Pravilni mrežni večkotniki

Milan Hladnik

Moderni izzivi poučevanja matematike
24. september 2010

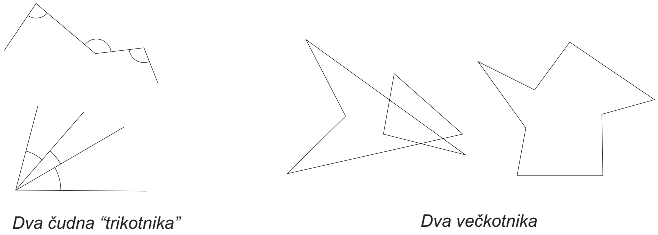
Namen seminarja

Opozoriti na košček matematike, ki

- povezuje elementarno geometrijo in elementarno teorijo števil in
- je dostopen tudi učencem in dijakom ter zato primeren za delo v šoli

Večkotnik

Kaj je večkotnik? Lik z več koti?



Slika: Različni "večkotniki"

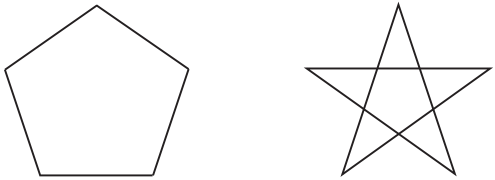
Enakokotni in enakostranični večkotnik

Kaj je pravilni večkotnik?
Je to enakokotni večkotnik? Je to enakostranični večkotnik?
NE: vsak pravokotnik je enakokotnik, vsak romb je enakostranični štirikotnik.

Slika: Različni "enako-večkotniki"

Pravilni večkotnik

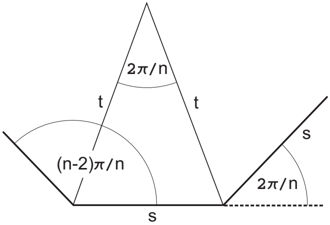
Ali je pravilni večkotnik enakokotni in enakostranični večkotnik?



Slika: Enostavni in neenostavni enakostranični in enakokotni petkotnik

Notranji in zunanji koti

$$\text{tg}\,\alpha = (n-2)\pi/n$$
$$\text{tg}\,\beta = 2\pi/n,\ \alpha = \pi - \beta$$

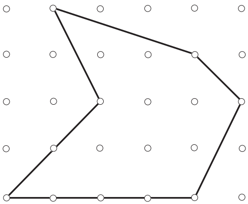


Slika: Notranji in zunanji koti v pravilnem *n*-kotniku

Mrežni večkotnik

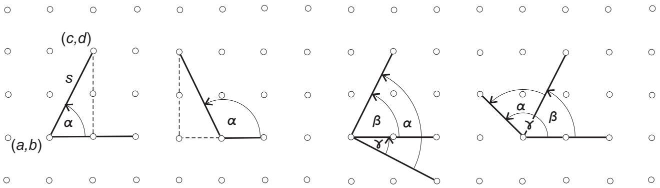
Kvadratna mreža: $\mathbb{Z}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{Z}\}$

Oglišča večkotnika so zdaj mrežne točke:



Slika: Enostavni mrežni večkotnik

Mrežne daljice in mrežni koti



Slika: Dolžina in naklon mrežne daljice, tangens mrežnega kota

Osnovna dejstva:

1. Kvadrat dolžine mrežne daljice je celo število.
   $$s^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$
2. Naklon mrežne daljice je racionalen.
   $$\operatorname{tg}\alpha = (d-b)/(c-a)$$
3. Tangens mrežnega kota je racionalen.
   $$\operatorname{tg}\alpha = (\operatorname{tg}\gamma \pm \operatorname{tg}\beta)/(1 \mp \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\beta)$$

Enakostranični trikotnik

Trditev (1)

Noben enakostranični trikotnik ni mrežni.

Prvi dokaz (s kotom): $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, ni racionalen

Drugi dokaz (s ploščino): $A = s^2\sqrt{3}/4$, ni racionalna,

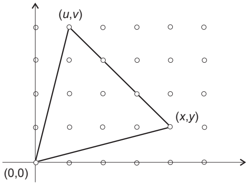
kot bi morala biti po formuli $A = \pm\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$

ali po Pickovem izreku $A = I + B/2 - 1$,

kjer je I število notranjih in B število robnih mrežnih točk.

Dokaz s koordinatami

Naj bodo $(0,0)$, (x,y), (u,v) oglišča najmanjšega mrežnega enakostraničnega trikotnika.



Slika: Najmanjši mrežni trikotnik

Številsko-teoretični dokaz

Pogoj enakostraničnosti: $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$ oziroma $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 2(xu + yv)$.

Odtod

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4(xu + yv).$$

Števila x, y, u, v niso vsa soda, vsota njihovih kvadratov je deljiva s 4, zato morajo biti vsa liha.

V tem primeru diofantska enačba $x^2 + y^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$ nima rešitev, saj je na levi strani število, ki je deljivo z 2, ne pa s 4, na desni strani pa število, ki je deljivo s 4.

Pravilni *mk*-kotnik

Trditev (2)

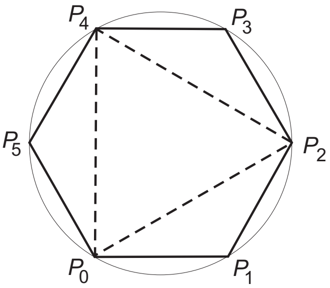
Če ni pravilnega mrežnega m-kotnika, tudi ni pravilnega mrežnega mk-kotnika ($k \in \mathbb{N}$).

Dokaz. V vsakem *mk*-kotniku najdemo vpeti *m*-kotnik.

Posledica (1)

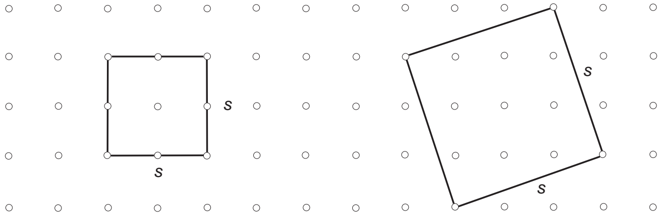
Noben pravilni šestkotnik ni mrežni.

Pravilni šestkotnik



Slika: Pravilni šestkotnik z vpetim enakostraničnim trikotnikom

Mrežni kvadrat



Slika: Dva mrežna kvadrata

Poljubni mrežni točki sta lahko krajišči ene od stranic kvadrata. Zakaj?

Stranica mrežnega kvadrata

- Če $s^2 \notin \mathbb{N}$, kvadrat ne more biti mrežni.
- Če je $s^2 \in \mathbb{N}$, je kvadrat lahko mrežni, in sicer v dveh primerih
  - $s \in \mathbb{N}$;
    tedaj je ploščina kvadrata popoln kvadrat, mrežni kvadrat ima vodoravne in navpične stranice.
  - $s \notin \mathbb{N}$.
    Tedaj je $s = \sqrt{n}$, $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$. Kvadrat ima zdaj poševne stranice.

Vsota dveh kvadratov

Kdaj je naravno število n vsota kvadratov dveh celih števil? Kakšno je pravilo?

Zgledi:

$1 = 1^2 + 0^2$
$2 = 1^2 + 1^2$
3 NI vsota dveh kvadratov
$4 = 2^2 + 0^2$
$5 = 2^2 + 1^2$
6 NI vsota dveh kvadratov

7 NI vsota dveh kvadratov
$8 = 2^2 + 2^2$
$9 = 3^2 + 0^2$
$10 = 3^2 + 1^2$
11 NI vsota dveh kvadratov
12 NI vsota dveh kvadratov

$\dots$

Izrek o vsoti dveh kvadratov

Izrek

Naravno število n je vsota dveh kvadratov natanko takrat, ko vsak prafaktor oblike $p = 4m + 3$ nastopa v praštevilskem razcepu števila n le na sodo potenco.

Dokaz. Zadostnost sledi iz naslednjih dejstev:

(1) $2 = 1^2 + 1^2$, praštevilo oblike $p = 4m + 1$ je vsota dveh kvadratov.

(2) Če je $m = x^2 + y^2$ in $n = u^2 + v^2$, je $mn = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (yu - xv)^2$.

(3) Če je $n = x^2 + y^2$, je $nz^2 = (xz)^2 + (yz)^2$.

Nadaljevanje dokaza

Potrebnost sledi iz naslednjega premisleka:

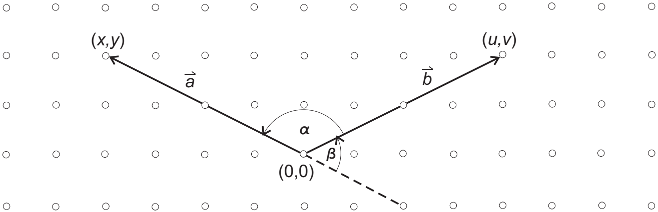
Če praštevilo p deli $n = x^2 + y^2$ in ne deli x obstajata celi števili a in b, da je $ap + bx = 1$, in zato

$$b^2 n = (bx)^2 + (by)^2 = (1 - ap)^2 + (by)^2,$$

tako da je -1 kvadrat po praštevilskem modulu p, kar je mogoče le v primeru, ko je p oblike $p = 4m + 1$.

Če je torej $n = x^2 + y^2$ in $p = 4m + 3$ praštevilo, ki deli n, potem p deli x in p deli y, tako da p^2 deli n in je $n/p^2 = u^2 + v^2$ (vsota dveh kvadratov). Tako praštevilo p lahko nastopa le na sodo potenco.

Kosinus mrežnega kota



Slika: Kot med enako dolgima mrežnima vektorjema

Kosinus mrežnega kota je racionalen

Trditev (3)

V poljubnem mrežnem n-kotniku je kosinus vsakega notranjega in vsakega zunanjega kota z enako dolgima priležnima stranicama racionalen.

Dokaz. Če je notranji kot α, je zunanji $\beta = \pi - \alpha$ in zato $\cos\beta = -\cos\alpha$, kosinus kota med enako dolgima vektorjema $\vec{a} = (x, y)$ in $\vec{b} = (u, v)$ s celimi koordinatami pa je

$$\cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{v} / |\vec{a}||\vec{b}| = (xu + yv)/(x^2 + y^2),$$

torej racionalen.

Pravilni osemkotnik

Posledica (2)

Noben pravilni osemkotnik ni mrežni.

Dokaz. Zunanji kot pri pravilnem osemkotniku je $2\pi/8 = \pi/4$, zato njegov kosinus $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ni racionalen.

Posledica (3)

Če je $n = 2^k m$, $k \geq 3$, m liho število, potem ni pravilnega mrežnega n-kotnika.

Dokaz. Sledi iz prejšnje posledice in trditve 2.

Tangens večkratnega kota

Lema (1)

Naj bo $X = \operatorname{tg}\theta$ in n liho celo število. Potem obstajajo cela števila c_n^i in d_n^i, tako da velja

$$tg\, n\theta = \frac{c_n^1 X - c_n^3 X^3 + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} X^n}{1 - d_n^2 X^2 + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} d_n^{n-1} X^{n-1}}.$$

Dokaz. V de Moivreovi formuli

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

uporabimo binomski obrazec, izenačimo realna in imaginarna dela na levi in desni strani enakosti, izračunamo $\sin n\theta$ in $\cos n\theta$ kot polinoma v $\cos\theta$ in $\sin\theta$ ter $\operatorname{tg} n\theta$ kot racionalno funkcijo v $X = \operatorname{tg}\theta$.

Koeficienti $c_n^i = \binom{n}{i}$ so lihi, $d_n^i = \binom{n}{i}$ pa sodi binomski koeficienti.

Pravilni petkotnik in pravilni sedemkotnik

Posledica (4)

Pravilni petkotnik in pravilni sedemkotnik nista mrežna večkotnika.

Dokaz. Če je $\theta = 2\pi/5$, je $\operatorname{tg} 5\theta = 0$; po formuli iz leme 1 velja $X^5 - 10X^3 + 5X = 0$. Iz bikvadratne enačbe $X^4 - 10X^2 + 5 = 0$ dobimo $X^2 = 5 \pm 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Potem tudi $X \notin \mathbb{Q}$, torej $\operatorname{tg}\theta \notin \mathbb{Q}$.

Če pa je $\theta = 2\pi/7$, imamo po formuli iz leme 1 podobno kot prej $X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 7X = 0$ oziroma $X^6 - 21X^4 + 35X^2 - 7 = 0$ ali $Y^3 - 21Y^2 + 35Y - 7 = 0$, odkoder spet takoj vidimo, da $Y = X^2$ in torej tudi $X = \operatorname{tg}\theta$ ni racionalno število.

Glavni izrek

Izrek (1)

Pravilen n-kotnik je lahko mrežni večkotnik, če in samo če je $n = 4$.

Dokaz. Naj bo n liho število. Kako je v primeru $n = 3, 5$ in 7, že vemo. Denimo torej, da je $n \geq 9$ in $X = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(2\pi/n)$. Po formuli iz leme 1 imamo za X enačbo

$$0 = \operatorname{tg} n\theta = X(c_n^1 - c_n^3 X^2 + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} X^{n-1}).$$

Pozitivne racionalne rešitve te enačbe morajo torej biti cele in deliti koeficient c_n^1, ki je celo število. Toda zaradi $n \geq 9$ je zdaj $0 < \operatorname{tg}(2\pi/n) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ in racionalnih rešitev ni.

Nadaljevanje dokaza

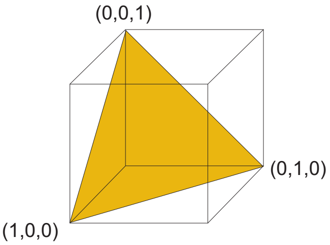
Naj bo zdaj n sodo število, npr. $n = 2^r m$, kjer je m liho število.

Če je $m > 1$, obstaja v pravilnem mrežnem n-kotniku S lihi pravilni mrežni m-kotnik, kar po prvem delu dokaza ni mogoče.

Če pa je $m = 1$ in $n = 2^r$, mora biti $r < 3$, sicer bi lahko našli v S pravilen mrežni osemkotnik, kar tudi vemo, da ni mogoče (posledica 2). Edina možnost, ki ostane, je $r = 2$ ozroma $n = 4$.

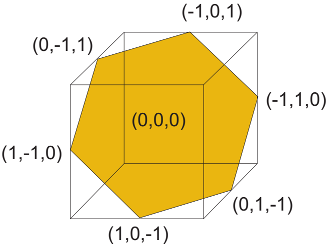
Opomba. Na prostorski mreži so poleg kvadratov od pravilnih večkotnikov lahko samo še enakostranični trikotniki in pravilni šestkotniki. Dokaz je čisto podoben zgornjemu.

Enakostranični trikotnik na prostorski mreži



Slika: Enakostranični trikotnik na prostorski mreži

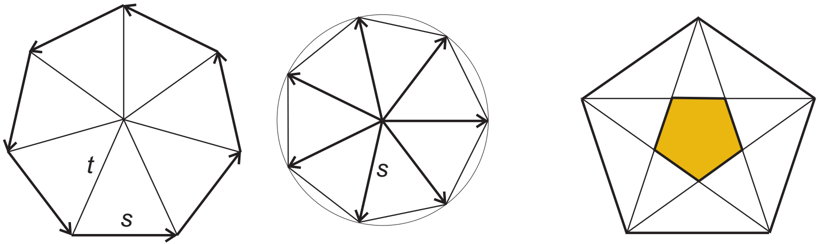
Pravilni šestkotnik na prostorski mreži



Slika: Pravilni šestkotnik na prostorski mreži

Preprost geometrijski dokaz glavnega izreka

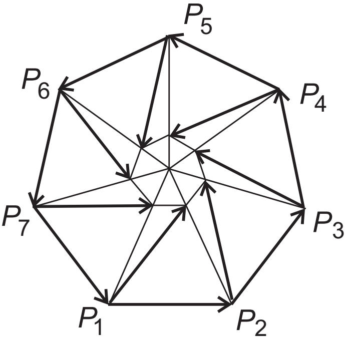
Predpostavimo, da obstajajo pravilni mrežni n-kotniki v primeru $n \geq 5$ in $n \neq 6$. Med njimi izberemo minimalnega. Če je $n \geq 7$, je na sliki $t > s$, zato zamenjajmo t z s, tj. s premikom nanesimo zaporedne stranice pravilnega n-kotnika iz izhodišča, pa dobimo manjši pravilni mrežni večkotnik. Za $n = 5$ pa vrišemo diagnale, ki tvorijo manjši pravilni mrežni večkotnik.

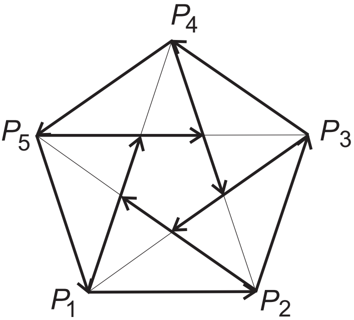


Slika: Geometrijski dokaz, da mrežni n-kotnik za $n \geq 5$ in $n \neq 6$ ni možen

Alternativni geometrijski dokaz glavnega izreka

Za vsak $n \geq 5$, razen za $n = 6$, premaknemo vsako oglišče P_i za vektor $P_{i+1}P_{i+2}$ in ponovno najdemo manjši pravilni n-kotnik). To deluje za vse $n \geq 5$, razen za $n = 6$, ko vsa premaknjena oglišča sovpadajo.





Slika: Drugi dokaz, da mrežni n-kotnik za $n \geq 5$ in $n \neq 6$ ni možen

Enakostranični mrežni večkotniki

Trditev (4)

Če je n liho število, ne obstaja enakostranični mrežni n-kotnik.

Dokaz. Denimo, da taki n-kotniki obstajajo. Med njimi izberimo minimalnega.

Na zaporednih stranicah konstruirajmo vektorje $\overrightarrow{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (x_2, y_2)$, ..., $\overrightarrow{v}_n = (x_n, y_n)$, tako da je $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + ... + \overrightarrow{v}_n = 0$ in torej tudi $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ ter $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$.

Ker so vse stranice enake, npr. s, je

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = ... = x_n^2 + y_n^2 = s^2 \in \mathbb{N}.$$

Nadaljevanje dokaza

Potem imamo

$0 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_n)^2 =$
$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + ... + (x_n^2 + y_n^2) +$
$2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + ... + y_{n-1}y_n) =$
$ns^2 + 2t$,

kjer je $t = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + ... + y_{n-1}y_n$ očitno sodo število.

Torej je $ns^2 = -2t$.

Ker je n liho število, je s^2 sodo število, deljivo s 4; torej sta zaradi enakosti $x_i^2 + y_i^2 = s^2$ za vsak i koordinati x_i in y_i obe sodi. To pa je v nasprotju z minimalnostjo n-kotnika.

Številsko-teoretični dokaz glavnega izreka

Posledica (5)

Če ima n lihi delitelj, ni pravilnega mrežnega n-kotnika.

Posledica (6)

Pravilni mrežni n-kotnik obstaja samo v primeru $n = 4$.

Dokaz. Pravilni mrežni n-kotnik je enakostranični mrežni n-kotnik, kar je po zgornji posledici možno samo v primeru $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Toda za $k \geq 3$ to preprečuje posledica 3, zato preostane samo še primer $n = 4$, ko pa res obstaja veliko mrežnih kvadratov.

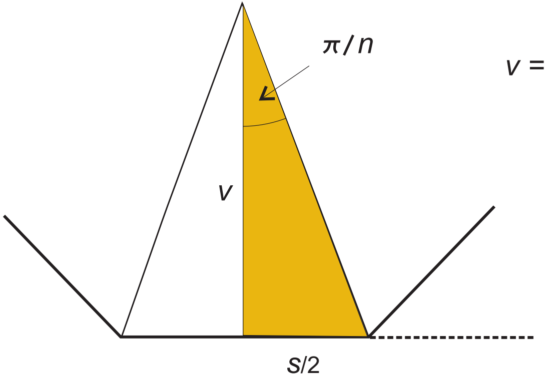
Ideja še enega dokaza glavnega izreka

Ker se da vsak mrežni večkotnik triangulirati z mrežnimi trikotniki, ima racionalno ploščino.

Za pravilni n-kotnik s stranico s je ploščina enaka

$$A = \frac{ns^2}{4\operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Če pokažemo, da je $\operatorname{tg}(\pi/n)$ racionalno število samo v primeru $n = 4$, je dokaz končan. (To pa je nekoliko težje, spet moramo uporabiti teorijo števil.)



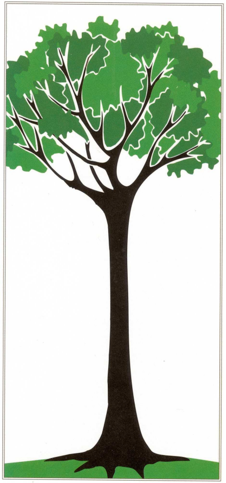
$$v = \frac{s}{2\operatorname{tg}(\pi/n)}$$

Slika: Ploščina pravilnega *n*-kotnika

Nadaljnje branje

- J.D. Sally, P.J. Sally, *Roots to Research, A Vertical Development of Mathematical Problems*, Amer. Math. Soc. 2007.
- M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 1998.
- M. Hladnik, *Pravilni mrežni večkotniki*, prosojnice na spletu http://www.fmf.uni-lj.si/ hladnik/SSUM/SSUM10.htm

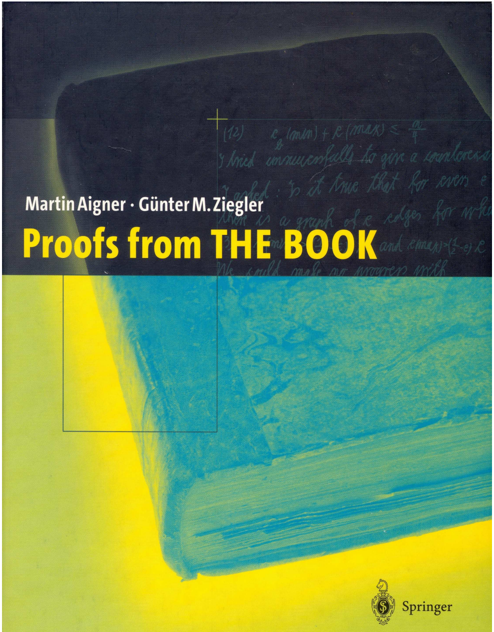
Roots to Research



A Vertical Development of Mathematical Problems

Judith D. Sally

Paul J. Sally, Jr.


Martin Aigner · Günter M. Ziegler
Proofs from THE BOOK
Springer

Hvala!

Če boste želeli, lahko še nadaljujemo v tej smeri.