Urejenost in mreže

Karin Cvetko Vah

1 Urejenost

Kaj imajo skupnega spodnji primeri?

1. $0 < 1$ in $1 < 10^{23}$.
2. Sestrični imata skupnega starega očeta.
3. Planeti našega osončja urejeni po oddaljenosti od Sonca so: Merkus, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun.
4. Nobena od množic $\{1, 2, 4\}$ in $\{2, 3, 5\}$ ni podmnožica druge, sta pa obe vsebovani v množici $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

V vseh štirih primerih imamo opravka z urejanjem oziroma urejenostjo. Če nam je v vsakdanjem življenju bližja stroga urejenost (ne vključuje enakosti), imamo v matematiki praviloma raje ne-strogo urejenost (vključuje tudi enakost).

Pravimo, da je relacija $\leq$ na množici X relacija *delne urejenosti*, če zadošča naslednjim lastnostim:

Refleksivnost: Za vsak $x \in X$ velja $x \leq x$.

Tranzitivnost: Za poljubne $x, y, z \in X$ velja, da iz $x \leq y$ in $y \leq z$ sledi $x \leq z$.

Antisimetričnost: Za poljubna $x, y \in X$ iz $x \leq y$ in $y \leq x$ sledi $x = y$.

Kadar je $\leq$ relacija delne urejenosti na množici X, pravimo, da je množica X *delno urejena*, oziroma da je par $(X, \leq)$ *delna urejenost*.

Oglejmo si nekaj zgledov delno urejenih množic.

Zgledi 1. *1.* Hitro se lahko prepričamo, da je množica $\mathbb{N}$ delno urejena z relacijo $\leq$. Podobno je tudi množica $\mathbb{R}$ delno urejena z relacijo $\leq$.

2. Naj bo X poljubna množica. Tedaj je njena potenčna množica

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

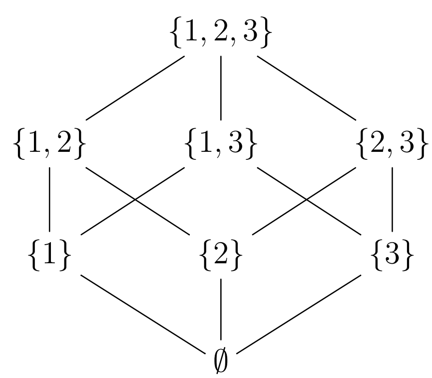
delno urejena z relacijo vsebovanosti $\subseteq$.

3. Množica $\mathbb{N}$ je delno urejena tudi z relacijo deljivosti $|$, ki je podana s predpisom:

$$m|n \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} : n = r \cdot m.$$

Naj bosta x in y elementa množice X, ki je delno urejena z relacijo $\leq$. Pravimo, da *y pokriva x*, če velja $x \leq y$, obenem pa za poljuben $z \in X$ iz $x \leq z$ sledi $z = x$ ali $z = y$. Končni delno urejeni množici lahko priredimo *Hassejev diagram*, tako da element y, ki pokriva element x, narišemo nad x ter ju povežemo s povezavo.

Zgled 2. Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$. Videli smo, da je potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ delno urejena z relacijo vsebovanosti. Pripadajoči Hassejev diagram je:



Vaja 3. Pokaži, da je množica $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$ delno urejena z relacijo deljivosti, in nariši Hassejev diagram za to relacijo. Kako lahko iz Hassejevega diagrama te relacije odčitamo praštevila? Kako preberemo delitelje danega števila? Kaj pa njegove večkratnike?

2 Mreže

Naj bo $\leq$ relacija delne urejenosti na množici M in naj bosta $x, y \in M$. Pravimo, da je u *spodnja meja* elementov x in y, če velja $u \leq x$ in $u \leq y$. Če med vsemi spodnjimi mejami elementov x in y obstaja največja spodnja meja, jo imenujemo *natančna spodnja meja* in označimo z $\inf(x, y)$. Podobno, pravimo, da je v *zgornja meja* elementov x in y, če velja $x \leq v$ in $y \leq v$. Če med vsemi zgornjimi mejami elementov x in y obstaja namanjša zgornja meja, jo imenujemo *natančna zgornja meja* in označimo s $\sup(x, y)$.

Množica M, ki je z relacijo $\leq$ delno urejena, je *mreža*, če za poljubna elementa $x, y \in M$ obstajata v M tako njuna natančna spodnja meja $\inf(x, y)$ kot tudi njuna natančna zgornja meja $\sup(x, y)$. V mreži M sta tako definirani operaciji:

$$x \wedge y = \inf(x, y), \qquad x \vee y = \sup(x, y).$$

Zgledi 4. *1.* Naj bo A poljubna množica. Tedaj je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ mreža. V tej mreži sta operaciji podani z:

$$X \wedge Y = X \cap Y, \qquad X \vee Y = X \cup Y.$$

2. Množica $\mathbb{N}$ je mreža za relacijo deljivosti $|$. V tej mreži velja:

$$m \wedge n = D(m, n), \qquad m \vee n = v(m, n),$$

kjer smo z $D(m, n)$ označili največji skupni delitelj števil m in n, z $v(m, n)$ pa njun najmanjši skupni večkratnik.

3. Poglejmo si množico $L(\mathbb{R}^3)$ vseh vektorskih podprostorov prostora $\mathbb{R}^3$. Množica $L(\mathbb{R}^3)$ vsebuje:

- cel prostor $\mathbb{R}^3$;
- ravnine skozi izhodišče;
- premice skozi izhodišče,
- izhodišče (kot eno-elementno množico).

Množica $L(\mathbb{R}^3)$ je delno urejena z relacijo vsebovanosti množic $\subseteq$ in je mreža. Za $P, Q \in L(\mathbb{R}^3)$ velja:

$$P \wedge Q = P \cap Q, \qquad P \vee Q = L(P, Q),$$

kjer je $L(P,Q)$ najmanjši vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje P in Q. Če sta $\Pi, \Sigma \in L(\mathbb{R}^3)$ dve različni ravnini skozi izhodišče, tedaj velja

$$\Pi \wedge \Sigma = p, \qquad \Pi \vee \Sigma = \mathbb{R}^3,$$

kjer je p premica, ki je presek ravnin Π in Σ.

Velja naslednja trditev:

Trditev 5. *Naj bo M mreža. Tedaj operaciji $\wedge$ in $\vee$ zadoščata naslednjim lastnostim:*

Komutativnost: $x \wedge y = y \wedge x$ *in* $x \vee y = y \vee x$.

Asociativnost: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ *in* $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

Idempotentnost: $x \wedge x = x$ *in* $x \vee x = x$.

Absorbcija: $x \vee (x \wedge y) = x$ *in* $x \wedge (x \vee y) = x$.

Nekatere mreže zadoščajo še drugim aksiomom. Pravimo, da je mreža M *distributivna*, če za poljubne $x, y, z \in M$ velja:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

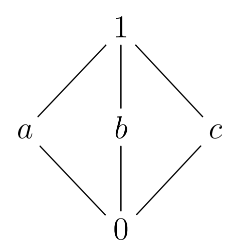
in

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Zgledi 6. *1.* Mreža $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je vedno distributivna.

2. Tudi mreža $(\mathbb{N}, |)$ je distributivna.

3. Mreža M_3 je podana s spodnjim Hassejevim diagramom:



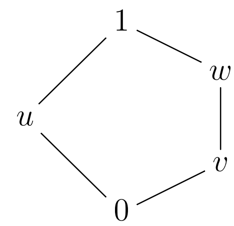
Prepričajmo se, da mreža M_3 ni distributivna. Velja namreč:

$$(a \wedge b) \vee c = 0 \vee c = c,$$

toda

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = 1 \wedge 1 = 1.$$

4. Mreža N_5 je podana s spodnjim Hassejevim diagramom:



Tudi mreža N_5 ni distributivna, saj velja:

$$(u \vee v) \wedge w = 1 \wedge w = w,$$

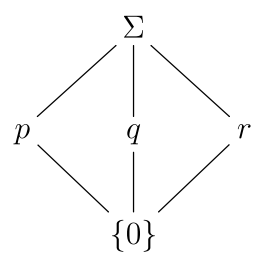
toda

$$(u \wedge w) \vee (v \wedge w) = 0 \vee v = v.$$

Izrek 7 (Dedekindov izrek)**.** *Mreža je distributivna natanko tedaj, kadar ne vsebuje podmreže oblike M_3 ali N_5.*

Posledica 8. *Mreža $L(\mathbb{R}^3)$ iz zgleda 4.3 ni distributivna.*

Dokaz. Naj bodo p, q, r tri različne premice skozi izhodišče, ki ležijo na skupni ravnini Σ. Podmreža, ki jo določajo, ima enako obliko kot mreža M_3:



Iz Dedekindovega izreka zato sledi, da mreža $L(\mathbb{R}^3)$ ni distributivna. ∎

Naj bo $(M, \leq)$ mreža. Pravimo, da je $m \in M$ *najmanjši element*, če za vsak $x \in M$ velja $m \leq x$. Podobno pravimo, da je $g \in M$ *največji element*, če za vsak $x \in M$ velja $x \leq g$. Mreža je *omejena*, če vsebuje najmanjši element (ki ga praviloma označimo z 0) in največji element (ki ga praviloma označimo z 1). Vsaka končna mreža je omejena. V omejeni mreži lahko definiramo pojem komplementa: Element x' je *komplement* elementa x, če velja:

$$x \wedge x' = 0, \qquad x \vee x' = 1.$$

Pravimo, da je element x *komplementiran*, če ima komplement. V distributivni mreži ima vsak element kvečjemu en komplement. *Booleova algebra* je omejena distributivna mreža, v kateri je vsak element komplementiran.

Zgled 9. Naj bo A poljubna množica. Tedaj je $\mathcal{P}(A)$ Booleova algebra, v kateri je $\emptyset$ najmanjši, A pa največji element. Za $X \in \mathcal{P}(A)$ velja

$$X' = A \setminus X.$$

Dejansko so vse končne Booleove algebre pravzaprav takšne oblike kot v zgledu 9. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 10 (Stoneov izrek)**.** *Vsaka končna Booleova algebra je izomorfna Booleovi algebri $\mathcal{P}(A)$ za neko končno množico A.*

Posledica 11. *Naj bo B končna Booleova algebra. Tedaj je njena moč enaka 2^n za neko naravno število n.*

Literatura

[1] B. A. Davey, H. A. Priestley: *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

Karin Cvetko Vah
FMF, Jadranska 19, 1000 Ljubljana.
E-naslov: karin.cvetko@fmf.uni-lj.si