Kratek vpogled v zgodovino integracije

Marjan Jerman

21. september 2013

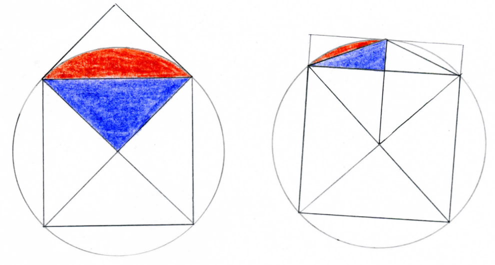
Poučevanje

- R. P. Burn, *Integration, a genetic introduction*, Nordisk Mat. Did., April 1999.
- O. Toeplitz, *The calculus, a genetic approach*, Chicago, 1963.

Izčrpavanje s pravilnimi večkotniki

`Antifon` (pribl. 5. stol. pr.Kr.): krog je pravilni večkotnik z neskončno stranicami. Zato je njegova ploščina sorazmerna kvadratu polmera.

$$p(\text{ostanka pri } 2^{n+1} \text{ kotniku}) < \tfrac{1}{2} p(\text{ostanka pri } 2^{n} \text{ kotniku})$$



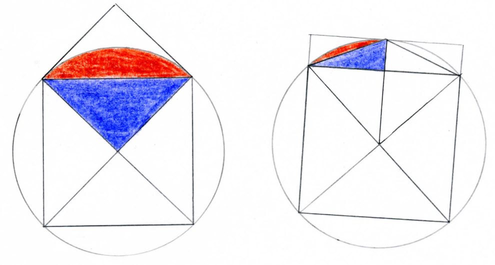
$$p(\text{včrtanega } 2^{n+1} \mathit{kotnika}) > (1 - \tfrac{1}{2^n}) p(\text{kroga})$$

`Bryson iz Herakleje` (5. stol. pr.Kr.) dodatno očrtal večkotnik.

Izčrpavanje s pravilnimi večkotniki

`Antifon` (pribl. 5. stol. pr.Kr.): krog je pravilni večkotnik z neskončno stranicami. Zato je njegova ploščina sorazmerna kvadratu polmera.

$$p(\text{ostanka pri } 2^{n+1} \text{ kotniku}) < \frac{1}{2} p(\text{ostanka pri } 2^{n} \text{ kotniku})$$



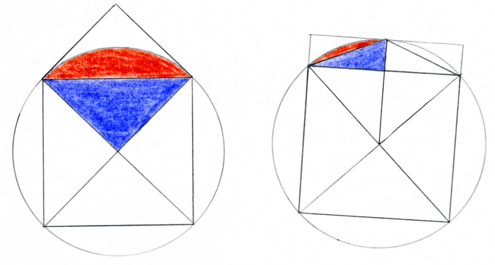
$$p(\text{včrtanega } 2^{n+1} \mathit{kotnika}) > (1 - \frac{1}{2^n}) p(\text{kroga})$$

`Bryson iz Herakleje` (5. stol. pr.Kr.) dodatno očrtal večkotnik.

Izčrpavanje s pravilnimi večkotniki

`Antifon` (pribl. 5. stol. pr.Kr.): krog je pravilni večkotnik z neskončno stranicami. Zato je njegova ploščina sorazmerna kvadratu polmera.

$$p(\text{ostanka pri } 2^{n+1} \text{ kotniku}) < \frac{1}{2} p(\text{ostanka pri } 2^{n} \text{ kotniku})$$



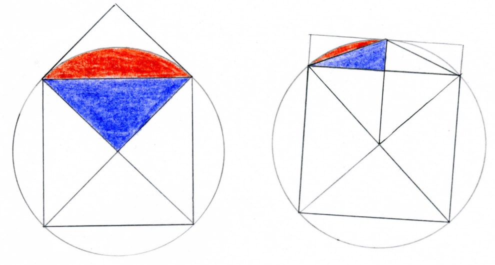
$$p(\text{včrtanega } 2^{n+1} \mathit{kotnika}) > (1 - \frac{1}{2^n}) p(\text{kroga})$$

`Bryson iz Herakleje` (5. stol. pr.Kr.) dodatno očrtal večkotnik.

Izčrpavanje s pravilnimi večkotniki

`Antifon` (pribl. 5. stol. pr.Kr.): krog je pravilni večkotnik z neskončno stranicami. Zato je njegova ploščina sorazmerna kvadratu polmera.

$$p(\text{ostanka pri } 2^{n+1} \text{ kotniku}) < \frac{1}{2} p(\text{ostanka pri } 2^{n} \text{ kotniku})$$



$$p(\text{včrtanega } 2^{n+1} kotnika) > (1 - \frac{1}{2^n}) p(\text{kroga})$$

`Bryson iz Herakleje` (5. stol. pr.Kr.) dodatno očrtal večkotnik.

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}} S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}}S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}} S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}}S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}} S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n \textit{kotnika}) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n \textit{kotnika})d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}}S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

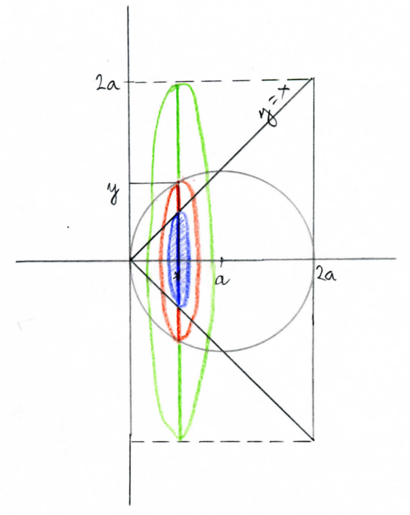
Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}} S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Dokaz s protislovjem

- Evdoks (405–355)
- p ploščina kroga s premerom 1. Naj bo d premer kroga in S njegova ploščina.
- *Dokaz s protislovjem:* recimo $pd^2 < S$.
- "Arhimedov aksiom": za dovolj veliko število n je potem $\frac{1}{2^{n-1}} S < S - pd^2$.
- Torej: $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S > pd^2$.
- Antifon: včrtani pravilni 2^n-kotnik pobere več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})S$.
- Zaradi tranzitivnosti neenakosti je $p(\text{včrtanega } 2^n kotnika) > pd^2$.
- Ploščina večkotnika, ki je včrtan krogu s premerom d je d^2 večja od večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1.
- Zato $pd^2 > p(\text{enotskemu krogu včrtanega } 2^n kotnika)d^2 > pd^2$

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

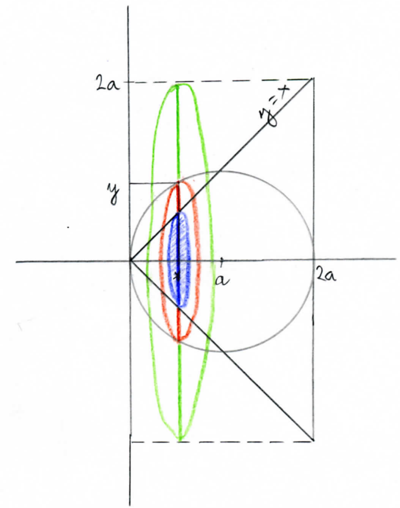
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi(2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

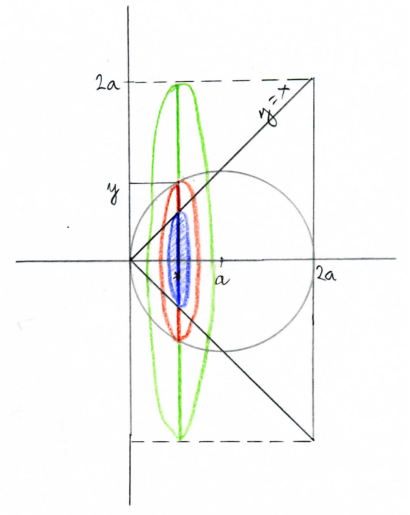
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi(2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

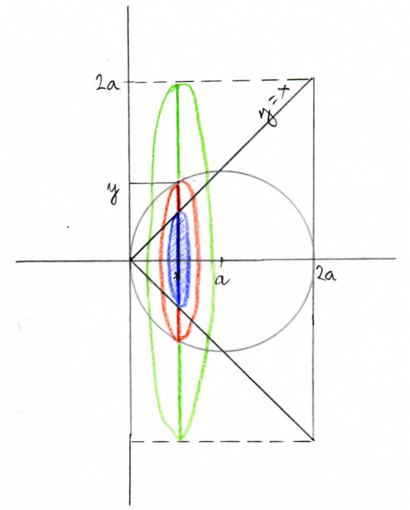
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi (2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

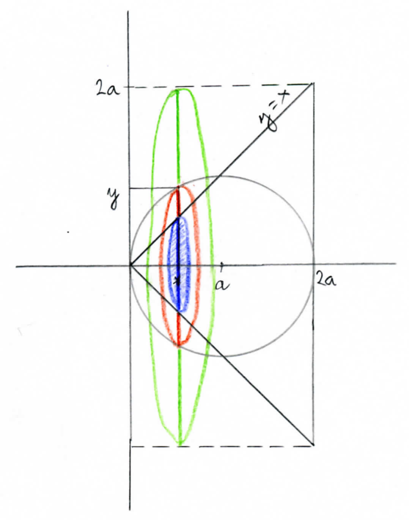
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi(2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

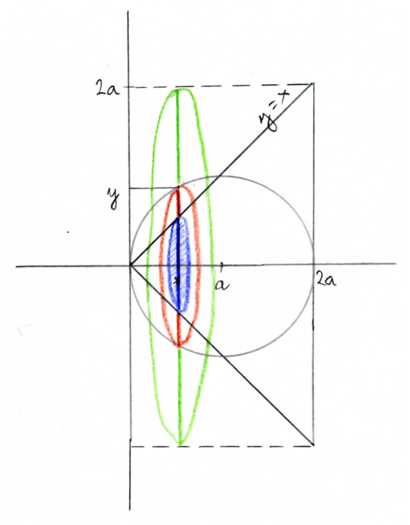
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi (2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

Arhimed (287–212): Prostornina krogle



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

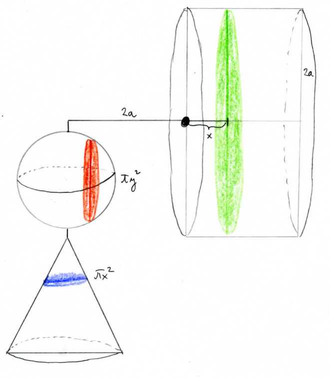
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$2a \cdot (\pi x^2 + \pi y^2) = x \cdot \pi (2a)^2$$

Fizikalna interpretacija enačbe z navorom

Ravnovesje, ko je: levo fiksna ročica $2a$, silo povzročata rezini krogov iz krogle in stožca, desno variabilna ročica x, silo povzroča rezina iz valja.

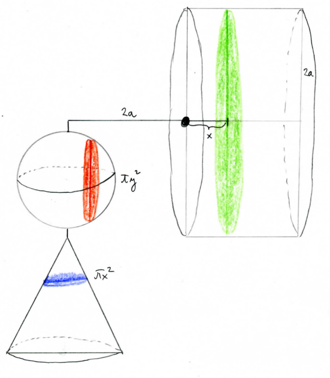
Interpretacija z navorom



Uporaba znanega težišča valja in znanih prostornin valja in stožca (Demokrit, 470–360):

$$2a \cdot \left(V_{\text{krogle}} + \frac{\pi(2a)^2 \cdot 2a}{3}\right) = a \cdot \pi(2a)^2 \cdot 2a$$

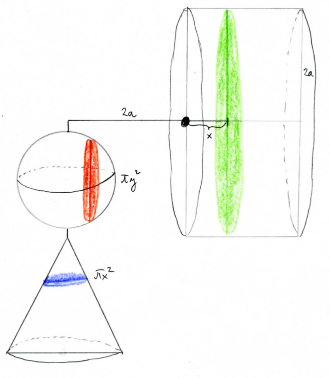
Interpretacija z navorom



Uporaba znanega težišča valja in znanih prostornin valja in stožca (`Demokrit`, 470–360):

$$2a\cdot\left(V_{\text{krogle}}+\frac{\pi(2a)^2\cdot 2a}{3}\right)=a\cdot\pi(2a)^2\cdot 2a$$

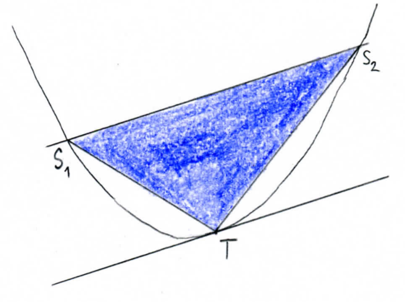
Interpretacija z navorom



Uporaba znanega težišča valja in znanih prostornin valja in stožca (Demokrit, 470–360):

$$2a \cdot \left(V_{\text{krogle}} + \frac{\pi(2a)^2 \cdot 2a}{3}\right) = a \cdot \pi(2a)^2 \cdot 2a$$

Arhimed: Kvadratura parabole



$S_1(a, a^2)$, $S_2(b, b^2)$

Tangenta vzporedna S_1S_2 skozi $T(x, x^2)$ ima naklon

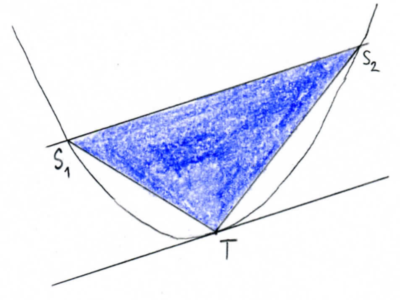
$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = b + a = 2x,$$

zato gre skozi razpolovišče $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.
Ploščina $\triangle S_1TS_2$ je

$$p_1 = (\frac{b-a}{2})^3$$

in pokrije več kot pol parabole pod S_1S_2.

Arhimed: Kvadratura parabole



$S_1(a, a^2)$, $S_2(b, b^2)$
Tangenta vzporedna S_1S_2 skozi $T(x, x^2)$ ima naklon

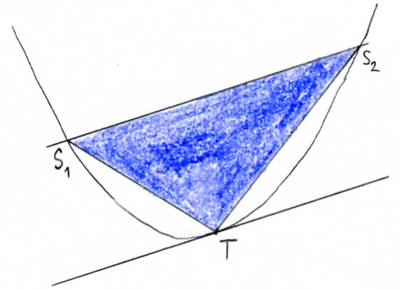
$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = b + a = 2x,$$

zato gre skozi razpolovišče $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.
Ploščina $\triangle S_1TS_2$ je

$$p_1 = (\frac{b-a}{2})^3$$

in pokrije več kot pol parabole pod S_1S_2.

Arhimed: Kvadratura parabole



$S_1(a, a^2)$, $S_2(b, b^2)$
Tangenta vzporedna S_1S_2 skozi $T(x, x^2)$ ima naklon

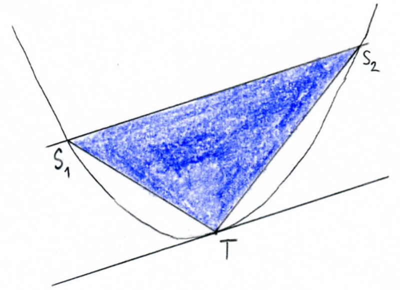
$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = b + a = 2x,$$

zato gre skozi razpolovišče $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.
Ploščina $\triangle S_1TS_2$ je

$$p_1 = (\frac{b-a}{2})^3$$

in pokrije več kot pol parabole pod S_1S_2.

Arhimed: Kvadratura parabole



$S_1(a, a^2)$, $S_2(b, b^2)$
Tangenta vzporedna S_1S_2 skozi $T(x, x^2)$ ima naklon

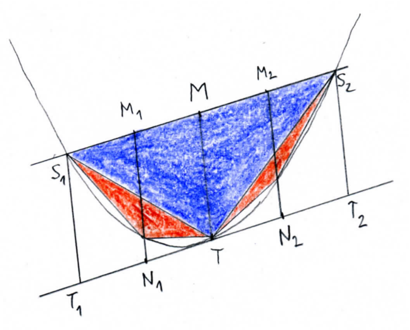
$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = b + a = 2x,$$

zato gre skozi razpolovišče $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.
Ploščina $\triangle S_1TS_2$ je

$$p_1 = (\frac{b-a}{2})^3$$

in pokrije več kot pol parabole pod S_1S_2.

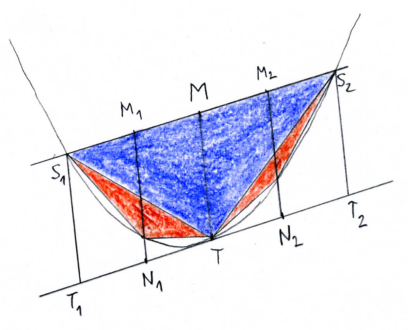
Kvadratura parabole



Ploščini p_2 rdečih trikotnikov sta 2^3 krat manjši od p_1 in skupaj pokrijeta več kot polovico ostanka. Skupna ploščina trikotnikov je

$$p_1 + 2 \cdot p_2 = p_1 + \frac{p_1}{4}.$$

Kvadratura parabole



Ploščini p_2 rdečih trikotnikov sta 2^3 krat manjši od p_1 in skupaj pokrijeta več kot polovico ostanka. Skupna ploščina trikotnikov je

$$p_1 + 2 \cdot p_2 = p_1 + \frac{p_1}{4}.$$

Kvadratura parabole

Induktivno nadaljujemo. Ploščina parabole pod $S_1 S_2$ je vsaj

$$p \geq p_1(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots) =$$

$$= p_1(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) \to \frac{4}{3}p_1.$$

Po drugi strani je

$$p \leq 2p_1, \; p \leq p_1 + 4p_2 = p_1 + \frac{1}{2}p_1, \; p \leq p_1 + 2p_2 + 8p_3, \ldots$$

$$p \leq p_1(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} + 2\frac{1}{4^n}) \to \frac{4}{3}p_1.$$

Zato je ploščina parabole pod $S_1 S_2$ enaka

$$p = \frac{4}{3}p_1.$$

Kvadratura parabole

Induktivno nadaljujemo. Ploščina parabole pod $S_1 S_2$ je vsaj

$$p \geq p_1(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots) =$$

$$= p_1(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) \to \frac{4}{3} p_1.$$

Po drugi strani je

$$p \leq 2p_1, \; p \leq p_1 + 4p_2 = p_1 + \frac{1}{2}p_1, \; p \leq p_1 + 2p_2 + 8p_3, \ldots$$

$$p \leq p_1(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} + 2\frac{1}{4^n}) \to \frac{4}{3} p_1.$$

Zato je ploščina parabole pod $S_1 S_2$ enaka

$$p = \frac{4}{3} p_1.$$

Kvadratura parabole

Induktivno nadaljujemo. Ploščina parabole pod $S_1 S_2$ je vsaj

$$p \geq p_1(1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2^3} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^3} + \ldots) =$$

$$= p_1(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \ldots) \to \tfrac{4}{3}p_1.$$

Po drugi strani je

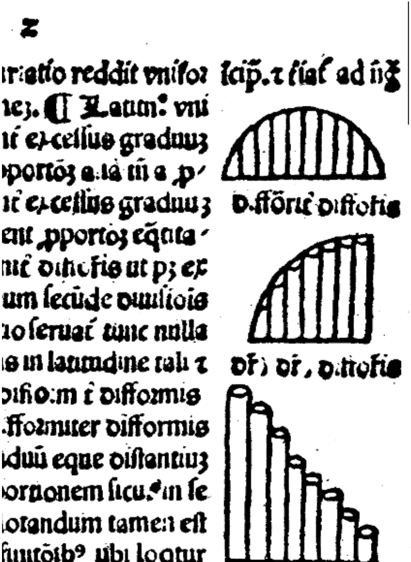
$$p \leq 2p_1,\ p \leq p_1 + 4p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}p_1,\ p \leq p_1 + 2p_2 + 8p_3, \ldots$$

$$p \leq p_1(1 + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{4^{n-1}} + 2\tfrac{1}{4^n}) \to \tfrac{4}{3}p_1.$$

Zato je ploščina parabole pod $S_1 S_2$ enaka

$$p = \tfrac{4}{3}p_1.$$

Nikolaj Oresme (1323–1382)


z

ıriatio reddit vniforı scip.⁊ fiat ad ing
ıe3. ❡ Latum: vni
ıt excessus graduū3
pportō3 e.lā tiā e p'
ıt excessus graduū3
eat pportō3 eqata'
nıt distātia ut p3 ex
um secūde diuisiōis
ıo seruat tunc nulla
ıs in latitudine tali ⁊
difor:m ⁊ difformis
fformiter difformis
duū eque distantiū3
portionem sicu:⁹ in se
otandum tamē est
fumitōib⁹ ubi loquitur

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Osnovni izrek analize

- Grafično predstavi, kako je neka količina odvisna od druge: *intensio* (npr. temperatura), *extensio* (npr. raztezek). Grafična interpretacija: *latitudo*, *longitudo*.
- Nariše to, čemur danes pravimo graf odvoda.
- Ploščina pod grafom odvoda je enaka spremembi odvisne spremenljivke. Z današnjimi simboli: funkcija $y = f'(x)$ med $x = a$ in $x = b$ določa ploščino $f(b) - f(a)$,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Luca Valerio (1552–1618)

- Izračunal težišča in prostornine teles.
- Pomagal si je z Evdoksovo metodo izčrpanja.
- Obravnaval rotacijska telesa in telesa z veliko simetrije. Pred Cavalierijem odkril “Cavalierijevo” načelo.
- Uporabljal koncept limite.

Luca Valerio (1552–1618)

- Izračunal težišča in prostornine teles.
- Pomagal si je z Evdoksovo metodo izčrpanja.
- Obravnaval rotacijska telesa in telesa z veliko simetrije. Pred Cavalierijem odkril "Cavalierijevo" načelo.
- Uporabljal koncept limite.

Luca Valerio (1552–1618)

- Izračunal težišča in prostornine teles.
- Pomagal si je z Evdoksovo metodo izčrpanja.
- Obravnaval rotacijska telesa in telesa z veliko simetrije. Pred Cavalierijem odkril “Cavalierijevo” načelo.
- Uporabljal koncept limite.

Luca Valerio (1552–1618)

- Izračunal težišča in prostornine teles.
- Pomagal si je z Evdoksovo metodo izčrpanja.
- Obravnaval rotacijska telesa in telesa z veliko simetrije. Pred Cavalierijem odkril "Cavalierijevo" načelo.
- Uporabljal koncept limite.

Simon Stevin (1548–1620)

- Brysonova ideja včrtavanja in očrtavanja pravilnih večkotnikov, ki pridejo ploščinsko poljubno blizu.
- Sklep: Če sta količini različni, se razlikujeta za končno konstanto. Če torej lahko prideta poljubno blizu, sta enaki.

Simon Stevin (1548–1620)

- Brysonova ideja včrtavanja in očrtavanja pravilnih večkotnikov, ki pridejo ploščinsko poljubno blizu.
- Sklep: Če sta količini različni, se razlikujeta za končno konstanto. Če torej lahko prideta poljubno blizu, sta enaki.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga “dodatki k Arhimedu“, izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga “dodatki k Arhimedu“, izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga “dodatki k Arhimedu“, izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi Galileo (1564–1642), Cavalieri (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

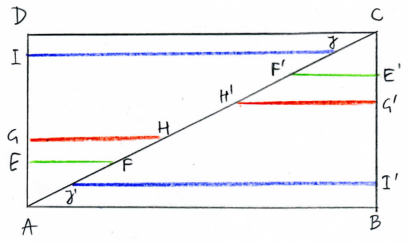
Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi Galileo (1564–1642), Cavalieri (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

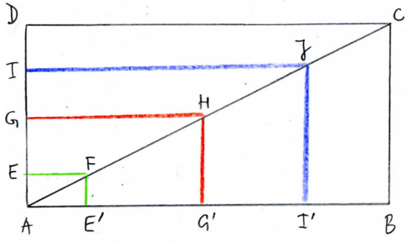
Johannes Kepler (1571–1630)

- Grki izrinejo neskončno iz matematike: Zenovi paradoksi. Plutarhov opis Demokritove dileme o krogih, ki jih dobimo, ko stožec režemo z vzporednimi ravninami.
- Metoda za merjenje prostornine soda. Knjiga "dodatki k Arhimedu", izračuna prostornine novih 87 teles.
- Nedefiniran pojem *nedeljive količine*: krog sestavljen iz trikotnikov, ki imajo neskončno majhno osnovnico in za kraka polmer; stožec sestavljen iz krogov, ...
- Tudi `Galileo` (1564–1642), `Cavalieri` (1598–1647) uporabljata prav tako slabo definirane *infitezimalne količine*.

Torricellijev (1608–1647) paradoks

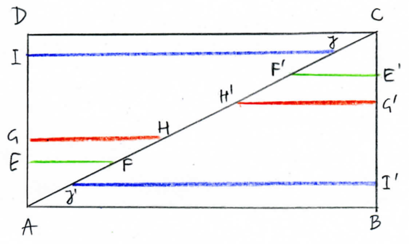


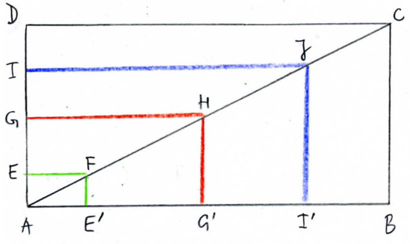
$AB = 2\,CD$, $EF = E'F'$,
$GH = G'H'$, $IJ = I'J' \Rightarrow$
$p_{ACD} = p_{ABC}$



$AB = 2\,CD$, $EF = 2\,E'F$,
$GH = 2\,G'H$, $IJ = 2\,I'J \Rightarrow$
$p_{ACD} = 2p_{ABC}$

Torricellijev (1608–1647) paradoks

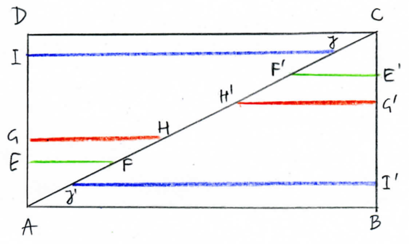


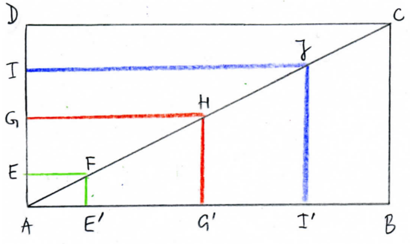


$AB = 2\,CD$, $EF = E'F'$,
$GH = G'H'$, $IJ = I'J' \Rightarrow$
$p_{ACD} = p_{ABC}$

$AB = 2\,CD$, $EF = 2\,E'F$,
$GH = 2\,G'H$, $IJ = 2\,I'J \Rightarrow$
$p_{ACD} = 2p_{ABC}$

Torricellijev (1608–1647) paradoks





$AB = 2\,CD$, $EF = E'F'$,
$GH = G'H'$, $IJ = I'J' \Rightarrow$
$p_{ACD} = p_{ABC}$

$AB = 2\,CD$, $EF = 2\,E'F$,
$GH = 2\,G'H$, $IJ = 2\,I'J \Rightarrow$
$p_{ACD} = 2p_{ABC}$

Ploščina pod krivuljami $y = x^n$, $y = \sqrt[m]{x^n}$

- Descartes (1596–1650): koordinatni sistem.
- Fermat (1601–1665), Roberval (1602–1675) med korespodenco izračunata ploščini pod $y = x^2$ in $y = x^3$. Posplošitev na $y = x^n$ in inverzne funkcije $y = \sqrt[n]{x}$.
- S problemom integracije funkcije $y = \sqrt[m]{x^n}$ so se ukvarjali še Torricelli, Barrow (1630–1677), Pascal (1623–1662) in Wallis (1616–1703).

Ploščina pod krivuljami $y = x^n$, $y = \sqrt[m]{x^n}$

- Descartes (1596–1650): koordinatni sistem.
- Fermat (1601–1665), Roberval (1602–1675) med korespodenco izračunata pločini pod $y = x^2$ in $y = x^3$.
  Posplošitev na $y = x^n$ in inverzne funkcije $y = \sqrt[n]{x}$.
- S problemom integracije funkcije $y = \sqrt[m]{x^n}$ so se ukvarjali še Torricelli, Barrow (1630–1677), Pascal (1623–1662) in Wallis (1616–1703).

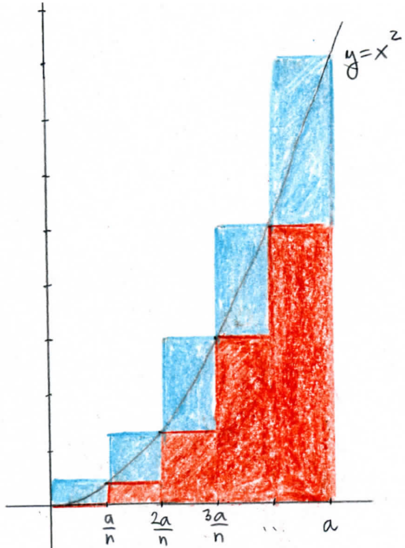
Ploščina pod krivuljami $y = x^n$, $y = \sqrt[m]{x^n}$

- Descartes (1596–1650): koordinatni sistem.
- Fermat (1601–1665), Roberval (1602–1675) med korespodenco izračunata ploščini pod $y = x^2$ in $y = x^3$. Posplošitev na $y = x^n$ in inverzne funkcije $y = \sqrt[n]{x}$.
- S problemom integracije funkcije $y = \sqrt[m]{x^n}$ so se ukvarjali še Torricelli, Barrow (1630–1677), Pascal (1623–1662) in Wallis (1616–1703).

Ploščina pod krivuljami $y = x^n$, $y = \sqrt[m]{x^n}$

- Descartes (1596–1650): koordinatni sistem.
- Fermat (1601–1665), Roberval (1602–1675) med korespodenco izračunata pločini pod $y = x^2$ in $y = x^3$. Posplošitev na $y = x^n$ in inverzne funkcije $y = \sqrt[n]{x}$.
- S problemom integracije funkcije $y = \sqrt[m]{x^n}$ so se ukvarjali še Torricelli, Barrow (1630–1677), Pascal (1623–1662) in Wallis (1616–1703).

Ploščina pod $y = x^2$



$$S = \frac{a}{n}\left(0 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \dots\right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right)$$

$$Z = \frac{a}{n}\left(\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \dots\right.$$

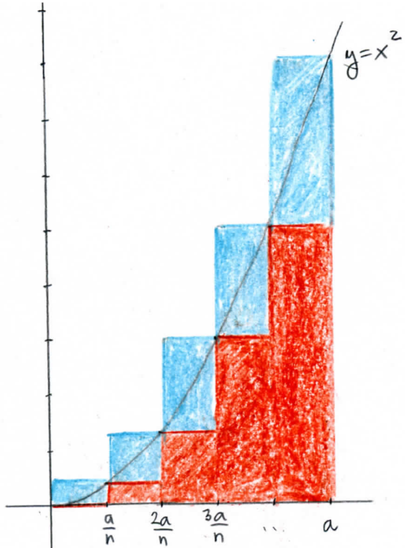
$$\left. + \dots + \left(\frac{na}{n}\right)^2\right)$$

$$\frac{a^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) = S < P <$$

$$< Z = \frac{a^3}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Ploščina pod $y = x^2$



$$S = \frac{a}{n}\Big(0 + \big(\tfrac{a}{n}\big)^2 + \big(\tfrac{2a}{n}\big)^2 + \dots$$

$$+ \dots + \big(\tfrac{(n-1)a}{n}\big)^2\Big)$$

$$Z = \frac{a}{n}\Big(\big(\tfrac{a}{n}\big)^2 + \big(\tfrac{2a}{n}\big)^2 + \dots$$

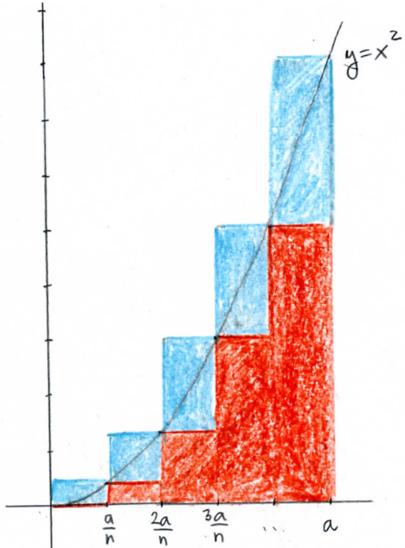
$$+ \dots + \big(\tfrac{na}{n}\big)^2\Big)$$

$$\frac{a^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) = S < P <$$

$$< Z = \frac{a^3}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Ploščina pod $y = x^2$



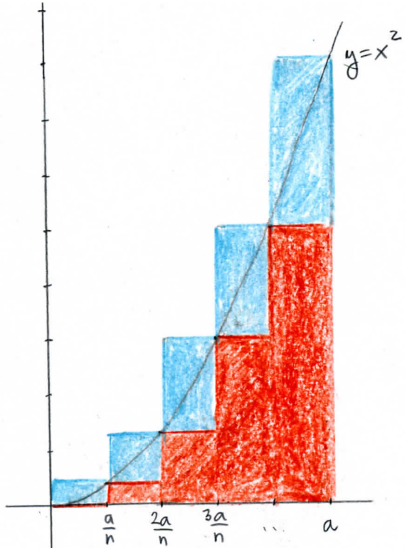
$$S = \frac{a}{n}\left(0 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \dots + \dots + \left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right)$$

$$Z = \frac{a}{n}\left(\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \dots + \dots + \left(\frac{na}{n}\right)^2\right)$$

$$\frac{a^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) = S < P < \\ < Z = \frac{a^3}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Ploščina pod $y = x^2$



$$S = \frac{a}{n}(0 + (\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + (\tfrac{(n-1)a}{n})^2)$$

$$Z = \frac{a}{n}((\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + \ldots$$

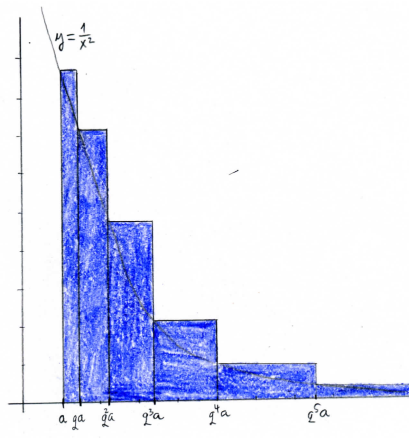
$$+ \ldots + (\tfrac{na}{n})^2)$$

$$\frac{a^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) = S < P <$$

$$< Z = \frac{a^3}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Fermat: Ploščina pod $y = \frac{1}{x^2}$



$$Z = (qa-a)\tfrac{1}{a^2} + (q^2a-qa)\tfrac{1}{(qa)^2} +$$

$$+(q^3a - q^2a)\tfrac{1}{(q^2a)^2} + \ldots =$$

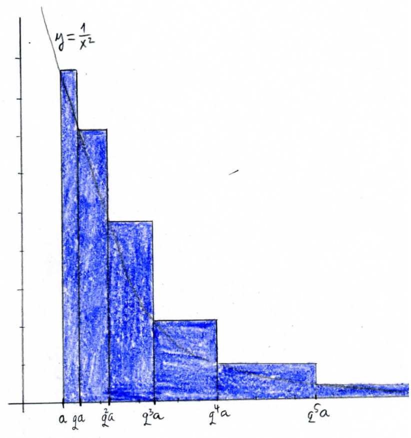
$$= \tfrac{q-1}{a}\left(1 + \tfrac{1}{q} + (\tfrac{1}{q})^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{q-1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{a}$$

$$q \to 1$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a}$$

Fermat: Ploščina pod $y = \frac{1}{x^2}$



$$Z = (qa-a)\frac{1}{a^2} + (q^2a-qa)\frac{1}{(qa)^2} +$$

$$+(q^3a - q^2a)\frac{1}{(q^2a)^2} + \ldots =$$

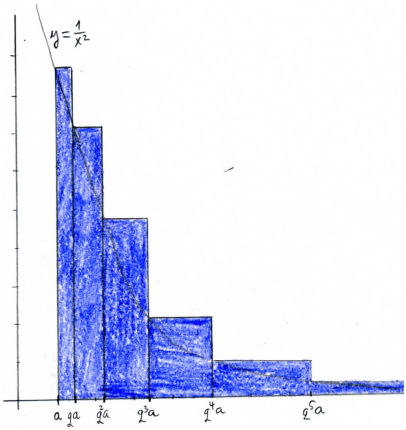
$$= \frac{q-1}{a}\left(1 + \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{q-1}{a} \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{a}$$

$$q \to 1$$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{a}$$

Fermat: Ploščina pod $y = \frac{1}{x^2}$



$$Z = (qa-a)\frac{1}{a^2} + (q^2a-qa)\frac{1}{(qa)^2} +$$

$$+(q^3a-q^2a)\frac{1}{(q^2a)^2} + \ldots =$$

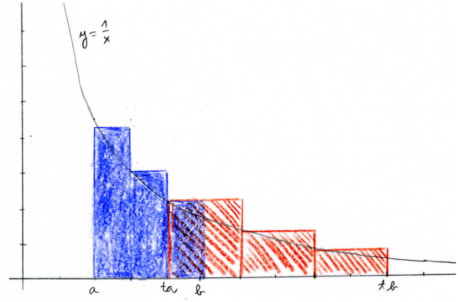
$$= \frac{q-1}{a}\left(1+\frac{1}{q}+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\ldots\right) =$$

$$= \frac{q-1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{a}$$

$$q \to 1$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a}$$

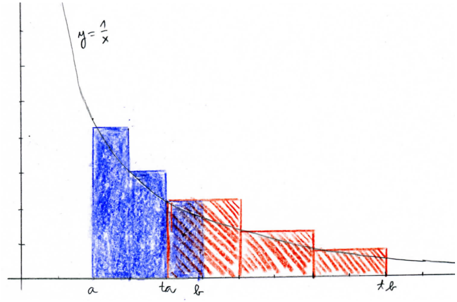
Gregoire de Saint-Vincent (1584–1667)



$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ta}^{tb} \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x}$$

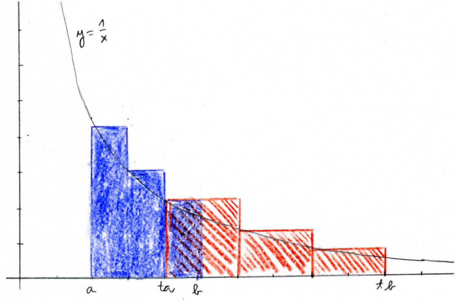
Gregoire de Saint-Vincent (1584–1667)



$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ta}^{tb} \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{a} \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{a} \frac{dx}{x} + \int_1^{b} \frac{dx}{x}$$

Gregoire de Saint-Vincent (1584–1667)



$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_{ta}^{tb} \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x}$$

Računanje z infitezimalnimi količinami

- `Leibniz` (1646–1716): operacije z infitezimalnimi količinami, oznaka za integral.
- `Jakob, Johann Bernoulli` (1655–1705, 1667–1748): današnje ime za integral.
- `Newton` (1643–1727): študira odvod in posredno pride do integrala.

Računanje z infitezimalnimi količinami

- Leibniz (1646–1716): operacije z infitezimalnimi količinami, oznaka za integral.
- Jakob, Johann Bernoulli (1655–1705, 1667–1748): današnje ime za integral.
- Newton (1643–1727): študira odvod in posredno pride do integrala.

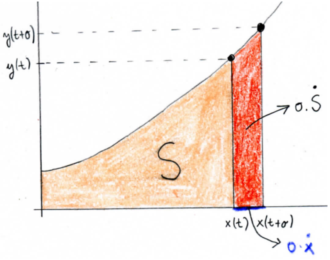
Računanje z infitezimalnimi količinami

- `Leibniz` (1646–1716): operacije z infitezimalnimi količinami, oznaka za integral.
- `Jakob, Johann Bernoulli` (1655–1705, 1667–1748): današnje ime za integral.
- `Newton` (1643–1727): študira odvod in posredno pride do integrala.

Newton: Osnovni izrek analize

Za razliko od Leibniza, ki je obravnaval $y = y(x)$, Newton vzame $x = x(t)$, $y = y(t)$.

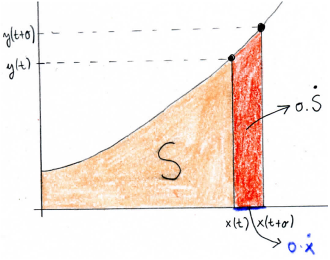
$\dot{S}$ sprememba ploščine, o kratek trenutek v času: $o\dot{S} \approx y \cdot o\dot{x}$.



$$\frac{\dot{S}}{\dot{x}} = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x y\,dx = y$$

Newton: Osnovni izrek analize

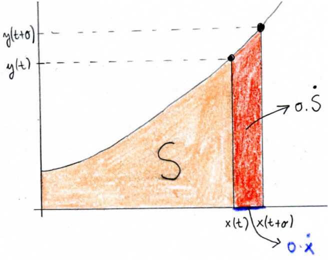
Za razliko od Leibniza, ki je obravnaval $y = y(x)$, Newton vzame $x = x(t)$, $y = y(t)$.
$\dot{S}$ sprememba ploščine, o kratek trenutek v času: $o\dot{S} \approx y \cdot o\dot{x}$.



$$\frac{\dot{S}}{\dot{x}} = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x y\,dx = y$$

Newton: Osnovni izrek analize

Za razliko od Leibniza, ki je obravnaval $y = y(x)$, Newton vzame $x = x(t)$, $y = y(t)$.
$\dot{S}$ sprememba ploščine, o kratek trenutek v času: $o\dot{S} \approx y \cdot o\dot{x}$.



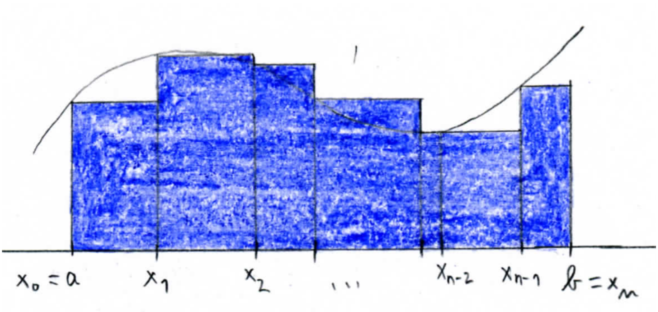
$$\frac{\dot{S}}{\dot{x}} = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x y\,dx = y$$

Cauchyjeva definicija integrala funkcije

Cauchy (1789–1857): $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = x_n = b$

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

$$\lim_{\max_i (x_{i+1} - x_i) \to 0} S$$



Posplošitve

- Zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu so integrabilne v Cauchyjevem smislu.
- Riemann (1826–1860): posplošeni integral.
- Darboux (1842–1917): spodnje, zgornje meje.
- Lebesgue (1875–1941), Stieltjes (1856–1894): teorija mere, veliko več funkcij integrabilnih.

Posplošitve

- Zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu so integrabilne v Cauchyjevem smislu.
- `Riemann` (1826–1860): posplošeni integral.
- `Darboux` (1842–1917): spodnje, zgornje meje.
- `Lebesgue` (1875–1941), `Stieltjes` (1856–1894): teorija mere, veliko več funkcij integrabilnih.

Posplošitve

- Zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu so integrabilne v Cauchyjevem smislu.
- `Riemann` (1826–1860): posplošeni integral.
- `Darboux` (1842–1917): spodnje, zgornje meje.
- `Lebesgue` (1875–1941), `Stieltjes` (1856–1894): teorija mere, veliko več funkcij integrabilnih.

Posplošitve

- Zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu so integrabilne v Cauchyjevem smislu.
- `Riemann` (1826–1860): posplošeni integral.
- `Darboux` (1842–1917): spodnje, zgornje meje.
- `Lebesgue` (1875–1941), `Stieltjes` (1856–1894): teorija mere, veliko več funkcij integrabilnih.