



Aproksimacija krožnih lokov

Emil Žagar

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Moderni izzivi poučevanja matematike

20. september 2013



Vsebina

- 1 Uvod
- 2 Standardne predstavitve krožnice
- 3 Naivna aproksimacija
- 4 Bézierove krivulje
- 5 Aproksimacija loka z Bézierovimi krivuljami



Uvod

Kaj je krožnica?

- Množica takih točk **v ravnini**, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središča).



Uvod

Kaj je krožnica?

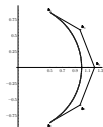
- Množica takih točk **v ravnini**, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središča).
- Ravninska krivulja s konstantno (neničelno) ukrivljenostjo.



Uvod

Kaj je krožnica?

- Množica takih točk **v ravnini**, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središča).
- Ravninska krivulja s konstantno (neničelno) ukrivljenostjo.
- Krivulja drugega reda (stožnica).



Uvod

Kaj je krožnica?

- Množica takih točk **v ravnini**, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središča).
- Ravninska krivulja s konstantno (neničelno) ukrivljenostjo.
- Krivulja drugega reda (stožnica).
- Rešitev diferencialne enačbe

$$y'(y - q) + (x - p) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$



Uvod

Kaj je krožnica?

- Množica takih točk **v ravnini**, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središča).
- Ravninska krivulja s konstantno (neničelno) ukrivljenostjo.
- Krivulja drugega reda (stožnica).
- Rešitev diferencialne enačbe

$$y'(y - q) + (x - p) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

- ...

- V okviru tega predavanja bo krožnica **ravninska parametrična krivulja**.
- **Parametrizacija ravninske krivulje**: (gladka) preslikava \mathbf{r} zaprtega intervala $I \subset \mathbb{R}$ v \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}' \neq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T, \quad x, y : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Parametrizacij je neskončno (dobimo jih z **reparametrizacijami**; "vrinemo" gladko (bijektivno) preslikavo $\rho : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$).

- V praksi so zaželjene **preproste parametrizacije** (polinomske, racionalne, . . .).
- **Prvo razočaranje**: krožnice ne moremo eksaktno predstaviti s polinomske parametrično krivuljo.
- Lahko jo predstavimo (skoraj celo) z racionalno krivuljo.
- Veliko pomembnih sistemov v industriji še vedno temelji na polinomskih krivuljah.
- Potrebujemo **dobre polinomske aproksimacije krožnice oz. krožnega loka**.



Standardne predstavitve krožnice

- Omejimo se na **enotsko krožnico** s središčem v **$O(0, 0)$** .
- **EksPLICITNI zapis:**

$$y(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

- **Prednosti:** preprost izračun točke na krivulji, preprosto risanje grafa krivulje, ...
- **Slabosti:** zapis je ponavadi sestavljen iz mnogo lokalnih predpisov.

- Implicitni zapis:

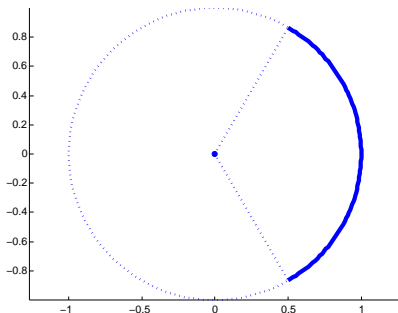
$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

- Prednosti: preprost zapis (ponavadi) cele krivulje, preprosto preverjanje, ali točka leži na krivulji, . . .
 - Slabosti: zapleteno risanje grafa krivulje.
- Parametrični zapis ima nekaj lepih lastnosti eksplicitnega in implicitnega.

- Standardni parametrični zapis krožnega loka

$$x(\varphi) = \cos \varphi,$$

$$y(\varphi) = \sin \varphi, \quad \varphi \in [-\alpha, \alpha], \quad \alpha \in [0, \pi].$$



Slika: Parametrizacija enotskega krožnega loka s središčnim kotom $2\pi/3$.



Naivna aproksimacija

- Del enotske krožnice aproksimiramo tako, da aproksimiramo vsako komponento posebej.
- Ena od možnosti je razvoj v Taylorjevo vrsto (okrog 0):

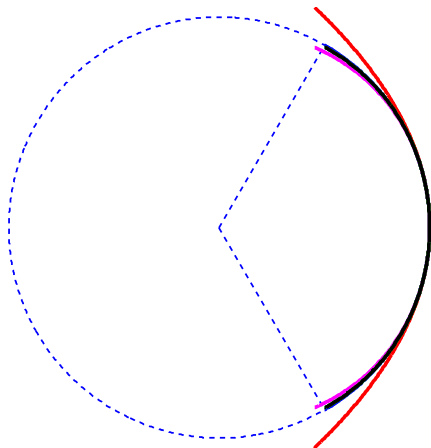
$$x(\varphi) \approx p_n(\varphi), \quad y(\varphi) \approx q_n(\varphi),$$

kjer je

$$p_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!},$$

$$q_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- Slabost: za kote, ki niso zelo majhni, potrebujemo veliko členov zgornjih vsot ($n \gg 1$).



Slika: Aprokcimacija enotskega krožnega loka s središčnim kotom $2\pi/3$. Taylorjevi aproksimanti: stopnje 2 (rdeče), stopnje 3 (vijolično), stopnje 4 (črno).

- Težava je v tem, da na krivuljo gledamo “po komponentah”.
- Komponente krožnice so med seboj povezane, denimo $x^2 + y^2 \equiv 1, \dots$
- Uporabiti moramo pristop, kjer upoštevamo povezanost, geometrijo, . . .
- Pogosto so pravo orodje **Bézierove krivulje**.



Bézierove krivulje

- Za izbrano zaporedje ravninskih točk $\{\mathbf{P}_j\}_{j=0}^n$ definiramo

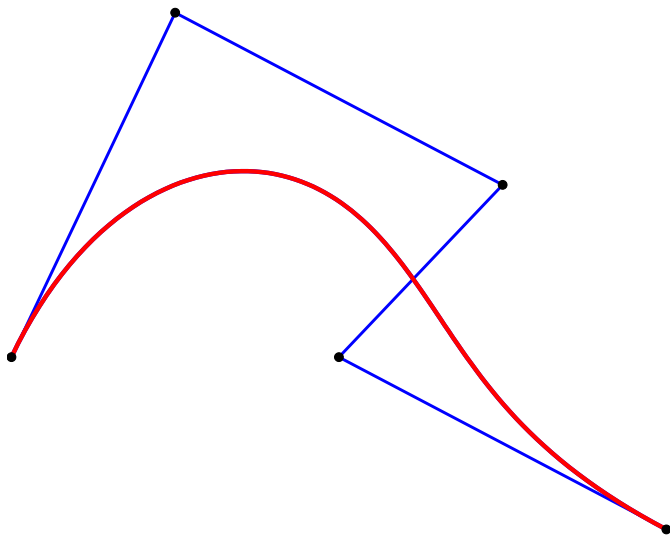
$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

kjer so

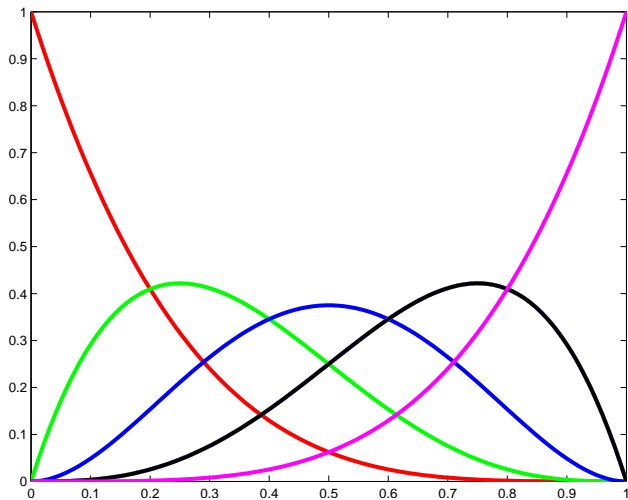
$$B_j^n(t) := \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

Bernsteinovi polinomi.

- Krivulji \mathbf{b} rečemo ravninska Bézierova krivulja.
- Točkam $\{\mathbf{P}_j\}_{j=0}^n$ pravimo kontrolne točke, poligonu, ki ga določajo, pa kontrolni poligon.



Slika: Bézierova krivulja stopnje 4 (rdeče) s kontrolnimi točkami (črno) in kontrolnim poligonom (modro).



Slika: Bazni Bernsteinovi polinomi stopnje 4 (B_0^4 rdeče, B_1^4 zeleno, B_2^4 modro, B_3^4 črno in B_4^4 rožnato).



Bézierove krivulje

- Neodvisno jih v drugi polovici 20. stoletja razvijeta **P.E. Bézier¹** in **P. de Casteljaou²**.
- Z razvojem računalnikov postanejo nesluteno uporabne.
- Nepogrešljive v CAGD (**C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign): animacije; avtomobilska, ladijska in letalska industrija; . . .
- **Možne so posplošitve na ploskve in v več dimenzij.**

¹Pierre Étienne Bézier, 1910-1999, francoski razvojni inženir pri Renaultu.

²Paul de Faget de Casteljaou, 1930-1999, francoski razvojni inženir pri Citroënu.

Pomembne lastnosti:

- Prva in zadnja kontrolna točka sta interpolacijski,

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{b}(1) = \mathbf{P}_n.$$

- Tangentna vektorja v začetni in končni točki sta

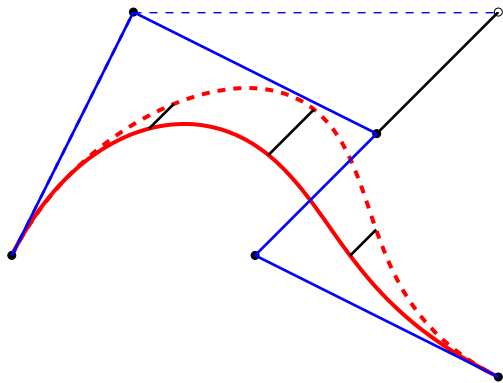
$$\mathbf{b}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{b}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}).$$

- Krivulja leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk.

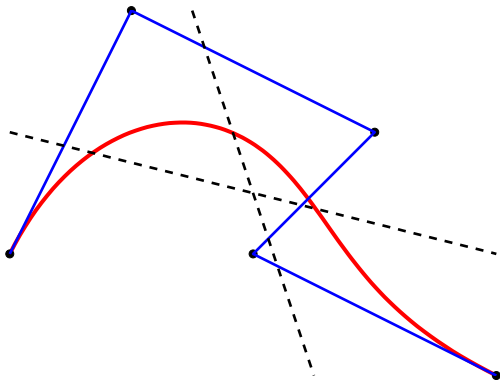
- Premik j -te kontrolne točke za vektor \mathbf{v} , premakne krivuljo za

$$B_j^n(t) \mathbf{v}.$$

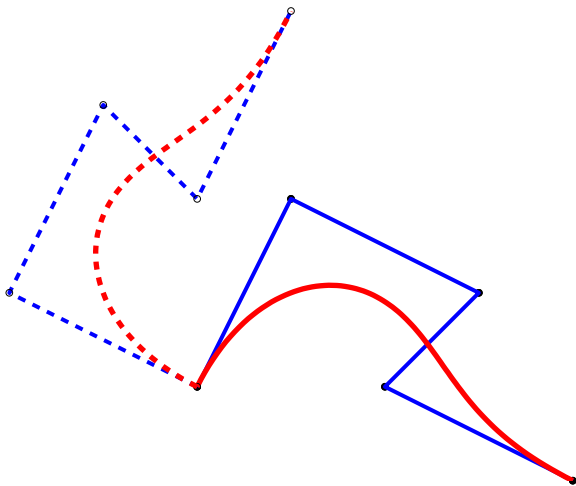
- Vsaka premica seka krivuljo **kvečjemu tolikokrat** kot kontrolni poligon.
- Krivulja je **afino invariantna** (uporabno denimo v PostScriptu).
- ...



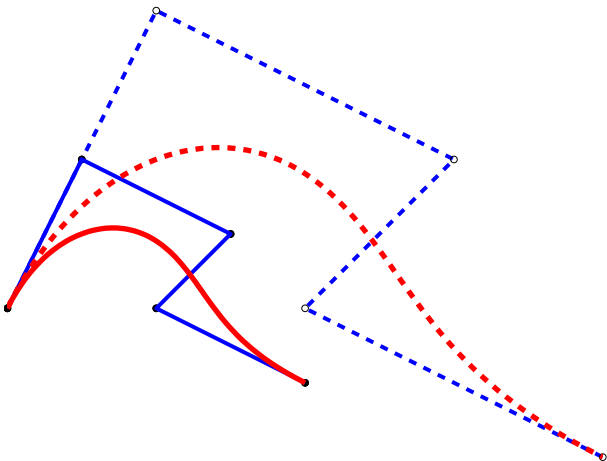
Slika: Premik tretje kontrolne točke Bézierove krivulje za vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Slika: Premica lahko seka krivuljo kvečjemu tolikokrat kot kontrolni poligon.



Slika: Rotacija Bézierove krivulje za 90° okrog prve kontrolne točke v pozitivni smeri.



Slika: Skaliranje Bézierove krivulje za faktor 2.



Aproksimacija loka z Bézierovimi krivuljami

- Polinomski aproksimant $\mathbf{p}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stopnje n krožnega loka zapišemo v **Bézierovi obliki**.
- Odpravimo slabost Taylorjeve aproksimacije (**tam ni interpolacije robnih točk**).
- Torej:

$$\mathbf{p}_n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t),$$

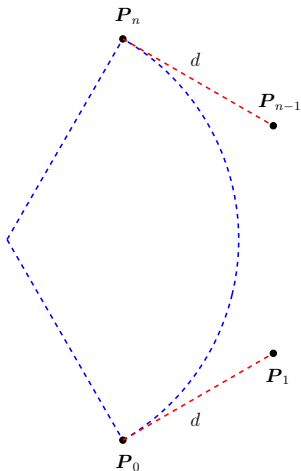
kjer je $\mathbf{P}_0 = [\cos \varphi, -\sin \varphi]^T$ in $\mathbf{P}_n = [\cos \varphi, \sin \varphi]^T$.

- Izkoristimo še lastnost odvoda v robnih točkah

$$\mathbf{p}'(0) = d [\sin \varphi, \cos \varphi]^T$$

$$\mathbf{p}'(1) = d [-\sin \varphi, \cos \varphi]^T.$$

- Parameter $d \geq 0$ je t.i. parameter **geometrijske zveznosti prvega reda** (zahtevamo isto smer tangente, ne pa nujno enako velikost).
- **Zaradi simetrije** je d enak pri obeh tangents.
- **Zaradi simetrije** so simetrične (glede na abscisno os) tudi kontrolne točke.



Slika: Kontrolne točke aproksimanta v Bézierovi obliki, če zahtevamo geometrijsko zveznost prvega reda v robnih točkah.

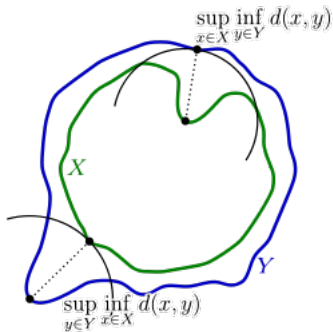
- Parameter d in preostale kontrolne točke (P_2, \dots, P_{n-2}) lahko izkoristimo za “oblikovanje” aproksimanta.
- Možnosti:
 - minimiziramo **odmik** aproksimanta,
 - zahtevamo čim boljše **prileganje ukrivljenosti**,
 - poskusimo doseči kar se da podobno **ločno dolžino** krivulje,
 - ...
- V nadaljevanju se bomo posvetili minimizaciji odmika.



Merjenje razdalje med parametričnima krivuljama

- Navidez preprosto vprašanje: **Kako izmerimo razdaljo med parametričnima krivuljama?**
- Ni tako preprosto kot pri merjenju razdalje med funkcijama (krivulji sta lahko parametrizirani na zelo različnih domenah).
- Očitna možnost: merimo razdaljo med množicama točk (slikama parametričnih krivulj), **Hausdorffova razdalja**.
- Naj bosta X in Y dve množici in d metrika na $X \times Y$:

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}$$



Slika: Hausdorffova razdalja med množicama X in Y (vir: Wikipedia).

- Slabost: velika računska zahtevnost, tudi v diskretnem primeru, oz. praktično neizračunljivo.

- Krivulji $\mathbf{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$; naivni pristop:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{t \in I} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\|_2.$$

Primer

Vzemimo $\mathbf{p}, \mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, kjer je

$$\mathbf{p}(t) = [t, t]^T,$$

$$\mathbf{q}(t) = [1 - t, 1 - t]^T,$$

Potem je

$$\max_{t \in [0, 1]} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\|_2 = \sqrt{2}.$$

Kaj je tukaj narobe?

- Parametrična razdalja: $\mathbf{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \inf_{\phi} \max_{t \in I} \|\mathbf{p}(t) - (\mathbf{q} \circ \phi)(t)\|_2,$$

kjer je $\phi : I \rightarrow J$ bijekcija.

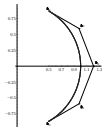
- Očitno je Hausdorffova razdalja vedno manjša od parametrične.
- Torej je

$$\max_{t \in I} \|\mathbf{p}(t) - (\mathbf{q} \circ \phi)(t)\|_2, \quad \text{izbrani } \phi,$$

zgornja meja za Hausdorffovo razdaljo.

- Težave pri parametrični razdalji:
 - Kako izbrati ustrezeni ϕ ?
 - Kako izračunati maksimum?
- V nekaterih primerih lahko parametrično razdaljo poenostavimo.
- Pri krožnih lokih uporabimo **radialno razdaljo**.
- Razdaljo med (enotskim) krožnim lokom in parametrično krivuljo $\mathbf{p} = [x, y]^T$ merimo v radialni smeri

$$\left| \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right| \approx \frac{1}{2} |x(t)^2 + y(t)^2 - 1|.$$

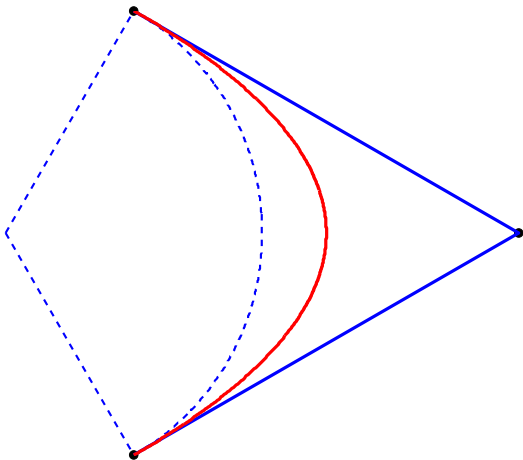


Aproksimacija s kvadratno krivuljo

- Iščemo aproksimant oblike

$$\mathbf{p}_2(t) = \sum_{j=0}^2 \mathbf{P}_j B_j^2(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2.$$

- Vemo: $\mathbf{P}_0 = [\cos \varphi, -\sin \varphi]^T$, $\mathbf{P}_2 = [\cos \varphi, \sin \varphi]^T$.
- S preprosto geometrijo dobimo $\mathbf{P}_1 = [\sec \varphi, 0]^T$.
- Ni prostih parametrov.



Slika: Aproksimacija enotskega krožnega loka (modro črtkano) s kvadratno Bézierovo krivuljo (rdeče).

- Naj bo

$$e_\varphi := \max_{t \in [0,1]} \left| \|\mathbf{p}(t)\|_2^2 - 1 \right|.$$

- Zanima nas e_φ v odvisnosti od kota φ .
- Iz preprostih opazk sledi

$$e_\varphi = \max_{t \in [0,1]} \left| \|\mathbf{p}(t)\|_2^2 - 1 \right| = \left| \|\mathbf{p}_2(1/2)\|_2^2 - 1 \right|.$$

- Z nekaj računanja dobimo

$$e_\varphi = \frac{\sin^4 \varphi}{4 \cos^2 \varphi} = \frac{\varphi^4}{4} + \frac{\varphi^6}{12} + \mathcal{O}(\varphi^8).$$

- Napaka se deli s 16, če kot razpolovimo ($\varphi \ll 1$).
- Pravimo, da je (asimptotični) red aproksimacije enak 4.
- Isti red dobimo tudi v Taylorjevemu primeru (zakaj?).
- Napredek je v tem, da smo interpolirali dve točki in dve smeri tangente.
- S krivuljami višje stopnje lahko dosežemo še več.



Aproksimacije s kubično krivuljo

- Izberimo sedaj

$$\mathbf{p}_3(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_j B_j^3(t).$$

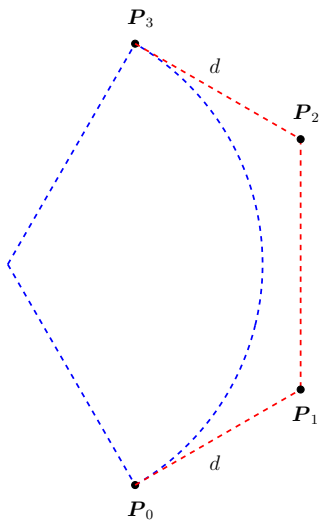
- Iz lastnosti Bézierovih krivulj sledi

$$\mathbf{P}_0 = [\cos \varphi, -\sin \varphi]^T,$$

$$\mathbf{P}_1 = [\cos \varphi, -\sin \varphi] + d [\sin \varphi, \cos \varphi]^T,$$

$$\mathbf{P}_2 = [\cos \varphi, \sin \varphi] + d [\sin \varphi, -\cos \varphi]^T,$$

$$\mathbf{P}_3 = [\cos \varphi, \sin \varphi]^T.$$



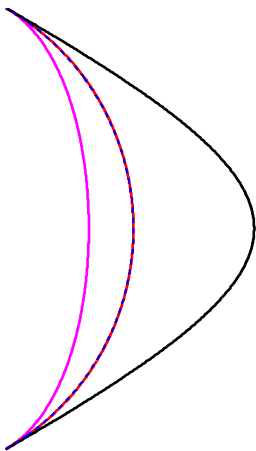
Slika: Skica aproksimacije s kubično Bézierovo krivuljo.

- Tokrat imamo še **svobodo izbire parametra d** .
- Različne izbire porodijo različne aproksimante.
- Parameter d izberemo tako, da zmanjšamo napako

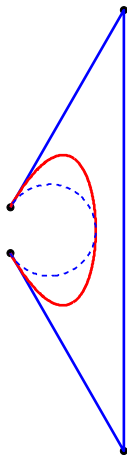
$$e_\varphi := \max_{t \in [0,1]} \left| \|\mathbf{p}_3(t)\|_2^2 - 1 \right|.$$

- Na voljo je več (smiselni) možnosti za d : zahtevamo denimo, da je

$$\|\mathbf{p}_3(1/2)\|_2^2 - 1 = 0.$$



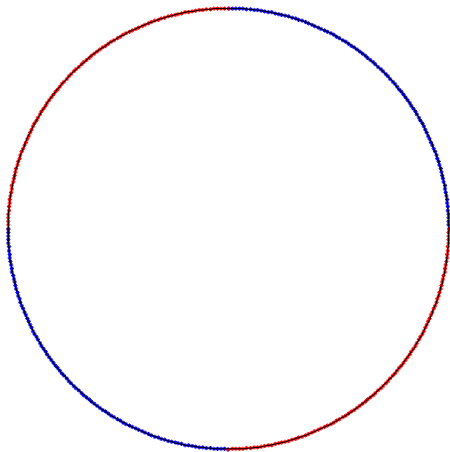
Slika: Različne aproksimacije loka s središčnim kotom $2\pi/3$ (modro črtkano) s kubično Bézierovo krivuljo: $d = 4/3 \tan(\varphi/2)$ (rdeče), $d = 1/2$ (roza) in $d = 3/2$ (črno).

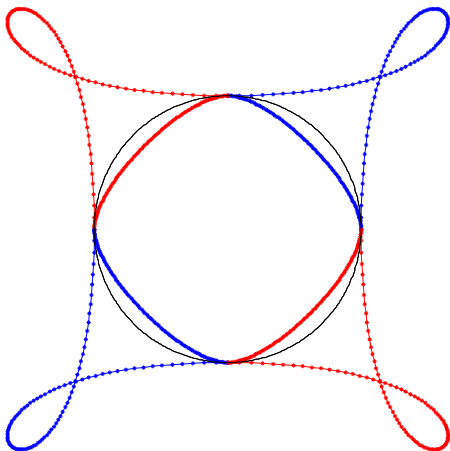


Slika: Aproximacije krožnega loka s središčnim kotom $\varphi = 5\pi/3$.

- Za aproksimante lahko izberemo krivulje višje stopnje.
- Analiza obstoja rešitve postane bistveno bolj zapletena.
- Dobimo nelinearne sisteme enačb za proste parametre.
- **Odprt problem:** za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja Bézierova krivulja stopnje n , ki interpolira robni točki in smeri tangent krožnega loka. Njen red aproksimacije je $2n$.

- Aproximante na posameznem segmentu lahko “lepimo” med seboj.
- Dobimo t.i. **zlepke**.
- V primeru krožnih lokov je lepljenje preprosto, saj aproximante le rotiramo za kot 2φ .
- Dobljeni zlepek je G^1 zvezen, včasih celo G^2 zvezen (sosednja segmenta imata isto ukrivljenost v stični točki (**ukrivljenost ni nujno 1!!!**)).





Slika: Aproksimacija **cele** enotske krožnice s kubičnim zlepkom sestavljenim iz 4 delov. Izbira parametra d ni optimalna. Prevelik d , zunanji zlepek, premajhen d , notranji zlepek.



Hvala za pozornost!