Zgodovina reševanja polinomskih enačb

Marjan Jerman

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

25. september 2010

Reševanje enačb

- Premetavanje simbolov in zapleteni obrazci
- Veliko lepe matematike in dobrih idej se skriva v ozadju

Reševanje enačb

- Premetavanje simbolov in zapleteni obrazci
- Veliko lepe matematike in dobrih idej se skriva v ozadju

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \; .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \; .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \,.$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \; .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15*.*
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$

  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15*.*
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15*.*
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\frac{x+y}{2} = 900$, $z = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z, \; y = 900 - z$
- $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x+y=1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\frac{x+y}{2} = 900$, $z = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900+z,\ y = 900-z$
- $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800, \frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900, z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z, \ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Kitajska: 9 poglavij matematične umetnosti

- 6. poglavje, naloga 26: *Cisterno polni 5 kanalov. Prvi kanal jo napolne v tretjini dneva, drugi v enem dnevu, tretji v dveh dneh in pol, četrti v treh dneh in peti v petih dneh. Kdaj bo polna cisterna, če hkrati odpremo vse kanale?*
- 7. poglavje, naloga 18: *Na prvem kupu je* 9 *zlatih, na drugem pa* 11 *srebrnih kovancev. Oba kupa tehtata enako. Iz vsakega kupa prestavimo kovanec na drug kup. Potem prvi kup tehta* 13 *enot manj kot drugi. Kolikšni sta teži zlatega in srebnega kovanca?*

Kitajska: 9 poglavij matematične umetnosti

- 6. poglavje, naloga 26: *Cisterno polni 5 kanalov. Prvi kanal jo napolne v tretjini dneva, drugi v enem dnevu, tretji v dveh dneh in pol, četrti v treh dneh in peti v petih dneh. Kdaj bo polna cisterna, če hkrati odpremo vse kanale?*
- 7. poglavje, naloga 18: *Na prvem kupu je* 9 *zlatih, na drugem pa* 11 *srebrnih kovancev. Oba kupa tehtata enako. Iz vsakega kupa prestavimo kovanec na drug kup. Potem prvi kup tehta* 13 *enot manj kot drugi. Kolikšni sta teži zlatega in srebnega kovanca?*

Grčija: Diofantov spomenik

- Otroštvo je trajalo šestino življenja. Po dodatni dvanajstini se je prvič obril, po sedmini pa poročil. Po petih letih je dobil sina, ki je živel polovico očetovih let. Zadnja štiri leta življenja je Diofant tolažbo iskal v matematiki.
- $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$

Grčija: Diofantov spomenik

- Otroštvo je trajalo šestino življenja. Po dodatni dvanajstini se je prvič obril, po sedmini pa poročil. Po petih letih je dobil sina, ki je živel polovico očetovih let. Zadnja štiri leta življenja je Diofant tolažbo iskal v matematiki.
- $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če sešteješ ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštevaš ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštevaš ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če sešteješ ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \tfrac{1}{6}.$$

- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \tfrac{1}{6}.$$

- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \tfrac{1}{6}.$$

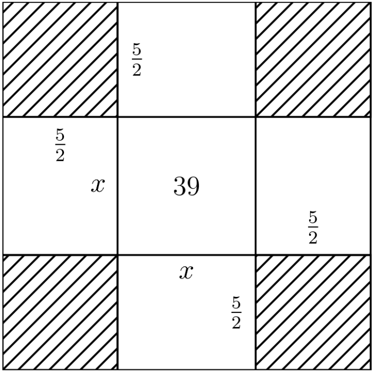
- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Reševanje kvadratne enačbe

$$x^2 + 10x = 39$$



Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0.$

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

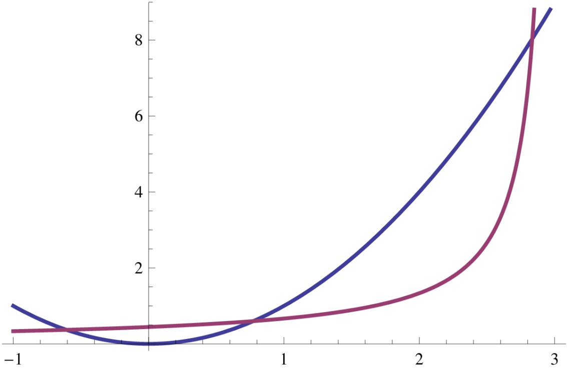
Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

Metode reševanja kubične enačbe

- Umar Khayyam: 14 tipov kubičnih enačb
- Rešitev Arhimedove kubične enačbe je presek stožnic:

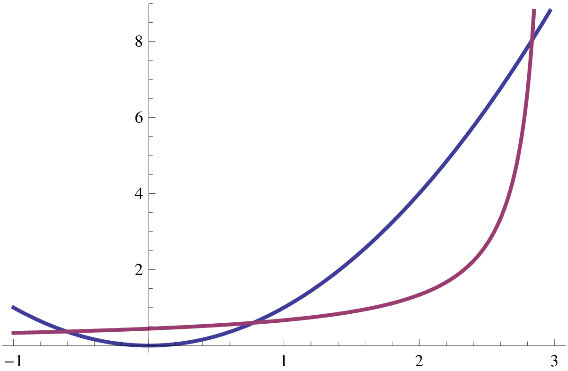
$$y = x^2, \quad (x - 3r)y = -\tfrac{4}{3}r^3.$$



Metode reševanja kubične enačbe

- Umar Khayyam: 14 tipov kubičnih enačb
- Rešitev Arhimedove kubične enačbe je presek stožnic:

$$y = x^2, \quad (x - 3r)y = -\frac{4}{3}r^3.$$



Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$. Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko
$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

Lodovico Ferrari

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2}{x_3} \\ x_1 x_2 &= 6 \end{aligned}$$

se prevede na

$$x_2^4 + 6x_2^2 + 36 = 60x_2.$$

Lodovico Ferrari

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2}{x_3} \\ x_1 x_2 &= 6 \end{aligned}$$

se prevede na

$$x_2^4 + 6x_2^2 + 36 = 60x_2.$$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. Analog kubične resolvente je stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. Analog kubične resolvente je stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. Analog kubične resolvente je stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. Analog kubične resolvente je stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. Analog kubične resolvente je stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?