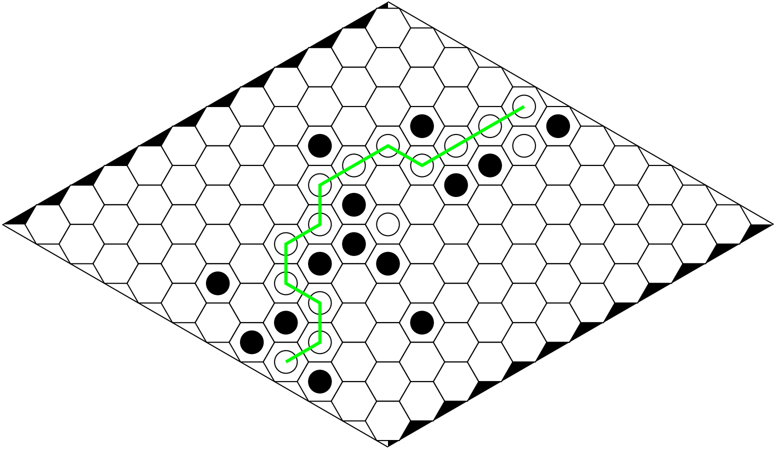
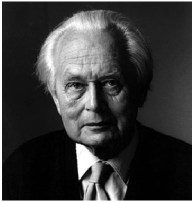
Hex

Aleš Vavpetič

30. januar 2015

Igra Hex



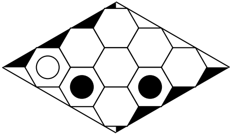


Piet Hein (1905-1996)

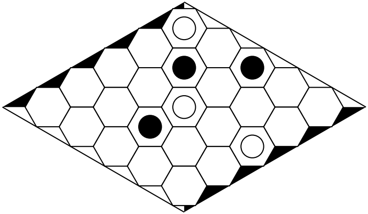
Losing one glove
is certainly painful,
but nothing
compared to the pain,
of losing one,
throwing away the other,
and finding
the first one again.

Zgodovina

- 1942: Predavanje z naslovom *Matematika iger* na Univerzi v Kobenhavnu.
- 26.12.1942: Predstavi igro v reviji Politiken.
- December 1942-Junij 1943: 46 Hex problemov v reviji Politiken:



Problem 4



Problem 2

Beli na potezi in zmaga.

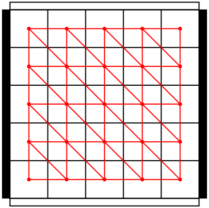
- Avgust 1943: Prenehajo objavljati članke o igri Hex v reviji Politiken.

Zgodovina igre Hex

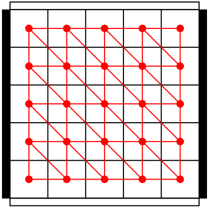
Zgodovina

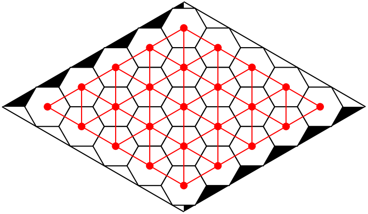
John Forbes Nash (1928)

Leta 1947 prijateljem na Princetonu predstavi igro, ki se igra na kvadratni tabli.

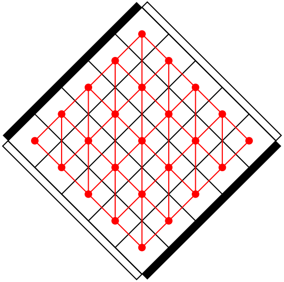


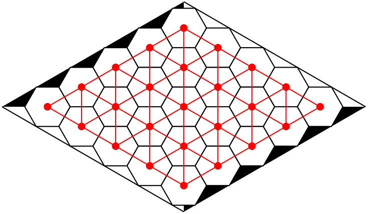
Zgodovina



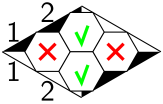


Zgodovina





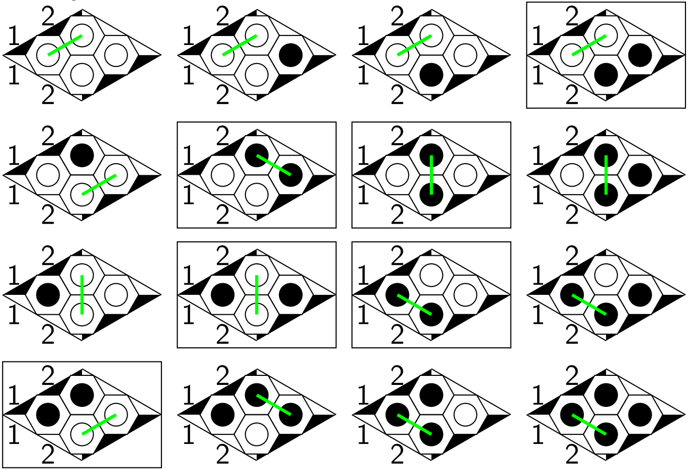
2×2 tabla



Slika prikazuje vsa polja, kamor lahko postavi beli prvi žeton, da zmaga.

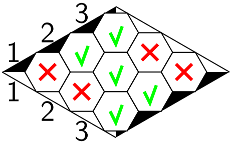
2×2 tabla

Koliko je vseh možnosti, da tablo 2×2 pokrijemo z belimi in črnimi žetoni? $2^4 = 16$



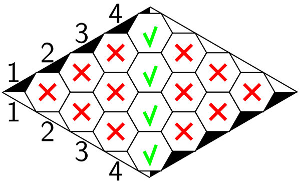
Takih, da je število belih žetonov enako število črnih? $\binom{4}{2} = 6$

3×3 tabla



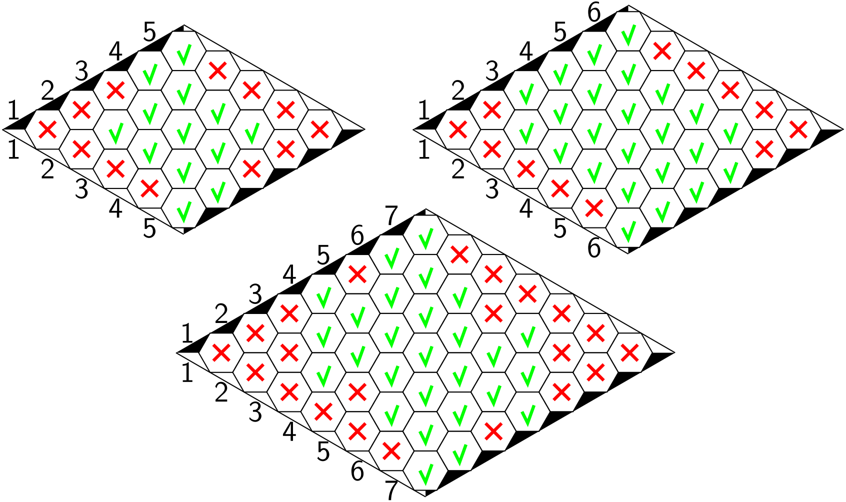
- Beli tako zmaga, če najprej postavi na (3,1), (1,2), (2,2), (3,2) ali (1,3).
- Vseh pokritji table z belimi in črnimi žetoni je $2^9 = 512$.
- Takih, da je na tabli natanko 5 belih žetonov pa $\binom{9}{5} = 126$.
- Vsako izmed 512 pokritji vsebuje bodisi belo bodisi črno verigo.

4×4 tabla



- Beli zmaga, če najprej postavi na (2,3), (3,2), (1,4), ali (4,1).
- Vseh pokritji table z belimi in črnimi žetoni je $2^{16} = 65\,536$.
- Takih, da je na tabli natanko 8 belih žetonov pa $\binom{16}{8} = 12\,870$.
- Vsako izmed 2^{16} pokritji vsebuje bodisi belo bodisi črno verigo.

5 × 5, 6 × 6 in 7 × 7 table



Končna igra za dva igralca:

- igralca izmenoma vlečeta poteze,
- obstaja naravno število N, da se igra konča z zmago enega izmed igralcev po največ N potezah (ne glede na to, kako igrata).

Končna igra za dva igralca

Za končno igro za dva igralca obstaja igralec, ki ima zmagovalno strategijo; tj. ne glede, kako igra nasprotnik, lahko vleče poteze, ki ga pripeljejo do zmage:

Naj bo $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ zaporedje potez ($0 \leq k \leq N$). Če je $\mathbf{p}$ tako zaporedje, da je igra končana, naj bo

- $V(\mathbf{p}) = 1$, če je zmagal prvi,
- $V(\mathbf{p}) = 2$, če je zmagal drugi.

Naj bo $\mathbf{p}$ tako zaporedje, da igra še ni končana.

Če je na potezi prvi (k je sodo število), naj bo

- $V(\mathbf{p}) = 1$, če obstaja p_{k+1}, da je $V(p_1, \ldots, p_{k+1}) = 1$,
- $V(\mathbf{p}) = 2$, če je $V(p_1, \ldots, p_{k+1}) = 2$, za vse možne poteze p_{k+1}.

Če je na potezi drugi (k je liho število), naj bo

- $V(\mathbf{p}) = 2$, če obstaja p_{k+1}, da je $V(p_1, \ldots, p_{k+1}) = 2$,
- $V(\mathbf{p}) = 1$, če je $V(p_1, \ldots, p_{k+1}) = 1$, za vse možne poteze p_{k+1}.

Če je $V(\emptyset) = 1$, ima zmagovalno strategijo prvi, sicer pa drugi.

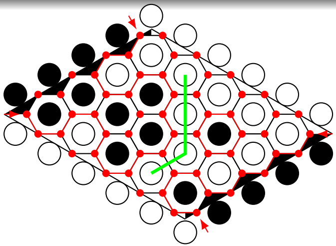
Hex je končna igra

Izrek (Hex)

Če tablo (dimenzije $n \times m$) zapolnimo z belimi in črnimi žetoni, obstaja bela ali črna veriga.

Torej je Hex končna igra za dva igralca.

Dokaz, da je Hex končna igra

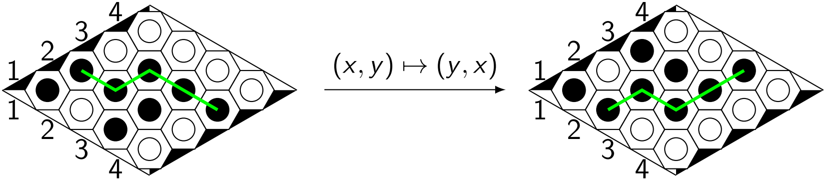


Ob straneh table postavimo pripadajoče žetone.
Priredimo graf:

- vozlišča grafa so oglišča šestkotnikov,
- stranica šestkotnika je povezava v grafu, če poteka med različno obarvanima žetonoma.

Dobimo graf v katerem ima vsako vozlišče stopnjo 0 ali 2, razen štirih vozlišč, ki imajo stopnjo 1.
Levo vozlišče je povezano z zgornjim ali spodnjim. Če je povezano z zgornjim, dobimo ob desni strani rdečih povezav belo verigo, sicer dobimo ob desni strani črno verigo.

Kdo zmaga pri igri Hex?



Naj bo **p** zaporedje potez pri igri Hex.
Zaporedje **q** tako, da v **p** zamenjamo i-to in j-to potezo, kjer sta i in j iste parnosti.
Tedaj je $V(\mathbf{p}) = V(\mathbf{q})$.

Kdo zmaga pri igri Hex?

Izrek

Za vsak n ima prvi igralec zmagovalno strategijo za igro Hex na tabli $n \times n$.

- Dokaz s protislovjem.
- Denimo, da ima drugi igralec zmagovalno strategijo.
- Prvi igra na pljubno polje. V drugo beli odmisli svojo prvo potezo in igra kot drugi, ki ima zmagovalno strategijo

Brouwerjev izrek o negibni točki

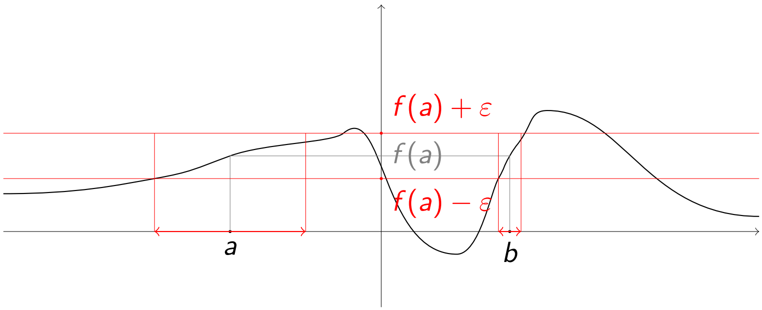
Naj bo $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$ zaprta enotska krogla.

Izrek (Brouwer)

Vsaka zvezna preslikava $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ ima negibno točko.

- Izrek ima uporabo v funkcionalni analizi, diferencialnih enačbah, teoriji iger, ekonomiji ... Kenneth Arrow (1972), Gérard Debreu (1983), John Nash (1994) v svojih delih o teoriji ravnovesja za katera so prejeli Nobelove nagrade za ekonomijo, uporabijo Brouwerjev izrek.
- $X \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon X \to \mathbb{B}^n$ in $\psi\colon \mathbb{B}^n \to X$ zvezni, da $\varphi \circ \psi = id$ in $\psi \circ \varphi = id$, tedaj ima vsaka $f\colon X \to X$ negibno točko.
- $n = 1$: Graf zvezne funkcije $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ seka simetralo lihih kvadrantov.

Brouwerjev izrek o negibni točki



- f je zvezna v a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta_a > 0$, da se interval $(a-\delta_a, a+\delta_a)$ preslika v $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.
- Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ je enakomerno zvezna, če obstaja $\delta > 0$, ki je dober za vse $a \in A$.
- $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ni enakomerno zvezna.
- Zvezne funkcije na zaprtem intervalu in kvadratu so enakomerno zvezne.

Brouwerjev izrek o negibni točki

Ekvivalenca

Brouwerjev izrek za $n = 2$ je ekvivalenten izreku Hex.

Izrek Hex implicira Brouwerjev izrek:

- Naj bo $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ zvezna.
- Pokazali bomo: Za vsak n obstaja $(x_n, y_n) \in [0,1]^2$, da je $||f(x_n, y_n) - (x_n, y_n)|| < \frac{1}{n}$.
- Zaporedje $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ima v $[0,1]^2$ vsaj eno stekališče (x, y).
- Za (x, y) velja $||f(x, y) - (x, y)|| = 0$ oziroma $f(x, y) = (x, y)$.
- Zaradi lažjega računa vzamemo razdaljo $||(x, y)|| = \max\{|x|, |y|\}$.
- Razdalji $||.||$ in $||.||_2$ sta ekvivalentni, tj. preslikava je zvezna glede na $||.||$ natanko tedaj, ko je zvezna glede na $||.||_2$.

Brouwerjev izrek o negibni točki

- Ker je f enakomerno zvezna, obstaja $\delta > 0$, da je $\delta < \varepsilon$ in da iz $||(x, y) - (x', y')|| < \delta$ sledi $||f(x, y) - f(x', y')|| < \frac{1}{n}$.
- Izberimo $m \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{m} < \delta$.
- Denimo, da je $||f(x, y) - (x, y)|| \geq \frac{1}{n}$ za vse (x, y). Torej $f(x, y)$ in (x, y) se vsaj v eni koordinati razlikujeta za več kot $\frac{1}{n}$.
- Definiramo:
  $C_+ = \{(i, j); f_1(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}) - \frac{i}{m} \geq \frac{1}{n}\}$,
  $C_- = \{(i, j); \frac{i}{m} - f_1(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}) \geq \frac{1}{n}\}$,
  $B_+ = \{(i, j); f_2(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}) - \frac{j}{m} \geq \frac{1}{n}\}$,
  $B_- = \{(i, j); \frac{j}{m} - f_2(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}) \geq \frac{1}{n}\}$.
- Na polje (i, j) table velikosti $m \times m$ položimo črn žeton, če je $(i, j) \in C_+ \cup C_-$, sicer belega.
- Po izreku Hex obstaja bodisi bela bodisi črna veriga.
- V verigi so polja le iz ene množice, kar ni možno.

Brouwerjev izrek o negibni točki

Brouwerjev izrek implicira izrek Hex:

- Denimo, da obstaja tabla $n \times m$ pokrita z belimi in črnimi žetoni, ki nima verige.
- Konstruirali bomo zvezno preslikavo $f : [1, n] \times [1, m] \to [1, n] \times [1, m]$ brez negibne točke.
- Definiramo:
  B_- množica tistih polj (i, j) z belim žetonom za katere obstaja bela pot do prve vrstice,
  B_+ množica tistih polj (i, j) z belim žetonom, ki niso v B_-,
  C_- množica tistih polj (i, j) s črnim žetonom za katere obstaja črna pot do prvega stolpca,
  C_+ množica tistih polj (i, j) s črnim žetonom, ki niso v C_-.

Brouwerjev izrek o negibni točki

- Velja: $(i,1) \notin B_+$, $(i,m) \notin B_-$, $(1,j) \notin C_+$ in $(n,j) \notin C_-$.
- Definiramo:
  $f(x,y) = (x, y+1)$, za $(x,y) \in B_-$,
  $f(x,y) = (x, y-1)$, za $(x,y) \in B_+$,
  $f(x,y) = (x+1, y)$, za $(x,y) \in C_-$,
  $f(x,y) = (x-1, y)$, za $(x,y) \in C_+$.
- Za $T \in \Delta ABC$, je $T = \alpha A + \beta B + \gamma C$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Definiramo $f(T) = \alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C)$.
- Po Brouwerjevem izreku obstaja T, da je $f(T) = T$.
- Naj bo $T = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Za $X = A, B, C$ je $f(X) = X + e_X$, $e_X \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.
- Iz $f(T) = T$ sledi $\alpha e_A + \beta e_B + \gamma e_C = (0,0)$ (*).
- Če so na A, B, C enake barve žetoni, je $e_A = e_B = e_C$. (*) ne drži.
- Če na A in B enake barve žeton in na C različne, je $e_A = e_B$ in zato (*) enaka $(\alpha + \beta)e_A + \gamma e_C = (0,0)$.
- Ni res, saj $(0,0)$ ni na daljici med e_A in e_C.

Heinovi problemi

White to play.

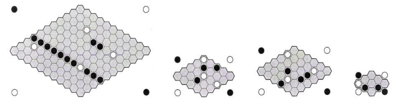


Fig. 1. Hein Puzzles 1–4

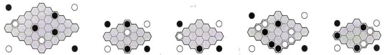


Fig. 2. Hein Puzzles 5–9

Fig. 3. Hein Puzzles 10–14

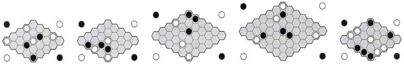


Fig. 4. Hein Puzzles 15–19

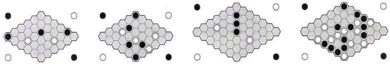


Fig. 5. Hein Puzzles 20–23

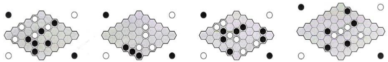


Fig. 6. Hein Puzzles 24–27

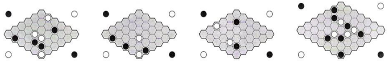


Fig. 7. Hein Puzzles 28–31

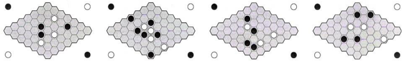


Fig. 8. Hein Puzzles 32–35

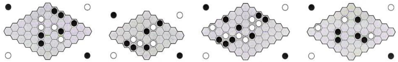


Fig. 9. Hein Puzzles 36–39

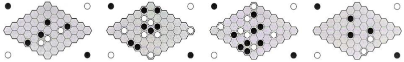


Fig. 10. Hein Puzzles 40–43

Fig. 11. Hein Puzzles 44–46