



Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Emil Žagar

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Seminar za učitelje matematike v srednjih in osnovnih šolah

5. februar 2011



Slika: Jih poznate?



Slika: Kaj pa ta dva?



Slika: Tudi tega?



- 1 Ravninske parametrične krivulje
- 2 Ravninske Bézierove krivulje
- 3 de Casteljauov algoritem
- 4 Subdivizija
- 5 PH krivulje
- 6 PH krivulje v kompleksni ravnini



Funkcije (ene spremenljivke) dobro poznamo:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x).$$

Točka na **grafu** funkcije f je

$$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Kaj pa če sta obe komponenti na grafu funkciji iste spremenljivke (**parametra**) t :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}?$$

Predpis

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

je ravninska parametrična krivulja ali parametrizacija krivulje \mathbf{r} .
V več dimenzijah podobno:

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Če so **komponente polinomi**:

- **preprosta predstavljivost** (seznam koeficientov),
- **hitro računanje** (denimo Hornerjev algoritem).

Možen je zapis v **različnih bazah**:

- **standardna**:

$$\varphi_j(x) = x^j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

- **Newtonova**:

$$\varphi_0(x) = 1,$$

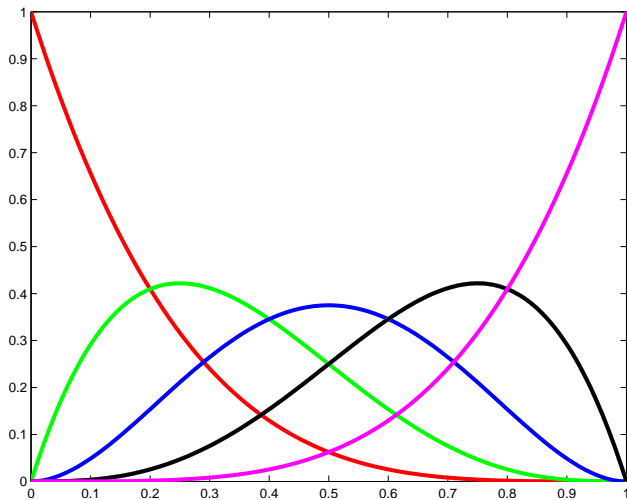
$$\varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n,$$

- **Bernsteinova**:

$$\varphi_j(x) = \binom{n}{j} x^j (1 - x)^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

- ...

- Vsaka baza ima svoje prednosti in pomanjkljivosti.
- Za računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (ang. Computer Aided Geometric Design, oz. na kratko CAGD) je pomembna predvsem Bernsteinova baza.
- Podobna področja so še CAD (Computer Aided Design), CAM (Computer Aided Manufacturing), CNC (Computer Numerical Control).



Slika: Bazni Bernsteinovi polinomi stopnje 4 (B_0^4 rdeče, B_1^4 zeleno, B_2^4 modro, B_3^4 črno in B_4^4 rožnato).



- Neodvisno jih v drugi polovici 20. stoletja razvijeta **P.E. Bézier¹** in **P. de Casteljaou²**.
- Temeljijo na **Bernsteinovi bazi** polinomov.
- Z razvojem računalnikov postanejo nesluteno uporabne.
- **Nepogrešljive v CAGD** (animacije; avtomobilska, ladijska in letalska industrija; . . .).
- **Posplošitve na ploskve in v več dimenzij.**

¹Pierre Étienne Bézier, 1910-1999, francoski razvojni inženir pri Renaultu.

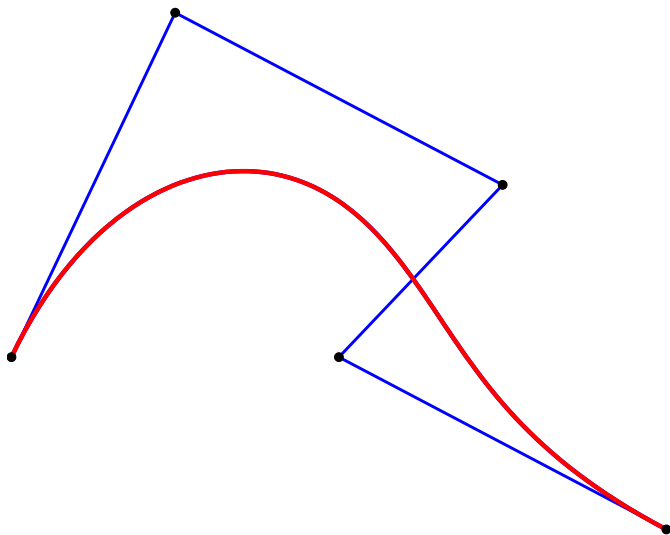
²Paul de Faget de Casteljaou, 1930-1999, francoski razvojni inženir pri Citroënu.

- Za izbrano zaporedje ravninskih točk $\{\mathbf{P}_j\}_{j=0}^n$ definiramo

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

kjer so B_j^n Bernsteinovi polinomi.

- Krivulji \mathbf{b} rečemo ravninska Bézierova krivulja.
- Točkam $\{\mathbf{P}_j\}_{j=0}^n$ pravimo kontrolne točke, poligonu, ki ga določajo, pa kontrolni poligon.



Slika: Bézierova krivulja stopnje 4 (rdeče) s kontrolnimi točkami (črno) in kontrolnim poligonom (modro).

Pomembne lastnosti:

- Prva in zadnja kontrolna točka sta interpolacijski,

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{b}(1) = \mathbf{P}_n.$$

- Tangentna vektorja v začetni in končni točki sta

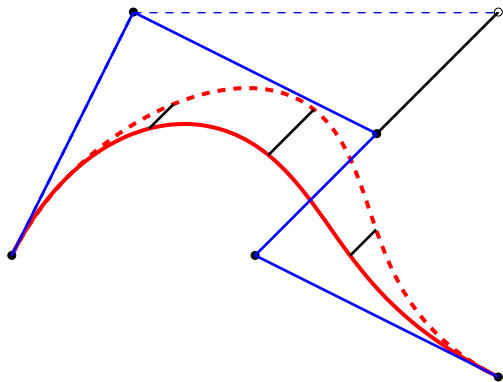
$$\mathbf{b}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{b}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}).$$

- Krivulja leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk.

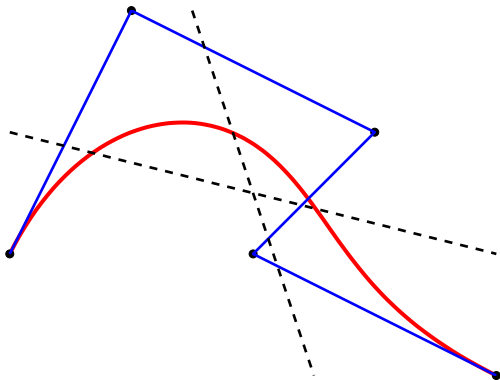
- Premik j -te kontrolne točke za vektor \mathbf{v} , premakne krivuljo za

$$B_j^n(t) \mathbf{v}.$$

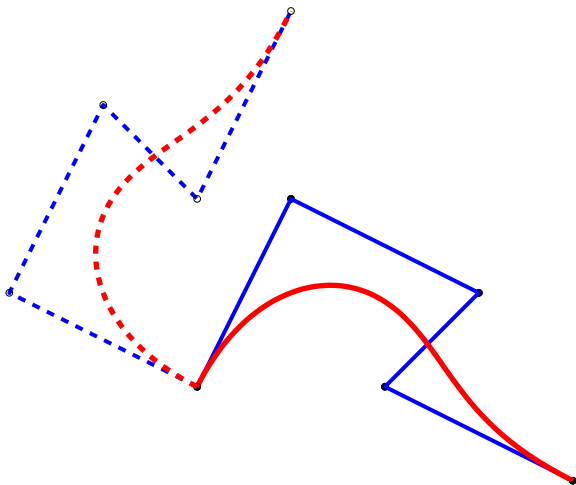
- Vsaka premica seka krivuljo **kvečjemu tolikokrat** kot kontrolni poligon.
- Krivulja je **afino invariantna** (uporabno denimo v PostScriptu).
- ...



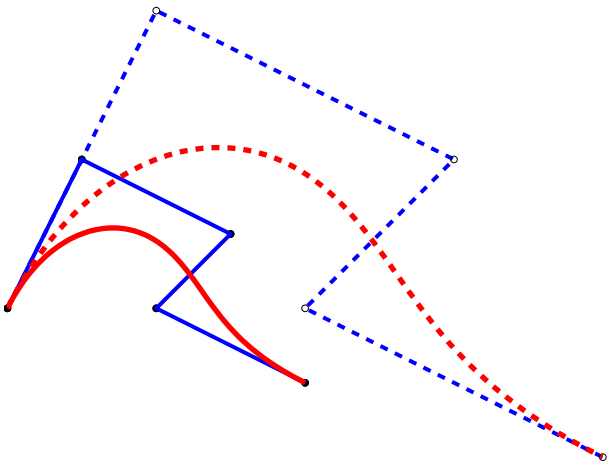
Slika: Premik tretje kontrolne točke Bézierove krivulje za vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Slika: Premica lahko seka krivuljo kvečjemu tolikokrat kot kontrolni poligon.



Slika: Rotacija Bézierove krivulje za 90° okrog prve kontrolne točke v pozitivni smeri.



Slika: Skaliranje Bézierove krivulje za faktor 2.

- Kako računati točke na Bézierovi krivulji?
- Neposredno: izberemo parameter $t \in [0, 1]$ in izračunamo

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t).$$

- Žal je časovno prezahtevno in nestabilno.
- Alternativa: de Casteljauov algoritem!



Primer: dane so kontrolne točke

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in parameter $t = 3/4$.

- 1. korak: definiramo $\mathbf{b}_j^0 := \mathbf{P}_j, j = 0, 1, 2, 3, 4$.
- 2. korak: izračunamo

$$\mathbf{b}_j^1 = (1 - t) \mathbf{b}_j^0 + t \mathbf{b}_{j+1}^0, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

torej

$$\mathbf{b}_0^1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1^1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2^1 = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

- 3. korak: **izračunamo**

$$\mathbf{b}_j^2 = (1 - t) \mathbf{b}_j^1 + t \mathbf{b}_{j+1}^1, \quad j = 0, 1, 2,$$

torej

$$\mathbf{b}_0^2 = \begin{pmatrix} 33/16 \\ 21/16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^2 = \begin{pmatrix} 37/16 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^2 = \begin{pmatrix} 51/16 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

- 4. korak: **izračunamo**

$$\mathbf{b}_j^3 = (1 - t) \mathbf{b}_j^2 + t \mathbf{b}_{j+1}^2, \quad j = 0, 1,$$

torej

$$\mathbf{b}_0^3 = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 45/64 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^3 = \begin{pmatrix} 95/32 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

- 5. korak: izračunamo

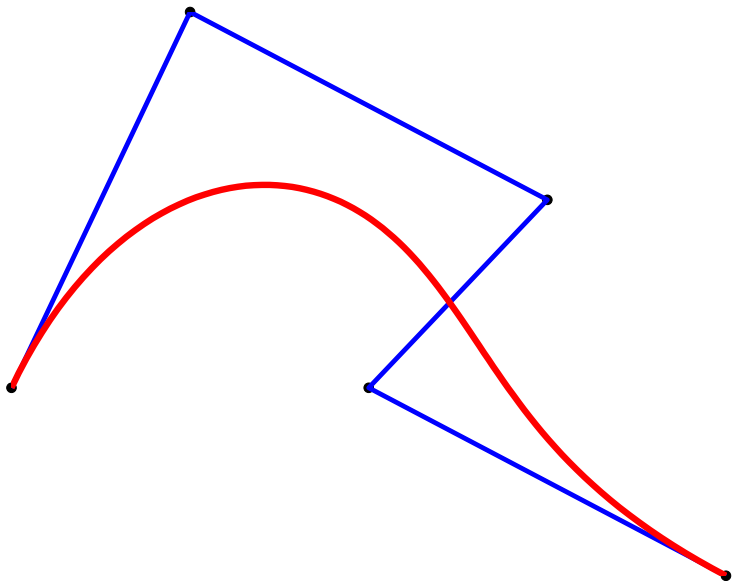
$$\mathbf{b}_j^4 = (1 - t) \mathbf{b}_j^3 + t \mathbf{b}_{j+1}^3, \quad j = 0,$$

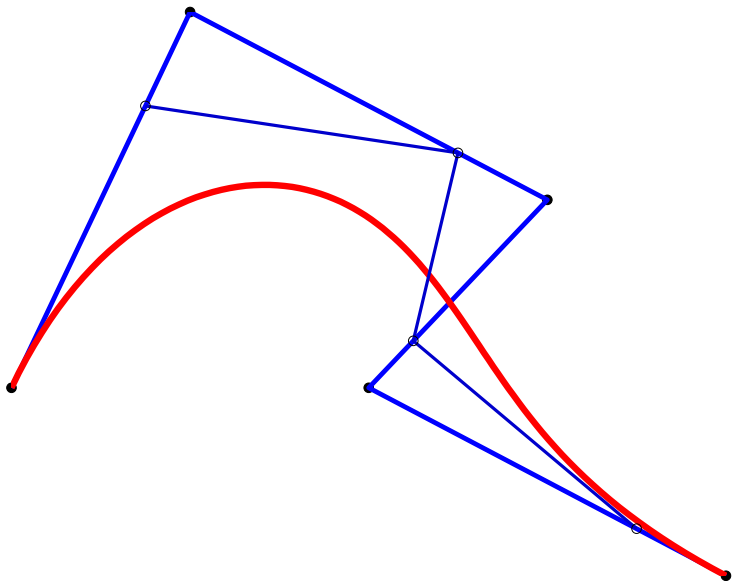
torej

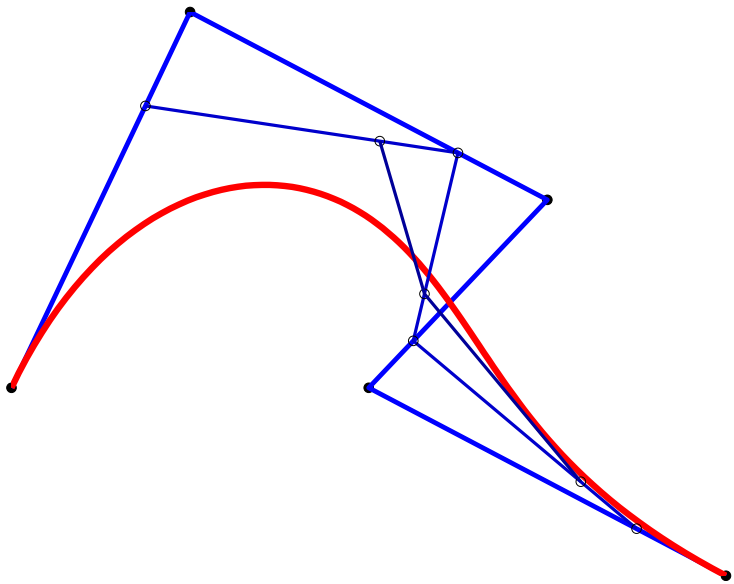
$$\mathbf{b}_0^4 = \begin{pmatrix} 357/128 \\ -3/256 \end{pmatrix}.$$

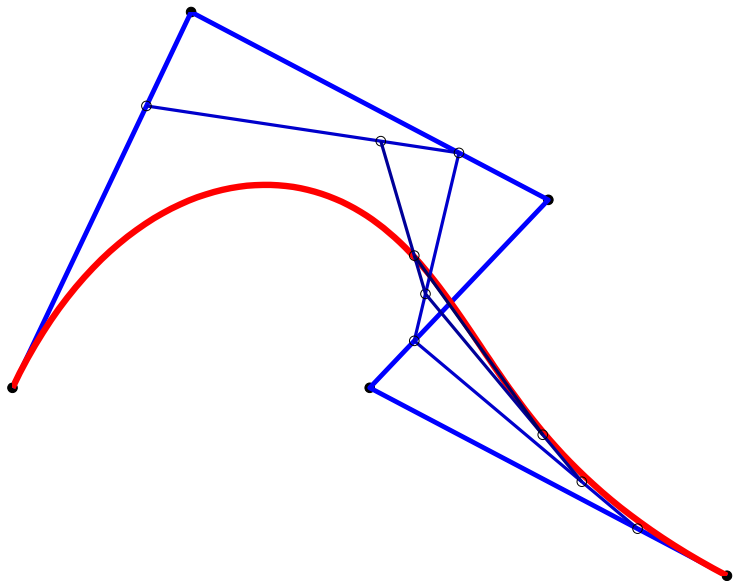
Velja:

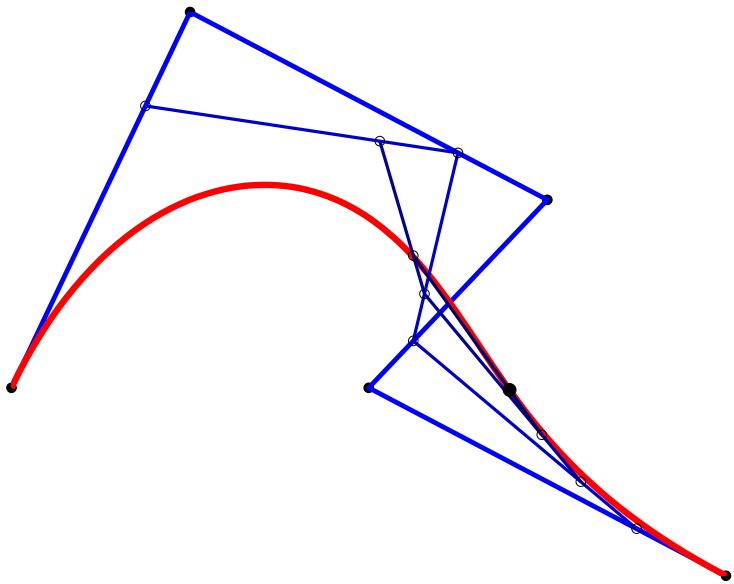
$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0^4.$$











Algoritem (de Casteljaou)

Podatki: $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ in $t \in [0, 1]$.

Definirajmo: $\mathbf{b}_j^0(t) = P_j, j = 0, 1, \dots, n$.

Ponavljajmo:

$$\mathbf{b}_j^k(t) = (1 - t) \mathbf{b}_j^{k-1} + t \mathbf{b}_{j+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ j = 0, 1, \dots, n - k.$$

Izhod: $\mathbf{b}_0^n(t)$ točka na Bézierovi krivulji pri parametru t .

- Tabela de Casteljaiovih točk se zapiše takole

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{b}_0^0 & & & & & \\
 \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_0^1 & & & & \\
 \mathbf{b}_2^0 & \mathbf{b}_1^1 & \cdots & & & \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{b}_0^{n-1} & & \\
 \mathbf{b}_n^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \cdots & \mathbf{b}_1^{n-1} & \mathbf{b}_0^n &
 \end{array}$$

- Za vse točke potrebujemo $(n + 1) \times (n + 1) \times 2$ prostora.
- Če želimo samo končno točko, je dovolj tabela dimenzije $(n + 1) \times 2$. Zakaj?

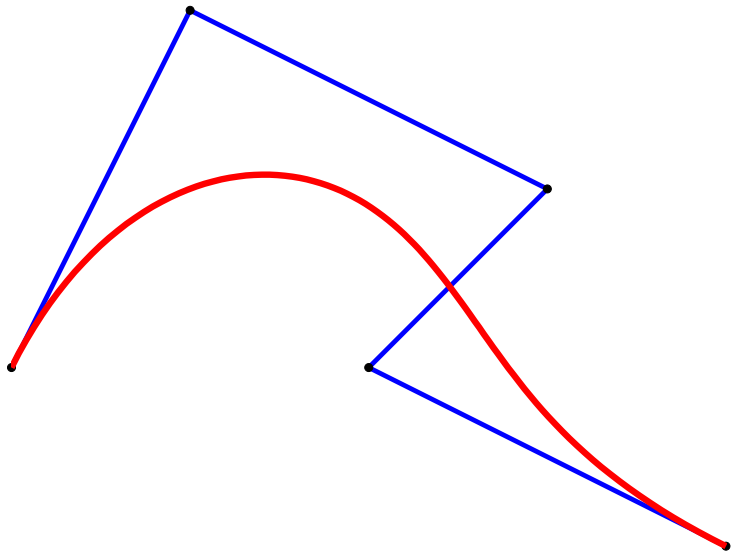


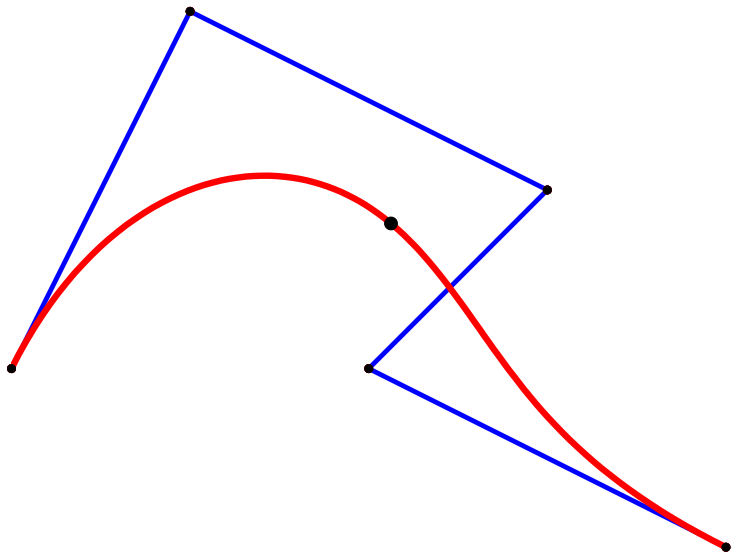
- de Casteljauov algoritem pa nudi še **veliko več**.
- Vmesne točke podajo dodatno informacijo o krivulji.
- Vemo, da je \mathbf{b}_0^n točka **na krivulji**, obenem pa dobimo še kontrolne točke dveh delov krivulje.

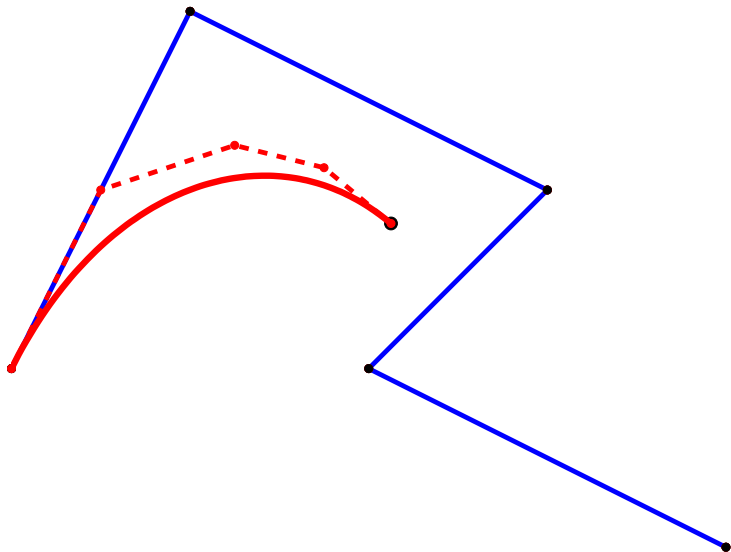
$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{b}_0^0 & & & & & & \\
 \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_0^1 & & & & & \\
 \mathbf{b}_2^0 & \mathbf{b}_1^1 & \cdots & & & & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & & \mathbf{b}_0^{n-1} & & \\
 \mathbf{b}_n^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \cdots & \mathbf{b}_1^{n-1} & \mathbf{b}_0^n & &
 \end{array}$$

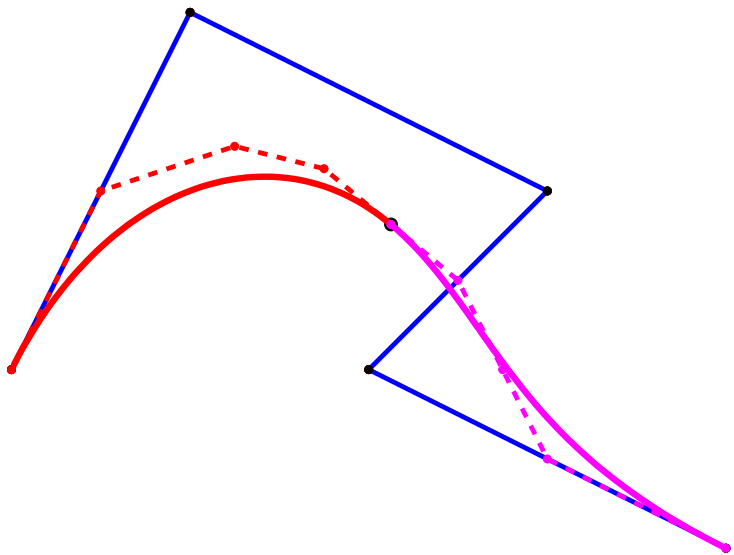
- Rdeče točke: kontrolne točke dela krivulje na eni strani točke \mathbf{b}_0^n .
- Rožnate točke: kontrolne točke na drugi strani te točke.

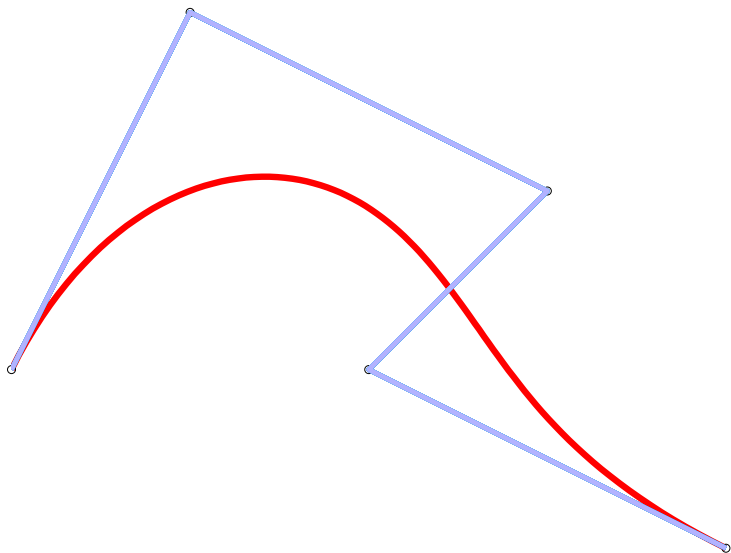
$t = 1/2$

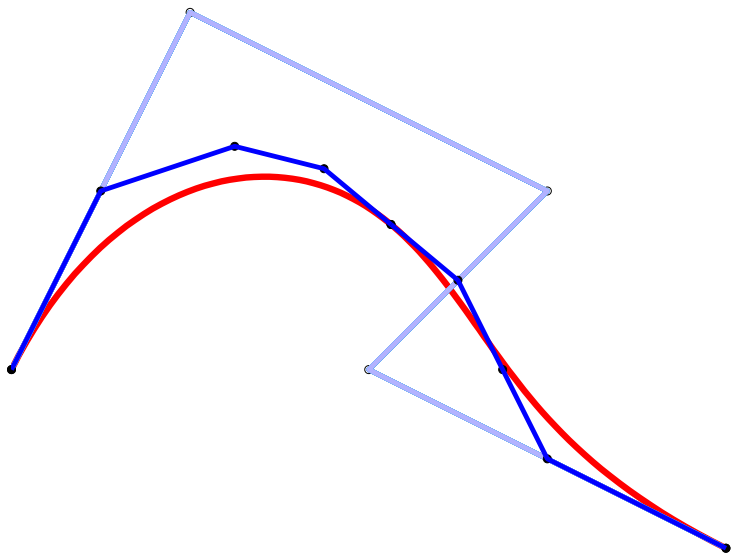


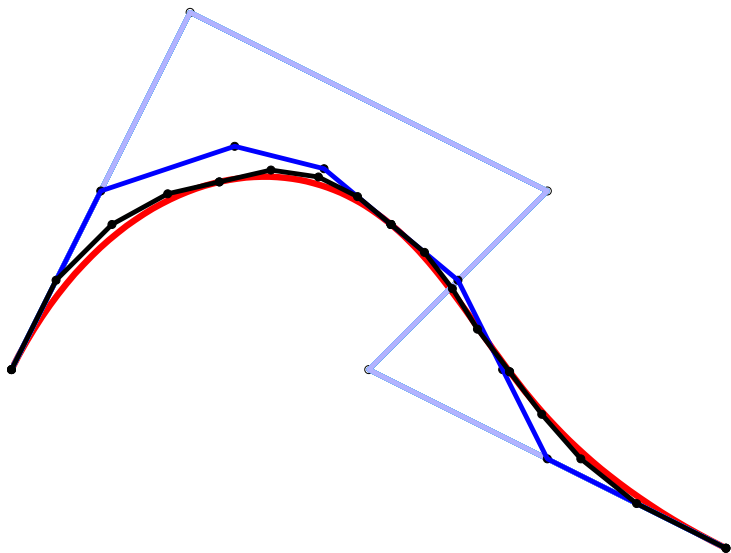














- Vrnimo se nazaj k $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

kjer sta

$$x(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad \text{in} \quad y(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$$

polinoma stopnje $\leq n$.

- **Hodograf** krivulje \mathbf{r} je vektorsko polje

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

- Krivulja \mathbf{r} ima **Pitagorejski hodograf**, če obstaja tak polinom σ , da je

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2.$$

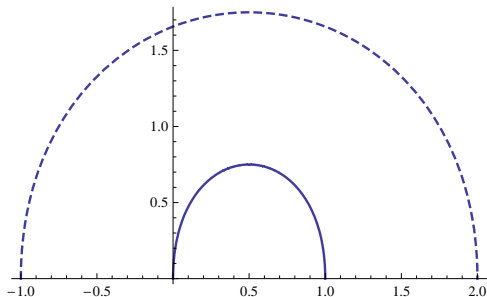
- Na kratko ji rečemo **PH** krivulja.

Krivulje s Pitagorejskim hodografom imajo vsaj dve pomembni lastnosti:

- $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |\sigma(t)|$.
- Odmik (ang. offset)

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t) + d \mathbf{n}(t),$$

kjer je $d > 0$ in $\mathbf{n}(t)$ enotska normala na \mathbf{r} v t , je racionalna krivulja.



Slika: Odmik (črtkano) parametrične krivulje s pitagorjeskim hodografom (polna črta).

Izrek (Kubota)

Trije realni polinomi a , b in c , za katere je $\max\{\deg a, \deg b\} = \deg c > 0$ zadoščajo *pitagorejskemu pogoju* $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ (do vrstnega reda) natanko tedaj, ko obstajajo taki realni polinomi u , v in w , da je

$$a(t) = w(t) (u^2(t) - v^2(t)),$$

$$b(t) = 2 w(t) u(t) v(t),$$

$$c(t) = w(t) (u^2(t) + v^2(t)).$$

- Predpostavimo lahko, da je $GCD(u, v) = 1$ ter da je w monični polinom z vodilnim koeficientom 1.

- $w = 0$ ali $u = v = 0$; PH krivulja r je točka,
- u, v in $w \neq 0$ so konstante ter vsaj eden od polinomov u ali v neničelna konstanta; PH krivulja je enakomerno parametrizirana daljica.
- u in v sta konstanti ($uv \neq 0$), w pa ni konstanta; PH krivulja je neenakomerno parametrizirana daljica (ali premica).
- $w = 0$ ter $u = \pm v$ ali vsaj eden od u, v ničelni polinom; PH krivulja je neenakomerno parametrizirana daljica.

Omejimo se na primer, ko je $u, v, w \neq 0$, u in v tuja in nista oba konstanti (tedaj je stopnja ≥ 3).

- Naenostavnejši primer PH krivulj: kubične krivulje, $w = 1$, $\max\{\deg u, \deg v\} = 1$.
- Zapišimo u in v v Bézierovi obliki

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t),$$

$$v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t),$$

kjer je

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k$$

ter predpostavimo $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.

- Kubično PH krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T = \sum_{k=0}^3 \mathbf{p}_k B_k^n(t)$$

z

$$x(t) = \int_0^t (u^2(t) - v^2(t)) dt,$$
$$y(t) = \int_0^t 2 u(t) v(t) dt.$$

Izrek

Kontrolne točke kubične Bézierove PH krivulje zadoščajo zvezam

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3} (u_0^2 - v_0^2, 2 u_0 v_0)^T,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} (u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0)^T,$$

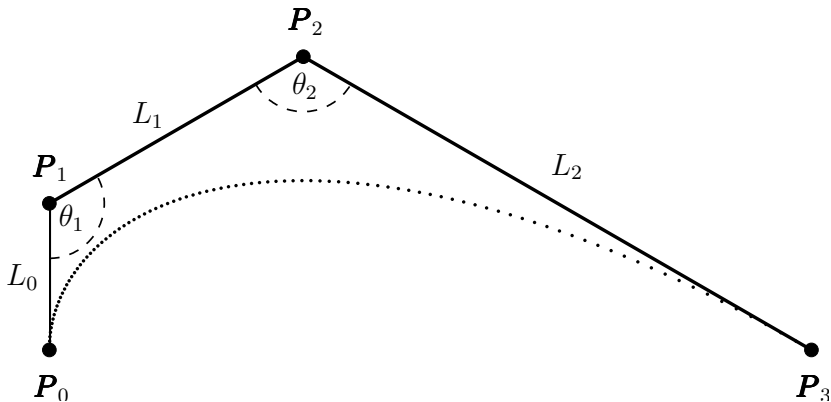
$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} (u_1^2 - v_1^2, 2 u_1 v_1)^T,$$

kjer je \mathbf{P}_0 poljubna kontrolna točka, ki ustreza konstantam pri integraciji.

Izrek

Naj bo r kubična Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami \mathbf{P}_k , $k = 0, \dots, 3$. Naj bo $L_i = \|\Delta \mathbf{P}_{i-1}\|$, $i = 1, 2, 3$ ter θ_1 in θ_2 kota med kontrolnima daljicama v točkah \mathbf{P}_1 in \mathbf{P}_2 . Potem je r PH krivulja natanko tedaj, ko je

$$L_2 = \sqrt{L_1 L_3} \quad \text{in} \quad \theta_1 = \theta_2.$$



Slika: Geometrijska karakterizacija kubične Bézierove krivulje s pitagorejskim hodograom.



- Pogoji za PH krivulje se močno poenostavijo, če na \mathbb{R}^2 gledamo kot na kompleksno ravnino:

$$(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + iy.$$

- Ravninska krivulja \mathbf{r} postane

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T \rightarrow \mathbf{z}(t) := x(t) + iy(t).$$

- Oznake:
 - $\hat{\Pi}$... regularne polinomske krivulje v \mathbb{R}^2 ,
 - $\hat{\Pi}$... regularne PH krivulje v \mathbb{R}^2 .

- Očitno

$$\hat{\Pi} \subset \Pi.$$

Vsebovanost je stroga, saj **obstajajo** regularne krivulje, ki **niso** PH krivulje, npr.

$$\mathbf{z}(t) = t + i t^2.$$

- Definirajmo $\mathcal{P} : \mathbf{z}(t) \rightarrow \hat{\mathbf{z}}(t)$ v treh korakih:
 - $\mathbf{w}(t) := \mathbf{z}'(t)$,
 - $\hat{\mathbf{w}}(t) := \mathbf{w}^2(t)$,
 - $\hat{\mathbf{z}}(t) := \int \hat{\mathbf{w}}(\tau) d\tau$.

Pri tem predpostavimo $\mathbf{z}(0) = \hat{\mathbf{z}}(0) = 0$.

beginframe

Izrek

Preslikava \mathcal{P} je *bijekcija* iz Π v $\hat{\Pi}$.

Opomba: Množici Π in $\hat{\Pi}$ imata isto kardinalnost.

Lema

Če je n stopnja krivulje \mathbf{z} in \hat{n} stopnja krivulje $\hat{\mathbf{z}}$, je

$$\hat{n} = 2n - 1.$$

Posledica: *Ni regularnih PH krivulj sode stopnje.*

Izrek

Kontrolne točke regularne PH krivulje \mathbf{z} so dane z naslednjo rekurzivno zvezo

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \frac{1}{2n-1} \sum_{j=\max\{0, k-n+1\}}^{\min\{k, n-1\}} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n-1}{k-j}}{\binom{2n-2}{k}} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-j},$$

$k = 0, 1, \dots, 2n-2$, kjer so $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ poljubni kontrolni vektorji hodografa \mathbf{w} , ki ne gre skozi izhodišče.

Primer

Naj bo $n = 2$. Tedaj so kontrolne točke kubične PH krivulje podane takole

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0^2,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0^2 \mathbf{w}_1,$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_1^2.$$

Pri tem mora veljati $\text{Im}(\overline{\mathbf{w}}_0 \mathbf{w}_1) \neq 0$.

Primer

Vzemimo polinomsko parametrično krivuljo

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ -3t^2 + 3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Norma njenega hodografa je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}'(t)\| &= \sqrt{9(2t^2 - 2t + 1)^2} = 3|2t^2 - 2t + 1| \\ &= 3(2t^2 - 2t + 1). \end{aligned}$$

Primer (nadaljevanje)

Dolžina loka kivolje se torej izraža kot

$$\ell(t) = \int_0^t (3(2\tau^2 - 2\tau + 1)) d\tau = 2t^3 - 3t^2 + t,$$

odmik za $d = 1$ pa

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-4t^5 + 10t^4 - 8t^3 + 3t^2 + 2t - 1}{2t^2 - 2t + 1} \\ \frac{-6t^4 + 12t^3 - 11t^2 + 5t}{2t^2 - 2t + 1} \end{pmatrix}$$