

Igralec začne igrati ruleto z 10 €. Vedno stavi 1 € na rdeče polje. Če zmaga, dobi 1 €, sicer ga izgubi.

Količina denarja na naslednjem koraku je odvisna samo od količine denarja na prejšnjem koraku.

Igralec začne igrati ruleto z 10 €. Vedno stavi 1 € na rdeče polje. Če zmaga, dobi 1 €, sicer ga izgubi.

Količina denarja na naslednjem koraku je odvisna samo od količine denarja na prejšnjem koraku.
Če je $j > 0$, velja

$$P(X_n = i | X_{n-1} = j) = \begin{cases} \frac{18}{37} & i = j + 1 \\ \frac{19}{37} & i = j - 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Igralec začne igrati ruleto z 10 €. Vedno stavi 1 € na rdeče polje. Če zmaga, dobi 1 €, sicer ga izgubi.

Količina denarja na naslednjem koraku je odvisna samo od količine denarja na prejšnjem koraku.
Če je $j > 0$, velja

$$P(X_n = i | X_{n-1} = j) = \begin{cases} \frac{18}{37} & i = j+1 \\ \frac{19}{37} & i = j-1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sicer je

$$P(X_n = i | X_{n-1} = 0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Igralec začne igrati ruleto z 10 €. Vedno stavi 1 € na rdeče polje. Če zmaga, dobi 1 €, sicer ga izgubi.

Količina denarja na naslednjem koraku je odvisna samo od količine denarja na prejšnjem koraku.
Če je $j > 0$, velja

$$P(X_n = i | X_{n-1} = j) = \begin{cases} \frac{18}{37} & i = j + 1 \\ \frac{19}{37} & i = j - 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sicer je

$$P(X_n = i | X_{n-1} = 0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Stanje 0 imenujemo *absorbirajoče*, ker z verjetnostjo 1 ostanemo v tem stanju. Druga stanja so *prehodna*.

# Markovske verige

Naj bo $S$ končna ali neskončna množica, ki jo imenujemo *množica stanj*, njene elemente pa *stanja*.

# Markovske verige

Naj bo $S$ končna ali neskončna množica, ki jo imenujemo *množica stanj*, njene elemente pa *stanja*.
*Slučajni proces* je vsako zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk $X_1$, $X_2, \ldots$, katerih zaloga vrednosti leži v $S$.

# Markovske verige

Naj bo $S$ končna ali neskončna množica, ki jo imenujemo *množica stanj*, njene elemente pa *stanja*.
*Slučajni proces* je vsako zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$, katerih zaloga vrednosti leži v $S$.
Slučajni proces ima *markovsko lastnost*, če velja

$$P(X_n = s_n | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}).$$

Imenujemo ga *markovska veriga*.

Verjetnosti prehodov med stanji imenujemo *prehodne verjetnosti*. Če niso odvisne od koraka, pravimo, da je markovska veriga *homogena*. Označimo s $p_{ij}^m$ verjetnost, da iz stanja $i$ pridemo v stanje $j$ v $m$ časovnih korakih. Prehodne verjetnosti zložimo v prehodno matriko $P_m = [p_{ij}^m]$.

Verjetnosti prehodov med stanji imenujemo *prehodne verjetnosti*. Če niso odvisne od koraka, pravimo, da je markovska veriga *homogena*. Označimo s $p_{ij}^m$ verjetnost, da iz stanja $i$ pridemo v stanje $j$ v $m$ časovnih korakih. Prehodne verjetnosti zložimo v prehodno matriko $P_m = [p_{ij}^m]$.

$$\text{Ker je } p_{ij}^2 = \sum_{k \in S} p_{ik}^1 p_{kj}^1, \text{ je } P_m = P^m.$$

Označimo z $N$ število napadalčevih in z $B$ število branilčevih enot, ki sodelujejo v napadu.
Množica stanj je $S = \{(n,b); 0 \leq n \leq N, 0 \leq b \leq B\} \setminus \{(0,0)\}$.
$X_0 = (N,B)$ je začetno stanje, $X_m = (n_m, b_m)$ stanje po $m$ časovnih korakih. $X_m$ je homogena markovska veriga z množico stanj $S$.

Označimo z $N$ število napadalčevih in z $B$ število branilčevih enot, ki sodelujejo v napadu.
Množica stanj je $S = \{(n, b); 0 \leq n \leq N, 0 \leq b \leq B\} \setminus \{(0, 0)\}$.
$X_0 = (N, B)$ je začetno stanje, $X_m = (n_m, b_m)$ stanje po $m$ časovnih korakih. $X_m$ je homogena markovska veriga z množico stanj $S$.

Napad se konča, ko je ena od komponent v paru $X_m$, ničelna. Če je $X_m = (0, b_m)$, je zmagal branilec, sicer je zmagal napadalec. Stanja $(n, b)$ so prehodna, stanja $(n, 0)$ in $(0, b)$ pa absorbirajoča ($n > 0$, $b > 0$).

Da bi zapisali prehodno matriko, prostor stanj uredimo

$$\{(1,1),(1,2),\dots,(1,B),(2,1),(2,2),\dots,(2,B),\dots,(N,1),$$

$$(N,2),\dots,(N,B),(0,1),(0,2),\dots,(0,B),(1,0),(2,0),\dots,(N,0)\}.$$

Da bi zapisali prehodno matriko, prostor stanj uredimo

$$\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,B),(2,1),(2,2),\ldots,(2,B),\ldots,(N,1),$$

$$(N,2),\ldots,(N,B),(0,1),(0,2),\ldots,(0,B),(1,0),(2,0),\ldots,(N,0)\}.$$

Prehodno matriko lahko zapišemo bločno

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

kjer je $Q$ matrika verjetnosti prehodov med prehodnimi stanji, $R$ matrika verjetnosti prehodov iz prehodnih v absorbirajoča stanja.

Označimo s $f_{ij}^{m}$ verjetnost, da iz $i$. prehodnega stanja pridemo v $j$. absorbirajoče stanje v $m$. časovnem koraku. Verjetnosti zložimo v matriko $F^{(m)} = [f_{ij}^{m}]$.

Označimo s $f_{ij}^m$ verjetnost, da iz $i$. prehodnega stanja pridemo v $j$. absorbirajoče stanje v $m$. časovnem koraku. Verjetnosti zložimo v matriko $F^{(m)} = [f_{ij}^m]$.

$$F^{(m)} = Q^{m-1}R$$

Označimo s $f_{ij}^m$ verjetnost, da iz $i$. prehodnega stanja pridemo v $j$. absorbirajoče stanje v $m$. časovnem koraku. Verjetnosti zložimo v matriko $F^{(m)} = [f_{ij}^m]$.

$$F^{(m)} = Q^{m-1}R$$

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} F^{(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} Q^{m-1}R = (I - Q)^{-1}R$$

Označimo s $f_{ij}^m$ verjetnost, da iz $i$. prehodnega stanja pridemo v $j$. absorbirajoče stanje v $m$. časovnem koraku. Verjetnosti zložimo v matriko $F^{(m)} = [f_{ij}^m]$.

$$F^{(m)} = Q^{m-1}R$$

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} F^{(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} Q^{m-1}R = (I-Q)^{-1}R$$

Branilec zmaga, če smo končali v enem od prvih $B$ absorbirajočih stanj. Zato verjetnost za branilčevo zmago izračunamo tako, da seštejemo prvih $B$ stolpcev v matriki $F$.

Tabela: Verjetnosti, da napadalec zmaga

| B / N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,42 | 0,11 | 0,03 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 2 | 0,75 | 0,36 | 0,21 | 0,09 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |
| 3 | 0,92 | 0,66 | 0,47 | 0,32 | 0,21 | 0,13 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,02 |
| 4 | 0,97 | 0,79 | 0,64 | 0,48 | 0,36 | 0,25 | 0,18 | 0,12 | 0,09 | 0,06 |
| 5 | 0,99 | 0,89 | 0,77 | 0,64 | 0,51 | 0,40 | 0,30 | 0,22 | 0,16 | 0,12 |
| 6 | 1,00 | 0,93 | 0,86 | 0,75 | 0,64 | 0,52 | 0,42 | 0,33 | 0,26 | 0,19 |
| 7 | 1,00 | 0,97 | 0,91 | 0,83 | 0,74 | 0,64 | 0,54 | 0,45 | 0,36 | 0,29 |
| 8 | 1,00 | 0,98 | 0,95 | 0,89 | 0,82 | 0,73 | 0,64 | 0,55 | 0,46 | 0,38 |
| 9 | 1,00 | 0,99 | 0,97 | 0,93 | 0,87 | 0,81 | 0,73 | 0,65 | 0,56 | 0,48 |
| 10 | 1,00 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,92 | 0,86 | 0,80 | 0,72 | 0,65 | 0,57 |

| stanje | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (1,0) | (2,0) | (3,0) | (4,0) | (5,0) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| verjetnost, da končamo v danem absorbirajočem stanju | 0,068 | 0,134 | 0,124 | 0,104 | 0,064 | 0,049 | 0,096 | 0,147 | 0,124 | 0,091 |
| napadalčeva izguba | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| branilčeva izguba | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

| | |
|---|---|
| povprečna napadalčeva izguba | 3,372 |
| povprečna branilčeva izguba | 3,561 |

Grafi, na katerih so prikazane povprečne napadalčeve in branilčeve izgube, so objavljeni v članku
J. A. Osborne, *Markov Chains for the RISK Board Game Revisited*, Mathematics Magazine **76** (2003) 129—135, ki je dosegljiv na spletni strani
http://www4.stat.ncsu.edu/ jaosborn/research/RISK.pdf