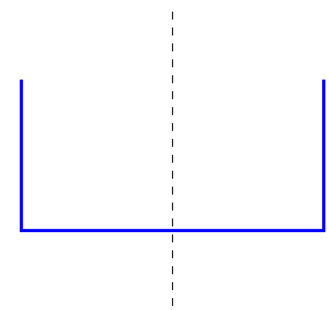
SEMINAR ZA UČITELJE MATEMATIKE 26. 9. 2015

1 FRIZIJSKE GRUPE

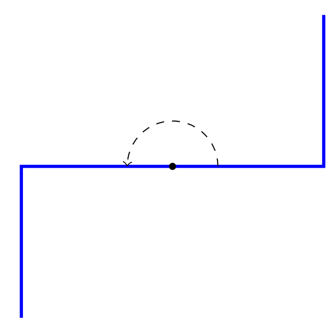
1.1 Simetrija

Objekti na naslednjih slikah se zdijo simetrični. Zakaj?
a)



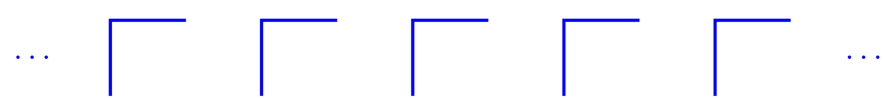
Zrcalna simetrija

b)



Rotacijska simetrija

c)



Translacijska simetrija (periodičnost)

Poskusimo najprej razčistiti pojem *simetrije*. Zastavimo si nekaj preprostih vprašanj, ki nam bodo pomagala na poti do pravega opisa simetrije.
Ali je množica $A = \{-1, 1\}$ simetrična? DA?
Ali je množica A simetrična podmnožica množice $B = \{-1, 1, 3\}$? Zdi se, da je je

odgovor nikalnen, da pa je množica $C = \{-1, 3\}$ simetrična podmnožica množice B. Poskusimo ustvariti matematični opis dosedanjega opažanja. Ali obstaja taka neidentična bijektivna preslikava $f : B \to B$, da je $f(C) = C$? Res jo najdemo kot zrcaljenje čez točko 1, torej $f(x) = 2 - x$. Najdemo pa tudi tako neidentično bijektivno preslikavo $g : B \to B$, da je $g(A) = A$. Predpišemo $g(1) = -1$, $g(-1) = 1$ in $g(3) = 3$. Če nekdo ni naklonjen takim 'umetnim' definicijam preslikav pa lahko najde polinomski predpis za preslikavo g.

Naloga. Določi polinomski predpis za preslikavo g in ugotovi najmanjšo možno stopnjo takega polinoma.

Opomba. Vsaka množica S 'sama zase' je simetrična, vse bijekcije množice S nase pa sestavljajo tako imenovano *simetrično grupo* $Sym(S)$.
Naj bo $D = \{-1, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$. Množica D se znova ne zdi simetrična podmožica, čeprav lahko konstruiramo neidentično kosoma linearno bijekcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ohranja množico D.

Naloga. Določi kako gladko (odvedljivo) neidentično bijekcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ohranja množico D.

Iz gornjih opažanj spoznamo, da moramo na množico vpeljati dodatno strukturo, če želimo govoriti o simetričnih podmnožicah. Spoznamo tudi, da o simetriji podmnožic ne moremo govoriti, če univerzalna množica sama po sebi ne premore nobene neidentične simetrije.
Kaj je torej dodatna struktura, ki jo želimo na množici. V vseh dosedanjih 'motečih primerih' podmnožic realnih števil smo imeli 'predsodek številske premice'. Množico realnih števil, smo, kot običajno, nanizali vzdolž ti. številske premice. Zaporedna cela števila smo enakomerno razvrstili vzdolž premice z medsebojno razdaljo 1, posledično se na premici razvrstijo še racionalna števila (po principu deležev) in nazadnje še vsi 'vmesni prostori', tj. transcendentna števila.

1.2 Metrični prostor

Vsaka množica M je sama po sebi 'vreča elementov', za razporeditev njenih elementov pa nanjo vpeljemo *razdaljo* oz. *metriko*, ki je preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$ z lastnostmi
1. $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
za vsako izbiro $x, y, z \in M$.
Razporeditev realnih števil vzdolž številske premice tako ustreza metriki

$$d(x, y) = |y - x|.$$

Togo premikanje metričnega prostora M, ki ga želimo realizirati, ko opazujemo simetrijo (pod)množic tedaj ustreza bijektivni preslikavi $f : M \to M$, ki ohranja razporeditev elementov metričnega prostora, torej ohranja njihove razdalje. Za vsaka $x, y \in M$ torej velja

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y). \tag{1}$$

Zahteva (1) nam definira pojem *izometrije*, množico vseh izometrij pa označimo z $Isom(M)$. Hitro opazimo, da je kompozitum dveh izometrij znova izometrija.

Poiščimo vse možne izometrije realne osi. Hitro je jasno, da so preslikave oblike $h(x) = a \pm x$, kjer je a neka konstanta, izometrije na $\mathbb{R}$. Prepričajmo se, da so to edine možne izometrije. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izometrija in $f(0) = b$. Potem lahko f komponiramo z izometrijo $g(x) = x - b$ in dobimo izometrijo $h = g \circ f$ z lastnostjo $h(0) = 0$. Ker je h izometrija, je razdalja med $h(0) = 1$ in $h(1)$ enaka 1, kar pomeni $h(1) = \pm 1$.
1. Privzemimo najprej, da je $h(1) = 1$. Potem za $x \neq 0$ velja $d(0, x) = |x|$, zato je $h(x) = \pm x$. Če za kak x velja $h(x) = -x$, sta razdalji $d(x, 1) = |x - 1|$ in $d(h(x), h(1)) = | - x - 1|$ različni, torej je $h(x) = x$ in

$$f(x) = x + b.$$

2. Če je $h(1) = -1$, pa je $-h$ izometrija z lastnostjo $-h(x) = x$, oz. $h(x) = -x$, od koder sledi

$$f(x) = -x + b.$$

NALOGA. Dokaži, da interval $(0, \infty)$ opremljen z običajno razdaljo ne premore neidentične izometrije.

Opomba. Če gledamo interval $A = (0, 1)$ kot podmnožico $M = (0, \infty)$ ne obstaja netrivialna izometrija M, torej tudi ne obstaja netrivialna izometrija, ki ohranja A, čeprav množica A premore netrivialno izometrijo $f : A \to A$ in sicer $f(x) = 1 - x$. Opozorili smo že, da ni smiselno opazovati simetričnih podmnožic nesimetričnega prostora.

1.3 Grupa simetrij

Kot smo že opazili, je množica $Isom(M)$ *zaprta za operacijo* komponiranja. Če je $f \in Isom(M)$ neka izometrija, je tudi njena *inverzna* preslikava f^{-1} izometrija, prav tako pa $Isom(M)$ premore *enoto*, saj je identična preslikava id_M izometrija. Ker je operacija komponiranja preslikav *asociativna*, je množica izometrij $Isom(M)$ *grupa* za operacijo komponiranja.
Če je $A \subset M$ neka podmnožica, pravimo, da je izometrija $f \in Isom(M)$ z lasnostjo $f(A) = A$ *simetrija podmnožice* A. Hitro se lahko prepričamo, da je množica vseh

simetrij A, ki jo označimo s $Sym(A)$, podgrupa grupe $Isom(M)$.

Raziščimo sedaj izometrije ravnine, tj. grupo $Isom(\mathbb{R}^2)$.

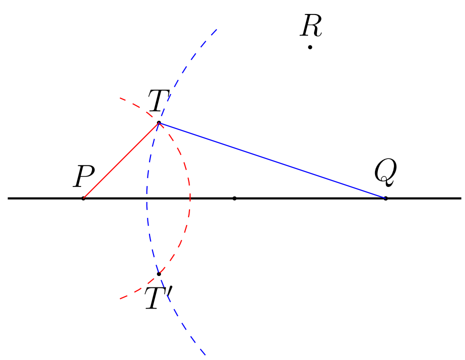
NALOGA. Preveri, da vsaka izometrija ravnine

1. preslika vsak trikotnik v njemu skladen trikotnik (najprej za raznostraničnega, potem uporabi zveznost).
2. preslika vsako premico v premico (točka med krajiščema daljice je dotikališče ustreznih krožnic).
3. ohranja kote med premicami (kot je kot v nekem trikotniku).

Prepričajmo se še v naslednjo trditev.

Trditev 1.1 *Vsaka izometrija ravnine je natančno podana s slikami treh nekolinearnih točk.*

DOKAZ. Naj bosta f in g taki izometriji ravnine, da za tri nekolinearne točke P, Q, R velja $f(P) = g(P)$, $f(Q) = g(Q)$ in $f(R) = g(R)$. Dokazati moramo, da je $f = g$, kar je ekvivalentno zahtevi $h = f \circ g^{-1} = id$, zato lahko dokaz prevedemo na primer izometrije h, za katero velja $P = h(P)$, $Q = h(Q)$ in $R = h(R)$.



Izberimo neko točko $T \notin \{P, Q, R\}$. Tedaj leži njena slika zapored na krožnicah k_P, k_Q, k_R s središči P, Q, R in polmeri $d(P,T), d(Q,T), d(R,T)$. Presek krožnic k_P in k_Q vsebuje kvečjemu dve točki T in T'. Če se krožnici dotikata, točki sovpadata in velja $h(T) = T$, sicer pa leži T' na nasprotnem bregu premice PQ kot točka T. Če sta točki R in T na istem bregu premice PQ, je $d(R,T') > d(R,T)$, sicer pa velja $d(R,T') < d(R,T)$. V obeh primerih preostane le možnost

$$h(T) = T,$$

torej je res $h = id$.

Opomba. S pomočjo gornje trditve se lahko prepričamo, da lahko vsako izometrijo $f : A \to A$ neke podmnožice $A \subset \mathbb{R}$ razširimo do izometrije celotne ravnine, torej z opazovanjem grupe $Sym(A)$ ne bomo spregledali nobene od simetrij, ki jih premore množica A sama po sebi.

NALOGA. Dokaži trditev iz opombe (najprej za nekolinearno podmnožico).

Oglejmo si grupo simetrij enakostraničnega trikotnika $T = \triangle ABC$, s pomočjo katere se bomo na kratko seznanili še z *prezentacijo grupe*.
Naj bo h izometrija z lastnostjo $h(T) = T$. Ker sta oglišči trikotnika medsebojno najbolj oddaljeni točki v trikotniku T, se mora vsako oglišče preslikati v oglišče trikotnika, hkrati pa opazimo, da vsaka permutacija oglišč določa neko izometrijo. Permutacij (vključno z identiteto) je šest in ustrezajo trem zrcaljenjem in trem rotacijam za kote 0, $\frac{2\pi}{3}$ in $\frac{4\pi}{3}$. Označimo z z zrcaljenje čez simetralo stranice AB in z r rotacijo za kot $\frac{2\pi}{3}$. Potem je grupa simetrij enaka

$$Sym(T) = \{id, r, r^2, z, rz, r^2z\}.$$

Prepričamo se lahko, da je $rz = zr^2$, hkrati pa očitno velja $r^3 = z^2 = id$, zato lahko zapišemo *prezentacijo grupe* $Sym(T)$ v obliki

$$Sym(T) = \langle r, z \mid r^3, z^2, rzrz\rangle,$$

pri čemer sta r in z *generatorja grupe* izrazi $r^3, z^2, rzrz$ pa so *relatorji*, to so besede, ki so v grupi enake enoti.
Včasih nam bolj ugaja alternativni zapis v obliki

$$Sym(T) = \langle r, z \mid r^3 = z^2 = 1, rz = zr^2\rangle,$$

kjer $r^3 = z^2 = 1, rz = zr^2$ imenujemo *relacije*.

1.4 Frizijske grupe

Dogovorimo se, da bomo grupo $Isom(\mathbb{R}^2)$ v nadaljevanju označevali kot

$$\mathbb{E} = Isom(\mathbb{R}^2).$$

Hitro lahko naštejemo tri preproste vrste izometrij ravnine. To so translacije, rotacije in zrcaljenja. Množica vseh translacij $\mathbb{T}$ je podgrupa grupe $\mathbb{E}$, prav tako pa za izbrano središče $O \in \mathbb{R}^2$ podgrupo $\mathbb{S}_O$ tvorijo vse rotacije okrog O. Naslednji izrek, ki ga navajamo brez dokaza, nam pove, da te tri vrste osnovnih izometrij v resnici generirajo celotno grupo $\mathbb{E}$.

Izrek 1.2 *Naj bo $l \subset \mathbb{R}^2$ izbrana premica in $O \in l$ izbrano izhodišče. Vsako izometrijo $f \in \mathbb{E}$ lahko tedaj zapišemo v obliki*

$$f = z^{\varepsilon} tr,$$

kjer je z zrcaljenje čez l, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{S}_O$ in $t \in \mathbb{T}$.

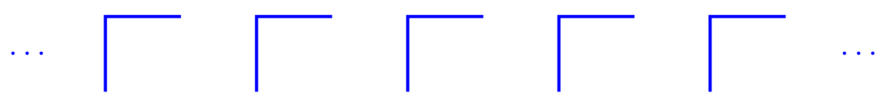
Za vsako podmnožico $A \subset \mathbb{R}^2$ z grupo simetrij $G = Sym(A)$ lahko definiramo njeno *translacijsko podgrupo* kot presek $G \cap \mathbb{T}$ in jo tvorijo tiste translacije, ki ohranjajo množico A.

Opomba. V primeru enakostraničnega trikotnika, je translacijski del njegove grupe simetrij trivialna grupa.

Definirajmo sedaj *Frizijski vzorec* kot podmnožico $A \subset \mathbb{R}^2$ z grupo simetrij $F = Sym(A)$, katere translacijska podgrupa je oblike

$$T = T(A) = \langle t \rangle$$

za neko neidentično translacijo $t \in \mathbb{T}$. To ravno pomeni, da je množica A vzorec, ki se ponavlja v eno samo smer, ki jo določa translacija t.

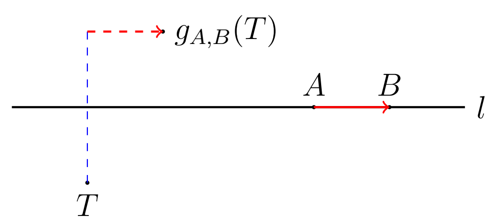


Translacijska simetrija

Preden nadaljujemo, definirajmo še eno v nadaljevanju pomembno izometrijo $g_{A,B}$ ravnine, tj. *zrcalni zdrs*, ki je kompozitum

$$g_{A,B} = zt,$$

kjer sta A, B izbrani različni točki, ki določata premico l, z zrcaljenje čez premico l in t translacija za vektor $\vec{AB}$.



Zrcalni zdrs $g_{A,B}$

Opazimo, da zrcalni in translacijski del zrcalnega zdrsa komutirata, tj. $zt = tz$.

Brez dokaza, za katerega bi potrebovali precej predhodnega računanja kompozitov osnovnih izometrij, navedimo še bolj eksplicitno karakterizacijo izometrij ravnine. Izometrijo imenujmo OP, če *ohranja orientacijo* in OR, če orientacijo zamenja.

Izrek 1.3 *Vsaka izometrija ravnine je produkt največ treh zrcaljenj in je rotacija, translacija, zrcaljenje ali zrcalni zdrs. Če ima izometrija negibno točko, jo označimo z oznako NT, če je brez negibne točke, pa jo označimo z oznako BNT. Če izometrija ohranja orientacijo jo označimo z oznako OP, če orientacije ne ohranja, pa jo označimo z oznako OR. Glede na negibne točke in ohranjanje orientacije lahko štiri tipe izometrij razporedimo v naslednjo tabelo:*

	OP	OR
NT	*rotacija*	*zrcaljenje*
BNT	*translacija*	*zrcalni zdrs*

Klasifikacija izometrij ravnine

Vrnimo se k primeru Frizijskega vzorca A z grupo simetrij $F = Sym(A)$.
1. Najprej predpostavimo, da grupa F ne vsebuje rotacij.
1.1. Če F ne vsebuje tudi nobene OR-izometrije, dobimo prvi tip

$$F_1 = \langle t \rangle = \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

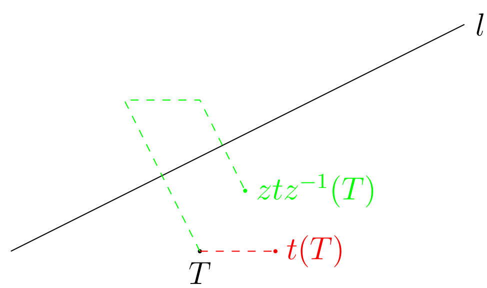
1.2. Če je $g \in F$ neka OR-izometrija, je g bodisi zrcaljenje, bodisi zrcalni zdrs. V vsakem primeru lahko zapišemo

$$F = T \cup Tg = T \cup Tg,$$

torej ima podgrupa T le dva desna (leva) odseka, zato je edinka. To pomeni, da je $gTg^{-1} = T$. Od tod sklepamo, da je tudi gtg^{-1} generator grupe T, torej je

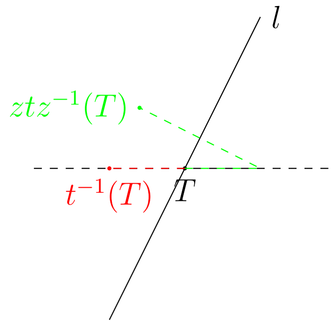
$$gtg^{-1} = t \text{ ali } gtg^{-1} = t^{-1}. \tag{2}$$

Najprej opazimo, da je v primeru zdrsa $g = \tau z$, kjer je z pripadajoče zrcaljenje in τ translacija, pogoj (2) ekvivalenten zathevi $ztz^{-1} = t$ ali $ztz^{-1} = t^{-1}$, zato lahko opazujemo le primer zrcaljenja z.
Če velja $ztz^{-1} = t$, ugotovimo, da je os zrcaljanja/zdrsa vzporedna smeri translacije t. Slika kaže kako desna in leva stran preslikata točko izven osi l zrcaljenja z.



Klasifikacija izometrij ravnine

Če je $ztz^{-1} = t^{-1}$, ugotovimo, da je os zrcaljanja/zdrsa pravokotna smeri translacije t. Slika kaže kako desna in leva stran preslikata točko, ki leži na osi l zrcaljenja z.



V primeru, ko je $g = z$ zrcaljenje, tako dobimo novi grupi

$$F_1^1 = \langle t, z \mid z^2 = 1, ztz = t \rangle$$

in

$$F_1^2 = \langle t, z \mid z^2 = 1, ztz = t^{-1} \rangle.$$

V primeru, ko je g zrcalni zdrs s translacijo τ, je $g^2 = \tau^2$ netrivialna translacija, zato je $g^2 = t^m$ za neko celo število $m \neq 0$. V tem primeru g komutira s translacijo t^m, zato je njegova os vzporedna smeri translacije t. Tedaj komutira tudi s translacijo t, zato za vsako celo število k velja

$$(gt^k)^2 = g^2 t^{2k} = t^{m+2k}.$$

Sedaj lahko določimo tako število k, da je $m + 2k = 0$ ali $m + 2k = 1$ in izberemo generatorje grupe F na naslednji način:
Ohranimo translacijo t zdrs g pa nadomestimo z $g' = gt^k$. Če je $(g')^2 = 1$, je g' zrcaljenje z osjo vzporedno smeri translacije in znova dobimo grupo F_1^1, v nasprotnem primeru pa je g' zdrs, ki ga 'površno' znova označimo kar z g. Tako dobimo še zadnji primer Frizijske grupe brez rotacij, tj.

$$F_1^3 = \langle t, g \mid g^2 = t, gtg = t \rangle$$

2. Obdelajmo sedaj še primer, ko F vsebuje netrivialno rotacijo r. Tedaj je rtr^{-1} OP- izometrija, brez fiksne točke.

Naloga. Prepričaj se, da rtr^{-1} nima fiksnih točk.

Torej je rtr^{-1} translacija, zato je $rtr^{-1} = t^k$, za neko celo število $k \neq 0$. Naj bo O središče rotacije r, $\vec{a} = \vec{OA}$ vektor translacije t in l nosilka daljice OA. Potem velja $t^k(O) = t^k r(O) = rt(O) = r(A)$. Točka $t^k(O)$, leži na premici l, točka $r(A)$ pa leži na premici l samo, če je kot netrivialne rotacije r enak π. V tem primeru dobimo $k = -1$, kar določa relacijo

$$rt = t^{-1} r.$$

Analogno tudi vsaki drugi netrivialni rotaciji $r' \in F$ pripada kot π. Če imata r in r' skupno središče, sta enaki, v nasprotnem primeru pa je rr' brez fiksnih točk, zato je enak translaciji.

NALOGA. Prepričaj se, da je rr' brez fiksnih točk (zapiši predpisa za $r(x,y)$ in $r'(x,y)$, če sta središči enaki $O(a,b)$ in $O'(a',b')$).

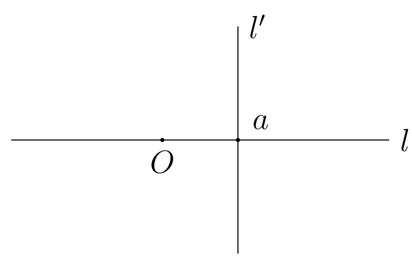
Dobimo torej $r' \in r^{-1}T$, zato rotacije r' ne potrebujemo med generatorji grupe F.
2.1. Če grupa F vsebuje le OP-izometrije, tako dobimo

$$F_2^1 = \langle t, r \mid r^2 = 1, rtr = t^{-1} \rangle.$$

2.2. Denimo, da poleg rotacije r v grupi F najdemo še kako zrcaljenje ali zrcalni zdrs $g \in F$. Označimo z $F^+ \subset F$ podgrupo vseh OP-izometrij. Potem velja

$$F = F^+ \cup gF^+.$$

Definirajmo premico l kot tisto premico skozi središče O rotacije r, ki ima smer translacije t. Kot v primeru **1** se prepričamo, da je os l' zrcaljenja/zdrsa g bodisi vzporedna premici l, bodisi pravokotna nanjo. V prvem primeru velja še $gtg^{-1} = t$, v drugem pa $gtg^{-1} = t^{-1}$. Če je g zrcalni zdrs kot v primeru **1** ugotovimo, da je njegova os vzporedna l. Če je $g = z$ zrcaljenje, katerega os l' je pravokotna na l, je $g' = rz$ OR-izometrija. Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v točko O in premico l izberimo za abscisno os.



Če premica l' seka l v točki $(a,0)$, je $rz(x,y) = r(2a-x,y) = (x-2a,-y)$, kar ustreza zrcalnemu zdrsu z osjo l. Ta primer bomo obdelali kot zadnji. Predpostavimo sedaj, da je $g = z$ zrcaljenje z osjo l' vzporedno osi x. Tedaj poteka ta os skozi točko $(0,b)$ in je $z(x,y) = (x, 2b-y)$, torej je $rz(x,y) = (-x, y-2b)$, torej je rz zrcalni zdrs z osjo pravokotno na l. Kot vemo, zrcalnega zdrsa z osjo pravokotno na l in netrivialnim premikom grupa F na premore, zato je $b = 0$, izometrija rz, pa je zrcaljenje čez ordinatno os. Dobimo naslednji tip Frizijske grupe

$$F_2^2 = \langle t, r, z \mid r^2 = z^2 = (rz)^2 = 1, tz = zt, rt = t^{-1}r \rangle.$$

V zadnjem preostalem primeru je g zrcalni zdrs z osjo l' vzporedno l. Prepričamo se lahko, da velja $l = l'$.

Naloga. Če velja $(0,b) \in l'$, je $rgrg^{-1}$ netrivialna translacija s smerjo vektorja oblike $(m,-4b)$. Od tod sklepaj, da je $l' = l$.

Ko izvedemo enak trik kot v primeru **1**, lahko privzamemo še, da je $g^2 = t$. Če izberemo tako enoto v koordinatnem sistemu, da je $t(x,y) = (x+1,y)$, potem je $g(x,y) = (x+\frac{1}{2},-y)$, $r(x,y) = (-x,-y)$, od koder dobimo $gr(x,y) = g(-x,-y) = (-x+\frac{1}{2},y)$. Od tod sledi

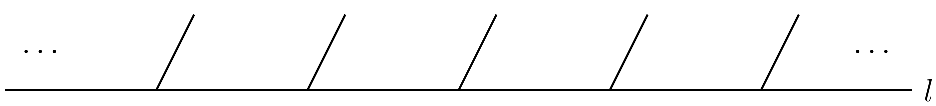
$$(gr)^2 = 1$$

in dobimo še zadnji tip Frizijske grupe

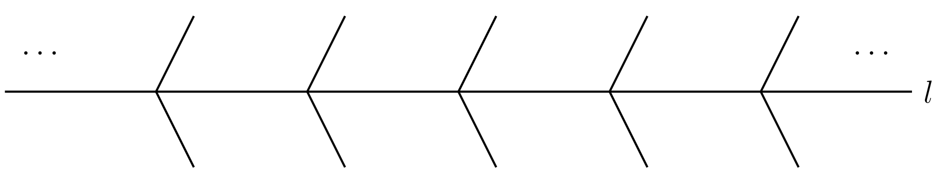
$$F_2^3 = \langle t,r,g \mid r^2 = (gr)^2 = 1, g^2 = t, tg = gt, rt = t^{-1}r\rangle.$$

Za konec si oglejmo še Frizijske vzorce, ki pripadajo posamičnim Frizijskim grupam.

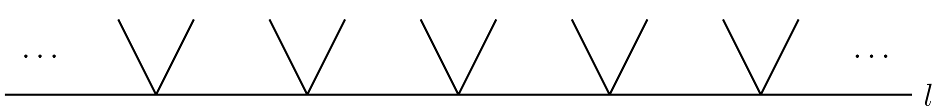
$$F_1 = \langle t\rangle = \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\}:$$



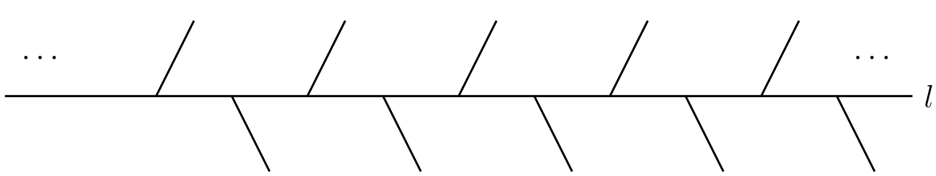
$$F_1^1 = \langle t,z \mid z^2 = 1, ztz = t\rangle:$$



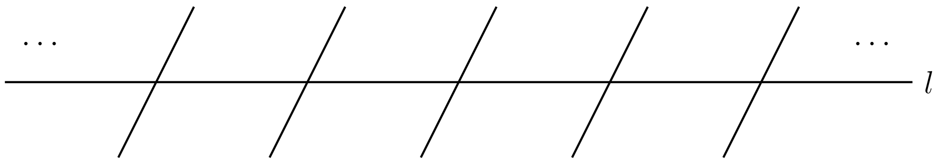
$$F_1^2 = \langle t,z \mid z^2 = 1, ztz = t^{-1}\rangle:$$



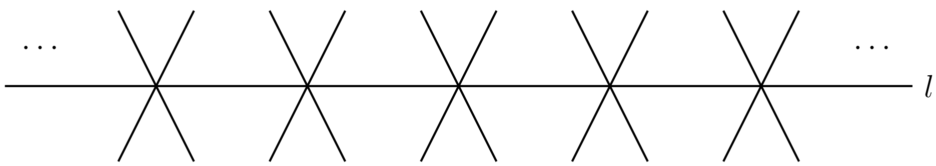
$$F_1^3 = \langle t,g \mid g^2 = t, gtg = t\rangle:$$



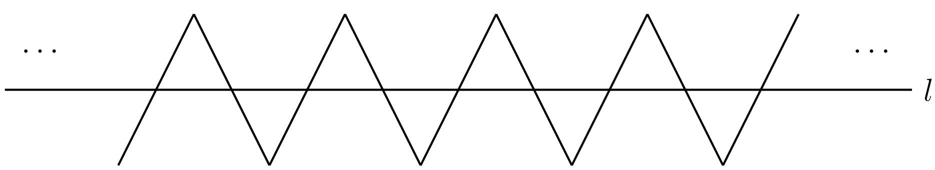
$$F_2^1 = \langle t, r \mid r^2 = 1, rtr = t^{-1} \rangle :$$



$$F_2^2 = \langle t, r, z \mid r^2 = z^2 = (rz)^2 = 1, tz = zt, rt = t^{-1}r \rangle :$$



$$F_2^3 = \langle t, r, g \mid r^2 = (gr)^2 = 1, g^2 = t, tg = gt, rt = t^{-1}r \rangle :$$



Naloga. Ali je premica Frizijski vzorec?

Naloga. Ugotovi Frizijsko grupo naslednjega vzorca: