# O definiciji površine

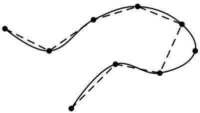
Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, januar 2015

# Uvod

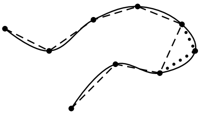
- Obravnavamo gladke objekte, na primer gladke krivulje, ploskve ali telesa.
- Pri obravnavi geometrijskih lastnosti se moramo pogosto zateči k aproksimaciji z odsekoma ravnimi objekti.
- Pri računanju dolžine ta pristop deluje, pri računanju površine pa ne.

# Aproksimacija krivulj s poligonalnimi



- Krivuljo v ravnini lahko aproksimiramo s poligonalno krivuljo.
- Boljši približek dobimo z dodajanjem novih točk.
- Za poljubni dve poligonalni krivulji dobimo natančnejšo aproksimacijo z unijo izbranih točk.
- Dolžina je natančna zgornja meja dolžin opisanih poligonalnih krivulj.

# Aproksimacija krivulj s poligonalnimi



- Krivuljo v ravnini lahko aproksimiramo s poligonalno krivuljo.
- Boljši približek dobimo z dodajanjem novih točk.
- Za poljubni dve poligonalni krivulji dobimo natančnejšo aproksimacijo z unijo izbranih točk.
- Dolžina je natančna zgornja meja dolžin opisanih poligonalnih krivulj.

# Matematični zapis

Krivulja $K$ je *tir poti* $(x,y)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, kjer sta $x,y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dani zvezni funkciji. *Poligonalna krivulja* je določena z delitvijo $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ intervala $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Dolžina poligonalne poti, ki pripada delitvi $D$, je

$$l(D) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x(t_{j-1}) - x(t_j))^2 + (y(t_{j-1}) - y(t_j))^2}.$$

*Dolžina krivulje $K$* je

$$l(K) = \sup\{l(D) \colon D \text{ delitev intervala } [a,b]\}.$$

Krivulja $K$ je *izmerljiva*, če je $l(K) < \infty$.

# Izrek o dolžini poti

## Izrek

*Naj bo $K$ krivulja, ki je podana parametrično kot tir gladke injektivne poti $(x, y)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Potem je $K$ izmerljiva in velja*

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

*Dolžina je neodvisna od izbire injektivne gladke parametrizacije.*

# Uvod

Na ploskvi izberemo gosto posejano množico točk in jih povežemo v trikotnike. Dobimo poliedrsko ploskev, ki je geometrijsko blizu dani ploskvi.

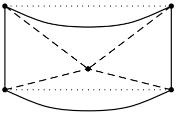
Zanima nas, kako dobro se površina poliedrske ploskve približa površini dane ploskve. Ali s povečanjem števila točk izboljšamo natančnost?

Leta 1890 je H. A. Schwarz objavil primer, ki pokaže, da tudi pri zelo preprostih ukrivljenih ploskvah zgornja metoda brez kakšnih dodatnih zahtev popolnoma odpove.

# Konstrukcija Schwarzeve lanterne

Pravokotnik s stranicama 1 in $2\pi$ zvijemo v valj s polmerom in višino 1. Površina plašča valja je $2\pi$.

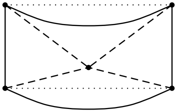
Stranico dolžine $2\pi$ narežemo na $n$ enakih delov, stranico dolžine 1 pa na $m$ enakih delov. Vsakega od dobljenih pravokotnikov z diagonalama razdelimo na 4 trikotnike. Za oglišča poliederske ploskve vzamemo vsa oglišča trikotnikov, ko smo pravokotnik zvili v valj.



Poliedrsko ploskev omejuje $4mn$ trikotnikov, njeno površino označimo s $P(m,n)$.

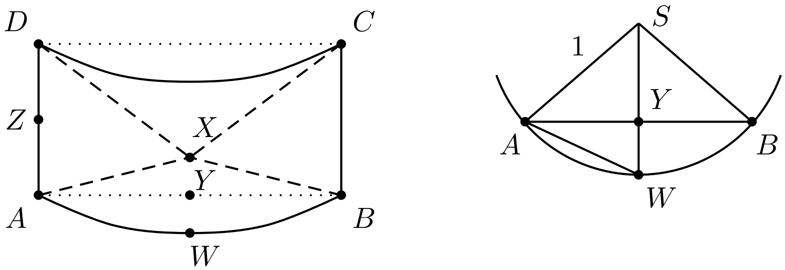
# Ideja

- Če pri danem $n$ povečujemo $m$, se število trikotnikov povečuje.
- Polovica vseh trikotnikov ima eno stranico vzporedno osnovni ploskvi valja. Ploščine teh trikotnikov so pri danem $n$ navzdol omejene stran od 0.



- Če pri danem $n$ vzamemo $m$ dovolj velik, je površina poliedrske ploskve poljubno velika. Torej lahko izberemo zaporedje $m_n$, da je $\lim_{n\to\infty} P(m_n, n) = \infty$.

# Ploščina trikotnika AXD

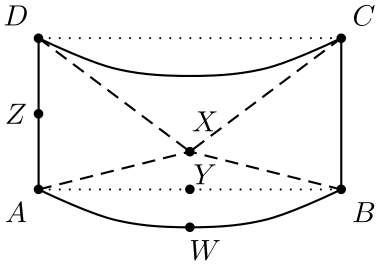


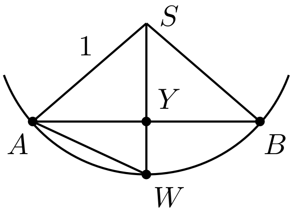

Dolžina $AD$ je $\frac{1}{m}$, višina na $AD$ je $ZX$, ki je skladna z $AW$.

Kot $\angle ASW$ je $\frac{\pi}{n}$, zato je $|AW| = 2\sin\frac{\pi}{2n}$.

$p_{\triangle AXD} = \frac{1}{2}|AD||AW| = \frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{2n}$.

# Ploščina trikotnika AXB




Ker je $\angle ASB = \frac{2\pi}{n}$, dobimo

$$|YW| = 1 - |SY| = 1 - \cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n},$$

$$|XY| = \sqrt{|XW|^2 + |WY|^2} = \sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4\sin^4\frac{\pi}{2n}},$$

$$p_{\triangle XAB} = \frac{1}{2}|AB||XY| = \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

# Formula za P(m,n)

$$\begin{aligned} P(m,n) &= 2mn\left(\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4\sin^4\frac{\pi}{2n}}\right) \\ &= 2n\sin\frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n}\sqrt{1 + 16m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}\right) \end{aligned}$$

$$P(n,n) = 2n\sin\frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n}\sqrt{1 + 16n^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2\pi$$

$$P(n^3,n) = 2n\sin\frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n}\sqrt{1 + 16n^6\sin^4\frac{\pi}{2n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

# Geometrijski premislek

Če $m$ narašča precej hitreje od $n$, leži poliedrska aproksimacija v čedalje manjši okolici valja, vendar so trikotniki skoraj pravokotni na plašč valja.

Če $m$ in $n$ rasteta enako hitro, so trikotniki skoraj tangentni na plašč valja.

Zato površine ukrivljenih ploskev ne moremo definirati podobno kot dolžino krivulj, ampak jo definiramo z integralom.

# Definicija površine

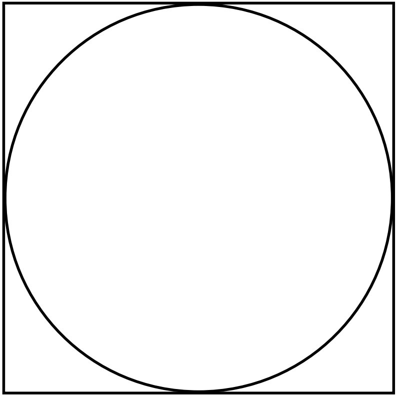
Naj bo ploskev $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ podana z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$; torej je

$$\Sigma = \{\vec{r}(u,v)\colon (u,v) \in D\}.$$

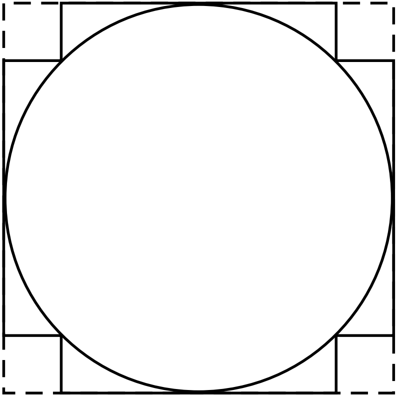
Potem je *površina ploskve* $\Sigma$ definirana s

$$P(\Sigma) = \int\int_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du\, dv.$$

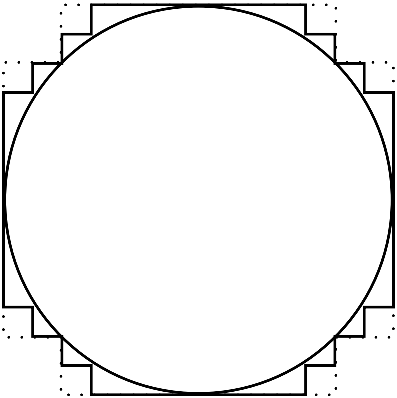
# Obseg kroga



# Obseg kroga



# Obseg kroga



T. W. Körner: A companion to analysis. A second first and first second course in analysis. Graduate Studies in Mathematics, 62. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

T. Ramsey: An 1890 Example From H. A. Schwartz of How Not To Define Surface Area. [ogled 23.1.2015], http://www.math.hawaii.edu/ ramsey/SchwartzExample.pdf

H. A. Schwarz: Sur une définition erronée l'aire surface courte, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin, 1890, II, 309–311.

F. Zames: Surface area and the cylinder area paradox. College Math. J., **8** (1977), 207–211.