Za let puščice po izstrelitvi iz loka imamo štiri možne modele.

SŠ: konica puščice je njen najtežji del, ki 'vleče' preostanek za sabo, poleg tega pa direktno zadane tarčo; računamo, kot da bi bila puščica masna točka; model upošteva samo silo teže $\vec{F}_g = (0, -mg)$; koordinatni sistem postavimo tako, da je točka $(0,0)$ točno v konici puščice takrat, ko je lok napet; ker je v tem primeru $x_0 = y_0 = 0$, iz Newtonovega zakona sledi enačba gibanja

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

DIPL: v resnici je tudi pri streljanju na razdaljah do 100 metrov vpliv upora zraka zelo opazen; če predpostavimo, da je upor zraka linearen, je sila upora obrnjena v nasprotno smer kot hitrost, oziroma

$$\vec{F}_u = (-kx'(t), -ky'(t)).$$

Skupna sila, upoštevana v modelu, je torej enaka

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_u = (-kx'(t), -mg - ky'(t)) = m\vec{a} = (mx''(t), my''(t))$$

kjer je k koeficient upora. Dobimo dve ločeni diferencialni enačbi,

$$\begin{aligned} mx''(t) &= -kx'(t) \\ my''(t) &= -mg - ky'(t) \end{aligned}$$

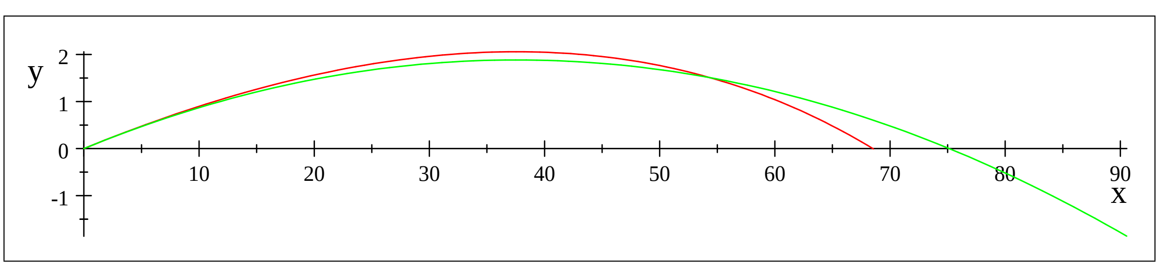
ki sta dovolj enostavni, da ju zajema snov Matematike 1. Njuni rešitvi sta

$$\begin{aligned} x(t) &= A + Be^{-\frac{k}{m}t} \\ y(t) &= -\frac{1}{k^2}\left(-gm^2 + gktm + Ck\right) + De^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

Če upoštevamo še fizikalne podatke, dobimo

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mv_0\cos\alpha}{k} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \\ &= tv_0\cos\alpha - \frac{1}{2}\frac{k}{m}t^2 v_0\cos\alpha + O\left(t^3\right) \\ y(t) &= -\frac{gm}{k}t + \left(\frac{gm^2}{k^2} + \frac{mv_0}{k}\sin\alpha\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ &= v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}\left(g + \frac{kv_0}{m}\sin\alpha\right)t^2 + O\left(t^3\right) \end{aligned}$$

Primer takega grafa je



MAG: Model še vedno ostaja točkast, a puščica je hiter objekt in upor zraka moramo vzeti kot kvadratičen. V tem primeru je velikost upora sorazmerna z $v^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$, kar pomeni, da se v obeh enačbah, ki izhajata iz Newtonovega zakona, pojavita obe spremenljivki x in y. Dobimo sklopljen sistem dveh nelinearnih enačb, ki ga lahko (približno) rešujemo zgolj z numeričnimi metodami. Pri realnih tekmovalnih razdaljah (5m-90m) v disciplinah, ki jih priznava FITA, je razlika med linearnim in kvadratičnim modelom v praksi precej nepomembna.

DR: Z metodo končnih elementov in zelo zmogljivim osebnim računalnikom lahko puščico modeliramo kot dejanski 3D objekt, upoštevamo različno strukturo in obliko sestavnih delov (cevka, konica, jahač, peresa), upoštevamo tokove zraka, morebiten vzgon vetra, dež ipd.

Od zdaj naprej se omejimo na parabolični model. Za praktični primer bomo vzeli podatke

$$\begin{aligned} m &= 20 \text{ g} \\ v_0 &= 70 \text{ m/s} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Splošna enačba parabole leta, ko lok dvignemo za kot α, je enaka

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\
y(t) &= v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 70t \cos\alpha \\
y(t) &= 70t \sin\alpha - 4.905t^2
\end{aligned}
$$

Izračunati želimo začetne kote α, pri katerih bo puščica zadela tarčo na razdalji D, na primer

$$D = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60$$

Za tarčo predpostavljamo, da je njena sredina v višini puščice. To pomeni, da bo v nekem času t, puščica zadela točko $(D, 0)$, od koder dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
v_0 t \cos\alpha &= D \\
v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2 &= 0
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
\begin{aligned}
70t \cos\alpha &= 20 \\
70t \sin\alpha - 4.905t^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Ta sistem ima rešitev

$$\sin 2\alpha = \frac{gD}{v_0^2}$$

oziroma

$$t = 0.286 \text{ s}, \ \alpha = 0.02 \approx 1.146^\circ$$

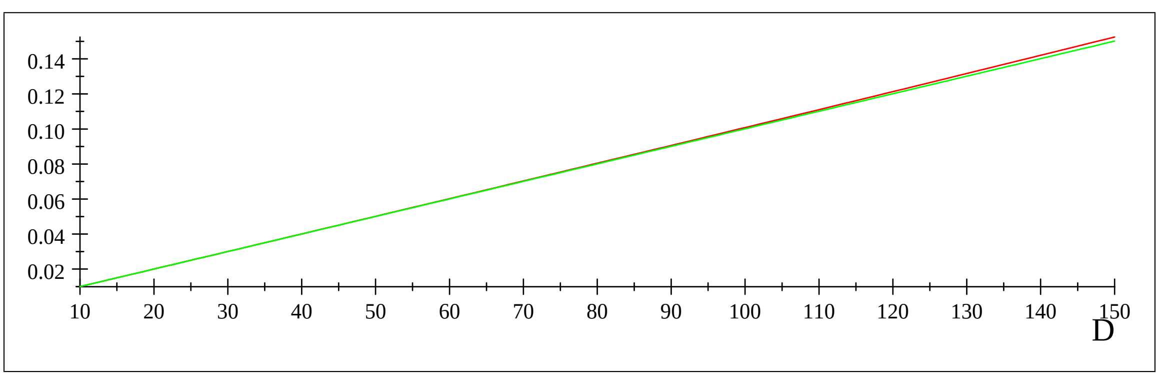
Na ta način si lahko naredimo tabelo za tekmovalne razdalje (pri $v_0 = 70$ m/s)

razdalja do tarče	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
kot izstrelitve	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.055	0.060

Linearnost tabele je navidezna, ker upoštevamo samo tri decimalke rešitve, v praksi pa jo mnogi trenerji učijo kot dejstvo. Graf funkcije

$$\sin 2\alpha = \frac{9.81 \cdot D}{70^2}$$

je v resnici zelo blizu premice



teoretično pa je funkcija enaka

$$1.\,001 \times 10^{-3} D + 6.\,687\,1 \times 10^{-10} D^3 + 1.\,206\,1 \times 10^{-15} D^5 + O\left(D^7\right)$$

Praktični problem: pri FITA disciplini Arrowhead (svetovno prvenstvo da, olimpijske igre ne) so tarče postavljene po razgibanem terenu, zato streljamo tudi navzgor in navzdol. Denimo, da imamo na merilni napravi narisane oznake za streljanje na razdaljah 10m, 15m, ... 60m.

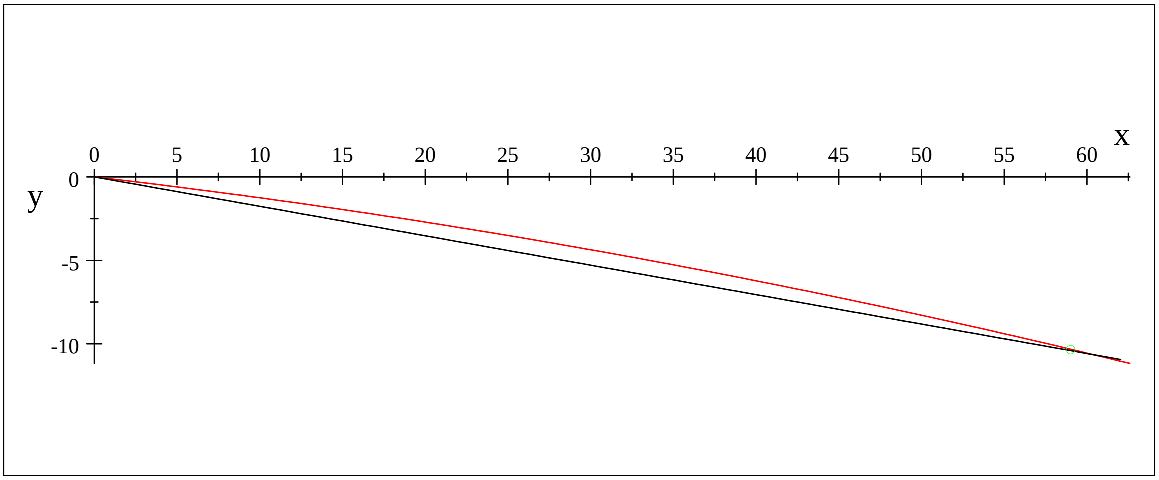
Na tekmovanju moramo ustreliti v tarčo, ki je oddaljena 60m (zračne razdalje), a je postavljena na pobočje, katerega naklon je 10^0 glede na horizontalo. Če merek postavimo na oznako 60, bomo zgrešili (to ve vsak, ki je kdaj tekmoval v tej disciplini). Razlog nam pokaže že SŠ model. V tabeli zgoraj piše, da moramo na ravnini ustreliti pod kotom

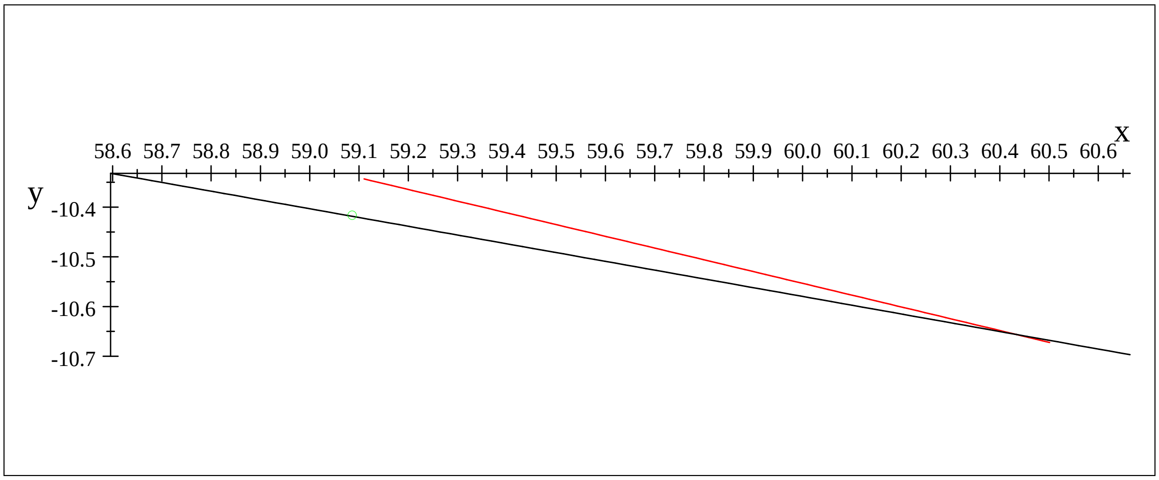
$$\alpha = 0.06 = 3.438^0.$$

Ker je tarča na pobočju navzdol, bomo glede na horizontalo ustrelili pod kotom

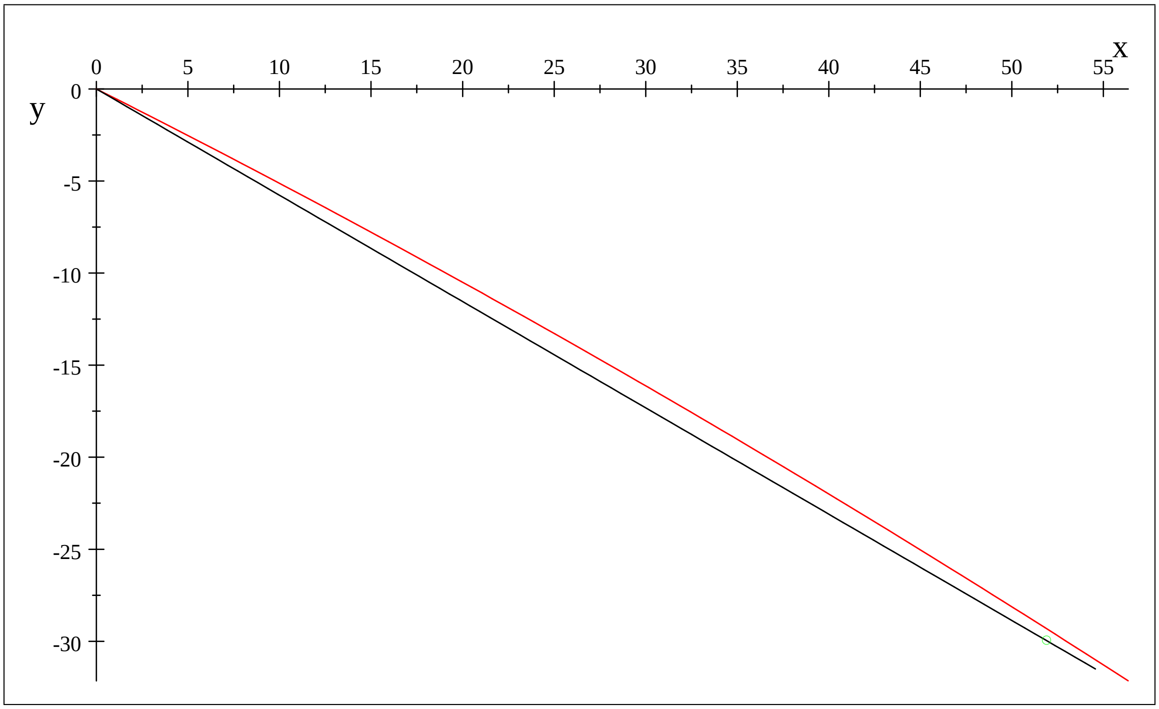
$$-10^0 + 3.438^0 = -6.562^0$$

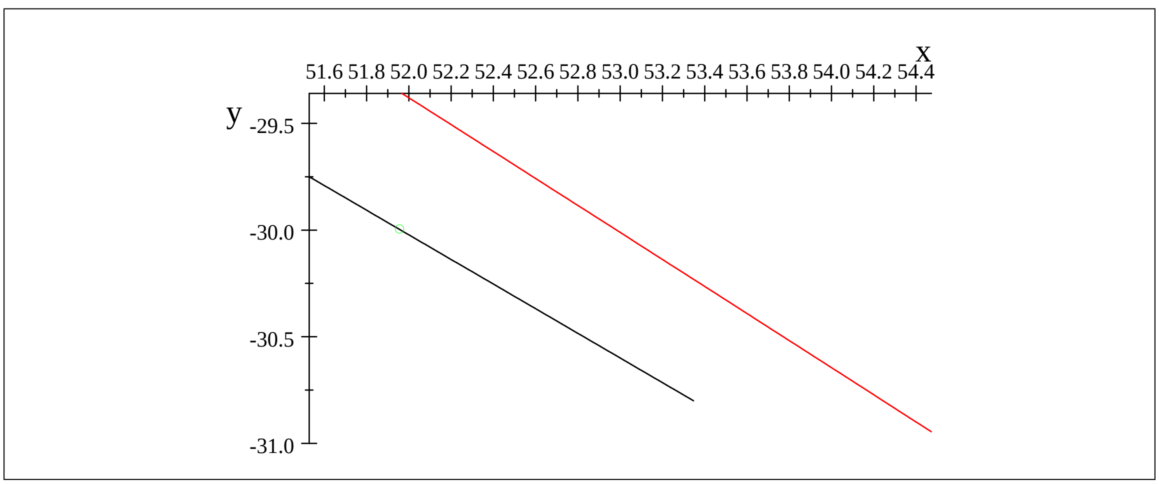
Enačbe gibanja nam pokažejo, da bo krivulja strela enaka





Če je pobočje bolj strmo, na primer 30^0, je napaka še večja.





Prava pozicija merka je določena z enačbama

$$\begin{aligned}70t\cos\alpha &= 60\cos\frac{-\pi}{6} = 51.962\\ 70t\sin\alpha - 4.905t^2 &= 60\sin\frac{-\pi}{6} = -30.0\end{aligned}$$

katerih rešitev je $t = 0.833\,85, \alpha = -0.472\,98$. Ker je naklon pobočja enak $\beta = \frac{-\pi}{6} = -0.523\,60$. Razlika je $0.523\,60 - 0.472\,98 = 0.050\,62$. Glede na praktično linearno zvezo med kotom izstrelitve in razdaljo sklepamo, da moramo merek namestiti med oznaki 50m in 51m.

Projekt: različni loki (otroški, mladinski, ženski, moški, ukrivljenji, sestavljeni, ...) imajo različne hitrosti izstrelitve. Za vsako od hitrosti $v_0 = 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$ m/s izdelaj tabelo korekcij, ki prikazuje nastavitve merka na merilni napravi glede na naklon pobočja in razdaljo do tarče; na primer

v=70m/s	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$+45^0$											
$+40^0$											
$+35^0$											
$+30^0$											
$+25^0$											
$+20^0$											
$+15^0$											
$+10^0$											
$+5^0$											
0^0	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
-5^0											
-10^0											
-15^0											
-20^0											
-25^0											
-30^0											50.6
-35^0											
-40^0											
-45^0											

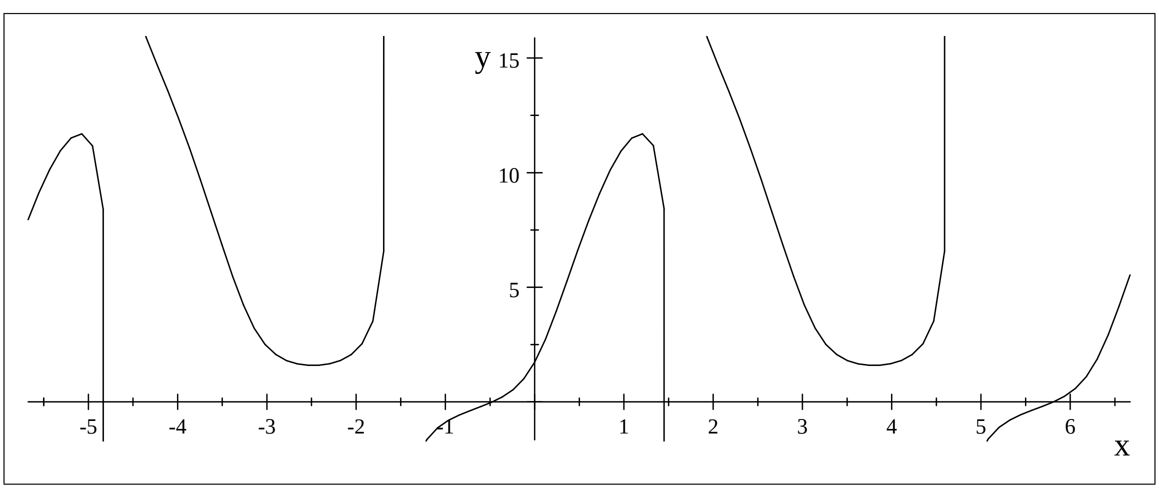
Možen način reševanja s pomočjo računalnika je

$$\begin{aligned} 70t\cos\alpha &= 51.962 \\ 70t\sin\alpha - 4.905t^2 &= -30.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{0.742\,31}{\cos\alpha} \\ t &= 7.135\,6\sin\alpha + 0.101\,94\sqrt{3038.6 - 2450\cos 2\alpha} \end{aligned}$$

$$0 = 7.\,135\,6\sin\alpha + 0.101\,94\sqrt{3038.6 - 2450\cos 2\alpha} - \frac{0.742\,31}{\cos\alpha}$$

Ničlo poiščemo iz grafa



Z malo spretnosti lahko poskusimo najprej z eksplicitnim računanjem časa t.

$$\begin{aligned} 70t\cos\alpha &= 51.962 \\ 70t\sin\alpha - 4.905t^2 &= -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{0.742\,31}{t} \\ \sin\alpha &= \frac{4.905t^2 - 30}{70t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0.742\,31^2}{t^2} + \frac{(0.07t^2 - 0.428\,57)^2}{t^2} &= 1 \\ 0.742\,31^2 + (0.07t^2 - 0.428\,57)^2 &= t^2 \\ 0.742\,31^2 + (0.07A - 0.428\,57)^2 &= A \\ 0.004\,9A^2 - 0.06A + 0.734\,7 &= A \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tretja možnost je poskušanje z risanjem balističnih krivulj, dokler ne 'zadenemo tarče' v obliki zelenega krogca na ekranu.