

# Arbitraža na finančnih trgih in teorija verjetnosti

Tomaž Košir

Oddelek za matematiko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Moderni izzivi poučevanja matematike  
25. januar 2013

# Vsebina

- 1 Razvoj finančne matematike
  - Začetki
  - Moderna doba

# Vsebina

- 1 Razvoj finančne matematike
  - Začetki
  - Moderna doba
- 2 Finančni trg in vrednotenje
  - Finančni instrumenti
  - Matematični model finančnega trga
  - Osnovna izreka vrednotenja premoženja

# Vsebina

- 1 Razvoj finančne matematike
  - Začetki
  - Moderna doba
- 2 Finančni trg in vrednotenje
  - Finančni instrumenti
  - Matematični model finančnega trga
  - Osnovna izreka vrednotenja premoženja
- 3 Zaključek

# Uvod

Sodobno **finančno matematiko** v grobem delimo na 3 dele:

- teorijo vrednotenja,
- portfeljsko teorijo,
- teorijo upravljanja s tveganji.

# Uvod

Sodobno **finančno matematiko** v grobem delimo na 3 dele:

- teorijo vrednotenja,
- portfeljsko teorijo,
- teorijo upravljanja s tveganji.

Sorodni sta še *aktuarska matematika* in *ekonomska matematika (matematična ekonomija)*. Vse uporabljajo teorijo verjetnosti in matematično statistiko.

# Uvod

Sodobno **finančno matematiko** v grobem delimo na 3 dele:

- teorijo vrednotenja,
- portfeljsko teorijo,
- teorijo upravljanja s tveganji.

Sorodni sta še *aktuarska matematika* in *ekonomska matematika (matematična ekonomija)*. Vse uporabljajo teorijo verjetnosti in matematično statistiko.

Danes bom predstavil **uvod v teorijo vrednotenja**.

# Teorija vrednotenja

- Razvoj teorije vrednotenja so spodbudili predvsem finančni instrumenti z opcijsko komponento.



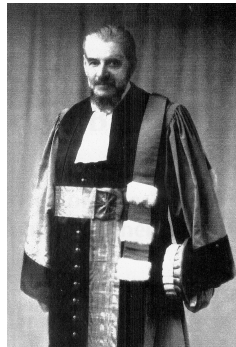
# Teorija vrednotenja

- Razvoj teorije vrednotenja so spodbudili predvsem finančni instrumenti z opcijsko komponento.
- Prvi znan primer iz zgodovine je Talesov zakup stiskalnic za olive.
- Z opcijami kot jih poznamo danes so prvič trgovali v Angliji konec 17. stoletja v času sovladanja Williama in Mary.



# Louis Bachelier 1870-1946

- Francoski matematik, **začetnik finančne matematike**.
- Leta 1900 napisal doktorsko disertacijo *Teorija napovedovanj (Théorie de la spéculation)*. Obravnava gibanja vrednosti na finančnih trgih in predstavi matematični model za njih.
- V disertaciji je prvi matematični opis Brownovega gibanja. Einstein ga je podal s fizikalnim ozadjem leta 1905.



# Vinzenz Bronzin 1872-1970

- Rojen v Rovinju, obiskoval italijansko gimnazijo v Kopru, študiral na Dunaju, živel in deloval v Trstu.
- Leta 1908 napisal knjigo *Teorija pogodb s premijo (Theorie der Prämienengeschäfte)*. Obravnava izračun premij za različne pogodbe z odloženo in opcijsko poravnavo.



# Formula Blacka in Scholesa

- Fischer Black (1938-1995) in Myron S. Scholes (1941-) sta leta 1969 dokazala danes slavno Black-Scholesovo formulo za vrednotenje opcij.
- Njuno formulo razširi in posploši Robert C. Merton (1944-).
- Nobelova nagrada za ekonomijo 1997 (Merton in Scholes).



Black



Scholes



Merton

# Finančni instrumenti

- Finančni sistem je ustvaril številne **finančne instrumente**.
- Finančni instrument je *pogodba* med dvema oseba, v kateri se obvezeta, da bosta izvršili določena plačila ob določenih časih sedaj in/ali v prihodnosti.

# Finančni instrumenti

- Finančni sistem je ustvaril številne **finančne instrumente**.
- Finančni instrument je *pogodba* med dvema oseba, v kateri se obvezeta, da bosta izvršili določena plačila ob določenih časih sedaj in/ali v prihodnosti.
- Primeri: delnice, obveznice, zakladne menice, vzajemni skladi, posojila, zavarovalne police, ...

# Izvedeni finančni instrumenti

- Finančni instrumenti, katerih pogodba se nanaša na druge finančne instrumente, so **izvedeni finančni instrumenti**.
- Primeri: terminske pogodbe (futures), terminski posli (forwards), zamenjave (swaps), opcije (options), ...

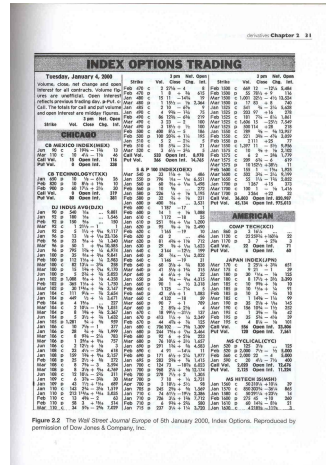


Figure 2.2 The Wall Street Journal/ Europe of 5th January 2009, Index Options. Reproduced by permission of Dow Jones & Company, Inc.

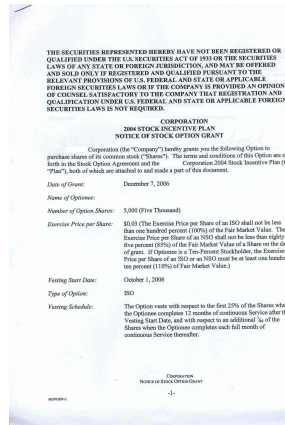
# Kaj so opcije?

- Npr. **evropska nakupna opcija** (European call option) daje lastniku *pravico* (in ne obveznosti) nakupa določenega premoženja (npr. delnice) za določeno ceno ob določenem času v prihodnosti. Za to pravico mora lastnik plačati *premijo*.



# Kaj so opcije?

- Npr. **evropska nakupna opcija** (European call option) daje lastniku *pravico* (in ne obveznosti) nakupa določenega premoženja (npr. delnice) za določeno ceno ob določenem času v prihodnosti. Za to pravico mora lastnik plačati **premijo**.
- Podobno **evropska prodajna opcija** (European put option) daje lastniku *pravico* (in ne obveznosti) prodaje določenega premoženja za določeno ceno ob določenem času v prihodnosti.



## (naiven) Zgled

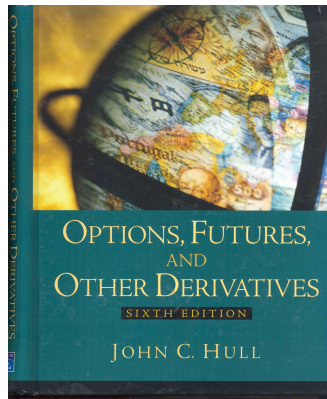
- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR60 čez tri mesece, to je 25. 4. 2013.

## (naiven) Zgled

- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR60 čez tri mesece, to je 25. 4. 2013.
- Če bo 25. 4. vrednost delnic Krke nad EUR60, boste delnice takrat kupili, saj jih lahko takoj prodate po višji ceni.

## (naiven) Zgled

- Od gospe Kralj ste danes kupili opcijo za nakup 10 delnic Krke po EUR60 čez tri mesece, to je 25. 4. 2013.
- Če bo 25. 4. vrednost delnic Krke nad EUR60, boste delnice takrat kupili, saj jih lahko takoj prodate po višji ceni.
- Če bo vrednost pod EUR60, delnic ne boste kupili od gospe Kralj, saj jih lahko na trgu dobite ceneje.



# Trgovanje z opcijami

- V resnici se z opcijami in drugimi izvedenimi finančnimi instrumenti trguje bodisi na organiziranem ali na prostem trgu in v veliki večini se pozicije zapre že pred dospeljem. Tudi pri instrumentih, ki imajo v pogodbi blagovno poravnavo, pride samo do denarne poravnave. (*Ni krav na Wall Streetu.*)

# Trgovanje z opcijami

- V resnici se z opcijami in drugimi izvedenimi finančnimi instrumenti trguje bodisi na organiziranem ali na prostem trgu in v veliki večini se pozicije zapre že pred dospeljem. Tudi pri instrumentih, ki imajo v pogodbi blagovno poravnavo, pride samo do denarne poravnave. (*Ni krav na Wall Streetu.*)
- Trgovanje na trgu izvedenih instrumentov 'napoveduje' cene na primarnem trgu in tudi vpliva na njih.



# Za kaj se uporabljajo opcije?

- Opcije se uporabljajo tako za investicije (trgovanje s finančnim vzvodom) kot tudi za zaščito pred finančnimi tveganji (angl. hedging).

# Za kaj se uporabljajo opcije?

- Opcije se uporabljajo tako za investicije (trgovanje s finančnim vzvodom) kot tudi za zaščito pred finančnimi tveganji (angl. hedging).
- Na primer: zaščita pred valutnimi tveganji, pred tveganji izgube vrednosti delnic, itd.

GLXO LN Gbp ↑ 1688 -13 L 5s L 1686/1689 L Trd Equity OCM														
At 12:50 Vol 854.194 Op 1694 L Hi 1703 L Lo 1686 L Prev 1701														
OPTION MONITOR 3 COMP Center: 1687 i (GO) to Edit Spreadsheet														
GLXO LN	BID	ASK	LAST	CHG	LVBD	LVAS	BEST	DEBS	GABS	VEBS	THEO	7 DAY	DEC	
CALLS	Bid Price	Ask Price	Last Price	Net Trade	Volat Bid	Volat Ask	Best Price	Best Price	Best Price	Best Price	Best Price	Value	Decay	
GLXOCT96	1686	01689	01688	0	-13	0	1687							
11	1200	689.50	604.50	609.50	unch	N.A.	69.97	504.50	.942	.0003		.674494	0.94	6870
12	1250	440.00	455.00	460.00	unch	N.A.	63.58	455.00	.936	.0003		.689444	0.92	6853
13	1300	390.50	405.00	410.50	unch	N.A.	57.36	405.00	.928	.0004		.837396	0.34	6828
14	1350	342.00	357.00	362.00	unch	N.A.	52.29	357.00	.915	.0005		.853348	0.72	8888
15	1400	294.50	309.00	314.50	unch	N.A.	48.07	309.00	.895	.0007		1.018302	0.625	2385
16	1450	249.00	264.00	268.50	unch	29.45	45.11	264.00	.864	.0008		1.194258	0.605	8316
17	1500	203.00	218.00	224.00	unch	30.67	42.27	220.00	.823	.0011		1.538217	0.536	3836
18	1600	125.00	137.50	136.00	-6.00	29.86	37.59	136.00	.706	.0017		2.013146	0.027	0423
19	1700	69.00	76.00	80.00	unch	30.95	34.02	76.00	.516	.0020		2.28090	0.9567	4785
110	1800	32.00	38.00	40.00	unch	30.62	33.12	37.00	.319	.0019		2.00952	0.7136	2390
111	1900	16.00	20.00	21.50	unch	32.84	35.47	20.00	.190	.0013		1.55228	0.3864	8611
112	2000	6.00	9.00	9.00	unch	32.53	35.83	9.00	.099	.0008		1.04114	0.2732	9660
113	2100	2.00	4.00	3.50	unch	32.32	36.52	3.50	.044	.0005		.581	0.7281	4568
114	2200	2.00	1.00	unch	N.A.	38.08	1.00	.015	.0002			.232	2.968	5272
115	2300	1.50	unch	unch	N.A.	41.58	.50	.008	.0001			.132	1.262	2929
116	2400	1.00	unch	unch	N.A.	43.98	.50	.007	.0001			.126	.502	2977
117	2500	1.00	unch	unch	N.A.	48.40	.50	.007	.0001			.101	.195	3010

Figure 2.4 Prices for Glaxo-Wellcome calls expiring in October. Source: Bloomberg L.P.



# Idealne predpostavke

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- **Ni arbitraže.**

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- **Ni arbitraže.**
- Trg je učinkovit.

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- **Ni arbitraže.**
- Trg je učinkovit.
- Možno je kupiti poljuben del premoženja.

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- **Ni arbitraže.**
- Trg je učinkovit.
- Možno je kupiti poljuben del premoženja.
- Ni transakcijskih stroškov.

# Idealne predpostavke

- Ljudje so racionalni.
- Spremembe cen so zvezne in sledijo Brownovemu gibanju.
- **Ni arbitraže.**
- Trg je učinkovit.
- Možno je kupiti poljuben del premoženja.
- Ni transakcijskih stroškov.
- Dovoljena je kratka prodaja.



# Obstoj arbitraže in Zakon ene cene

- **Arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev. (*Zastonj kosilo.*)

# Obstoj arbitraže in Zakon ene cene

- **Arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev. (*Zastonj kosilo.*)
- **Zakon ene cene**: Dve finančni pogodbi, ki imata v prihodnosti enake denarne tokove, imata sedaj enako ceno.

# Obstoj arbitraže in Zakon ene cene

- **Arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev. (*Zastonj kosilo.*)
- **Zakon ene cene**: Dve finančni pogodbi, ki imata v prihodnosti enake denarne tokove, imata sedaj enako ceno. Je posledica predpostavke o neobstoju arbitraže.

Na primer:

- Nakup dveh brezkuponskih obveznic ali ene kuponske obveznice.

# Obstoj arbitraže in Zakon ene cene

- **Arbitraža** (oz. arbitražna priložnost) je možnost priti do dobička brez vloženih sredstev. (*Zastonj kosilo.*)
- **Zakon ene cene**: Dve finančni pogodbi, ki imata v prihodnosti enake denarne tokove, imata sedaj enako ceno. Je posledica predpostavke o neobstoju arbitraže.

Na primer:

- Nakup dveh brezkuponskih obveznic ali ene kuponske obveznice.
- Vrednost terminske pogodbe in vrednost osnovnega premoženja:

$$F = S_0 e^{rT}$$

( $F$  - vrednost iz terminske pogodbe,  $S_0$  - trenutna vrednost osnovnega premoženja,  $r$  - bančna obrestna mera,  $T$  čas do zapadlosti.)

## Obstoj arbitraže in Zakon ene cene 2

- Vrednosti nakupne in prodajne opcije z isto izvršilno ceno  $K$  sta povezani:

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0.$$

( $C$  - trenutna vrednost nakupne opcije,  $P$  - trenutna vrednost prodajne opcije,  $S_0$  - trenutna vrednost delnice v času 0.)

# Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja

# Osnovna izreka vrednotenja premoženja

Izrek (Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja)

*Na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost glede na dan numerar.*

# Osnovna izreka vrednotenja premoženja

## Izrek (Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja)

*Na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost glede na dan numerar.*

## Izrek (Drugi osnovni izrek vrednotenja premoženja)

*Trg je poln natanko tedaj, ko obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska verjetnost glede na dan numerar.*



# Vrednotenje opcij

**Black-Scholesova formula** za evropsko nakupno opcijo:

$$C(S, t) = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

kjer je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$d_1 = \frac{\log S - \log K + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

## Vrednotenje opcij 2

- **Black-Scholesova diferencialna enačba:**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$V$  - vrednost opcije,  $S$  - vrednost delnice,  $\sigma^2$  - disperzija za  $S$

## Vrednotenje opcij 2

- **Black-Scholesova diferencialna enačba:**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$V$  - vrednost opcije,  $S$  - vrednost delnice,  $\sigma^2$  - disperzija za  $S$

- Spominja na toplotno enačbo - tudi fiziki med kvantitativnimi finančniki (*ekonofizika*).

# Svetovni finančni trgi in vloga finančnih matematikov

- Obseg trgovanja z izvedenimi finančnimi instrumenti je enormen: na organiziranem trgu (na vseh borzah na svetu skupaj) je bil obseg trgovanja v zadnjem četrtletju 2004  $\text{USD}344 \cdot 10^{12}$ , odprte postavke na svetovnih prostih trgih v juniju 2011 pa  $\text{USD}708 \cdot 10^{12}$ .

# Svetovni finančni trgi in vloga finančnih matematikov

- Obseg trgovanja z izvedenimi finančnimi instrumenti je enormen: na organiziranem trgu (na vseh borzah na svetu skupaj) je bil obseg trgovanja v zadnjem četrletju 2004  $\text{USD}344 \cdot 10^{12}$ , odprte postavke na svetovnih prostih trgih v juniju 2011 pa  $\text{USD}708 \cdot 10^{12}$ .
- Številne finančne inštitucije in podjetja v zahodnem svetu iščejo doktorje matematike (in tudi fizike) ki so pripravljene delovati na področju finančne matematike. To so zelo dobro plačani kadri.

## Svetovni finančni trgi in vloga finančnih matematikov 2

- Vloga finančnih matematikov v poslovnem svetu je v pripravi novih finančnih produktov, upravljanju s tveganji, vrednotenju finančnih produktov, pripravi ustreznih algoritmov in metod za izračune potrebne pri tem, itd.

## Svetovni finančni trgi in vloga finančnih matematikov 2

- Vloga finančnih matematikov v poslovnem svetu je v pripravi novih finančnih produktov, upravljanju s tveganji, vrednotenju finančnih produktov, pripravi ustreznih algoritmov in metod za izračune potrebne pri tem, itd.
- Finančni matematiki v akademskem svetu se tudi ukvarjajo s tem, poleg tega pa tudi s temeljnimi matematičnimi raziskavami.

# Literatura

- 1 Peter Bernstein: *Against the Gods*, Wiley, 1996
- 2 M. Davis, A. Ethridge: *Louis Bachelier's Theory of Speculation*, Princeton University Press, 2006
- 3 Emanuel Derman: *My Life as a Quant*, Wiley, 2004
- 4 Niall Ferguson: *The Ascent of Money*, Penguin Books, 2008
- 5 Wolfgang Hafner, Heinz Zimmermann: *Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models*, Springer Verlag, 2009
- 6 Benoit Mandelbrot: *The (mis)Behavior of Markets*, Basic Books, 2004
- 7 Perry Mehrling: *Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance*, Wiley, 2005
- 8 Leo Melamed: *Escape to Futures*, Wiley, 1996
- 9 William Poundstone: *Fortune's Formula*, Hill & Wang, 2005
- 10 Paul Wilmott: *Paul Wilmott Introduces Quantitative*



# Nekaj spletnih strani

- 1 <http://finance.yahoo.com/>
- 2 <http://www.wilmott.com/>
- 3 <http://www.outbacksoftware.com/finEngineer/financialEngineering.html>
- 4 <http://www.bloomberg.com/index.html?Intro=intro3>
- 5 <http://www.risk.net/>
- 6 <http://www.global-derivatives.com/>