IZRAČUNAVANJE POSEBNIH LIMIT

MARKO KANDIĆ

POVZETEK. Na kratko bomo ponovili osnovna pravila računanja z limitami in osnovne tipe limit, s katerimi se sreča matematik. Nato bomo izpeljali Wallisovo produktno formulo

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots ,$$

s pomočjo katere bomo na koncu dokazali Stirlingovo formulo, ki pravi, da za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n .$$

1. Pravila za računanje z limitami in osnovni tipi limit

Matematik se vseskozi pri svojem delu srečuje z raznimi limitami. Pri tem, z znanimi pravili poskuša tvoriti nove limite. V naslednji trditvi so zbrane osnovne lastnosti računanja z limitami.

Trditev 1.1. *Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

(a) *Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je zaporedje $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\alpha \cdot a$.*
(b) *Zaporedje $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito $a + b$.*
(c) *Zaporedje $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito ab.*
(d) *Če je $b_n \neq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $b \neq 0$, je zaporedje $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\frac{a}{b}$.*

Kot posledico zveznosti funkcije $f : x \mapsto \sqrt{x}$ na intervalu $[0, \infty)$ za vsako konvergentno zaporedje nenegativnih števil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje $\{\sqrt{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tudi konvergentno z limito

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Izrek 1.2 (Izrek o sendviču)**.** *Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.*

Dokaz: Izberimo $\epsilon > 0$ poljuben. Ker je $c_n \geq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in ker velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $0 \leq c_n - a_n < \epsilon$ za vse $n \geq n_0$. Ker za $n \geq n_0$ velja $0 \leq c_n - b_n \leq c_n - a_n < \epsilon$, zaporedje $\{c_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0. S pomočjo enakosti

Date: 3. februar 2016.

$b_n = c_n - (c_n - b_n)$ in Trditve 1.1 pokažemo, da je zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $L - 0 = L$. ∎

Navedimo nekaj posledic izreka o sendviču.

Posledica 1.3. *Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

Dokaz: Za dokaz (a), najprej predpostavimo, da je $x \geq 0$. Ker je primer $x = 0$ nezanimiv, predpostavimo $x > 0$ in označimo $x_n = x^n$. Ker je $x_{n+1} = x^n \cdot x < x^n = x_n$, je zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče. Ker pa je tudi navzdol omejeno, je konvergentno. Označimo z L njegovo limito. Uporabimo Trditev 1.1 v primeru enakosti $x_{n+1} = x \cdot x_n$, da dobimo $L = Lx$. Ker $x \neq 1$, dobimo $L = 0$. Splošni primer sledi iz neenakosti $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ in izreka o sendviču.

Za dokaz (b), pišimo $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ in uporabimo binomsko formulo, da dobimo

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots + x_n^n.$$

Iz zgornje enakosti lahko sklepamo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \leq n$ oziroma $x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$, od koder zaradi monotonosti korenske funkcije sledi $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Sedaj uporabimo izrek o sendviču.

Za dokaz (c), izberimo $a > 0$ in najmanjši $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $n_0 \geq a$. Predpostavimo še $a \geq 1$. Ker za $n \geq n_0$ velja $1 \leq a \leq n_0 \leq n$, lahko izpeljemo $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$. Dokaz v primeru $a \geq 1$ zaključimo z uporabo izreka o sendviču. Če pa je $a < 1$, potem je $b := \frac{1}{a} > 1$. Po že dokazanem je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, od koder z uporabo Trditve 1.1 sledi željena enakost.

Za dokaz (d) opazimo, da za $n \geq 3$ velja $1 \leq \ln n \leq n$. Kot zgoraj uporabimo izrek o sendviču. ∎

Čeprav kaže, da je izrek o sendviču precej močno orodje, z njegovo pomočjo ne moremo izračunati razmeroma enostavnih limit. Primer takega zaporedja je zaporedje $\{\sqrt[n]{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Iz očitne neenakosti $1 \leq n! \leq n^n$ zaradi monotonosti n-tega korena takoj sledi

$$1 \leq \sqrt[n]{n!} \leq n.$$

Ker leva stran konvergira proti 1, desna stran pa raste čez vse meje, je izrek o sendviču v tem primeru neuporaben. Za izračun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Izrek 1.4. *Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Če obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Dokaz: Naj bo zaporedje $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L in izberimo $\epsilon > 0$ poljuben. Tedaj obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon$$

oziroma

$$L - \epsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \epsilon.$$

Odtod izpeljemo, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$(L-\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq (L+\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Iz zgornjega za vsak $n \geq n_0$ sledi

$$(L-\epsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\epsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_0}.$$

Po definiciji limes superiorja sledi $L - \epsilon \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \epsilon$. Ker je $\epsilon > 0$ poljubno izbran, je $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Na podoben način vidimo, da velja $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Ker je

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

zaporedje $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira, njegova limita pa je enaka L. ■

Oglejmo si zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podano s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n!}$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, po Izreku 1.4 velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Iz spodnje verige ekvivalenc pa se prepričamo, da je zaporedje $\{\sqrt[n]{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tudi strogo naraščajoče:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n+1]{(n+1)!} \iff (n!)^{n+1} \leq ((n+1)!)^n \iff n! \leq (n+1)^n$$

Zato je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Kljub temu še vedno ne vemo, kako hitro zaporedje $\{\sqrt[n]{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ narašča.

Za boljši občutek z Matematico izračunajmo nekaj vrednosti izraza $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

n	$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
1	1.00000000
2	1.41421356
10	2.20812521
100	2.63208532
1000	2.70642101
10000	2.71678063
100000	2.71810038

Primer 1.1. *Izrek 1.4 lahko uporabimo tudi v primeru bolj kompliciranih limit.*

(a) *Kot prvi zgled izračunajmo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}}.$$

Definiramo

$$a_n = \frac{(4n)!}{n!(3n)!}$$

in izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(4n+4)!}{(n+1)!(3n+3)!}}{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+4)!}{(4n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(3n)!}{(3n+3)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{256}{27}.$$

Po Izreku 1.4 limita iz zgleda obstaja in je enaka $\frac{256}{27}$.

(b) *Kot drugi zgled izračunajmo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Definiramo

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

in izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Po Izreku 1.4 limita iz zgleda obstaja in je enaka e.

Ker velja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

s čimer smo podali odgovor na vprašanje o hitrosti naraščanja zaporedja $\{\sqrt[n]{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$. V zadnjem razdelku bomo pokazali, da za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \cdot (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}.$$

2. Wallisova formula

Naj bo $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. S p_n označimo produkt števil $z_1, \ldots, z_n$. Če obstaja limita $p := \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, pravimo, da je p neskončen produkt števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru p označimo kot $\prod\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. V naslednjem primeru si bomo ogledali nekaj osnovnih zgledov neskončnih produktov.

Primer 2.1. *Zaradi enostavnosti se omejimo le na produkte pozitivnih števil.*

(1) *Naj bo* $z_n = a \geq 0$. *Tedaj za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *velja* $p_n = a^n$. *Ker je*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq a < 1 \\ 1 & : \quad a = 1 \\ \infty & : \quad a > 1 \end{cases},$$

neskončni produkt konvergira le v primeru, ko je $0 \leq a \leq 1$.

(2) *Naj bo* $z_n = a^{\lambda_n}$, *kjer je* $a > 0$ *in* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zaporedje pozitivnih števil. Ker je* $p_n = a^{s_n}$ *za* $s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, *neskončni produkt konvergira natanko takrat, ko konvergira številska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

Netrivialni zgled neskončnih produktov je *Wallisova produktna formula:*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

To formulo je leta 1655 zapisal Angleški matematik John Wallis, ki mu delno pripisujejo razvoj infinitezimalnega računa. Med letoma 1643 in 1689 je služil kot glavni kriptograf parlamenta. Vpeljal je tudi simbol ∞ za neskončnost.

Ker infinitezimalni račun kakršnega poznamo danes, takrat ni obstajal, in ker Matematična analiza tedanjega časa ni bila dovolj razvita, da bi odgovarjala na vprašanja o konvergenci, je Wallisova produktna formula precejšen raziskovalni dosežek tedanjega časa.

Predstavimo dokaz, kakršnega je poznal že Wallis.

Izrek 2.1 (Wallisova produktna formula)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ vpeljemo

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

S pomočjo integracije po delih za $n \in \mathbb{N}$ izpeljemo

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \sin x dx \\ &= -\cos x \sin^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (1 - \sin^2 x) x dx \\ &= (n+1)(J_n - J_{n+2}), \end{aligned}$$

od koder za $n \geq 2$ sledi

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}. \tag{1}$$

Z zaporedno uporabo formule (1) za vsak $k \in \mathbb{N}$ izračunamo

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0$$

in

$$J_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1.$$

Ker je

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{in} \qquad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

za $n \geq 2$ dobimo

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{in} \qquad J_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

Ker za vsak $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$, po eni izmed osnovnih lastnosti Riemannovega določenega integrala sledi $J_{n+1} \leq J_n$. Ker pa velja

$$1 \leq \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{J_{2n}}{J_{2n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2n},$$

po izreku o sendviču sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1.$$

Wallisova produktna formula sedaj sledi iz spodnje vrstice

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

■

Opomba: Če definiramo

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n \qquad \text{in} \qquad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1),$$

lahko Wallisovo produktno formulo zapišemo kot

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{2}$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $(2n)!! = 2^n n!$ in $(2n)!!(2n-1)!! = (2n)!$, Wallisovo produktno formulo (2) lahko prepišemo v obliki

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}.\end{aligned}$$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$, dobimo

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Wallisova formula je le poseben primer *Eulerjeve formule*. Preden jo navedemo, potrebujemo nekaj osnovnih pojmov kompleksne analize.

Naj bo Ω odprta podmnožica kompleksne ravnine in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Naj bo $a \in \Omega$ in naj obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

To limito imenujemo odvod funkcije f v točki a in jo označimo z $f'(a)$. Funkcijo f imenujemo holomorfna funkcija na Ω, če za vsak $a \in \Omega$ obstaja $f'(a)$. Holomorfno funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ imenujemo *cela funkcija*. Po *Weierstrassovem faktorizacijskem izreku* lahko vsako celo funkcijo zapišemo kot neskončen produkt celih funkcij, ki imajo največ eno enostavno ničlo. Bralec lahko več o neskončnih produktih in dokaz Weierstrassovega faktorizacijskega izreka najde v [2]. Za konec tega razdelka navedimo Eulerjevo produktno formulo za funkcijo sinus:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Če v zgornjo enakost vstavimo $z = \frac{1}{2}$, dobimo

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}\right),$$

od koder nemudoma sledi Wallisova produktna formula.

3. Stirlingova formula

Namen tega razdelka je asimptotična obravnava izraza $\sqrt[n]{n!}$. Kot posledico Izreka 1.4 smo dobili, da je izraz $\sqrt[n]{n!}$ za velike n približno enak $\frac{n}{e}$, s čimer je mišljeno, da velja

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Spodnja tabela prikazuje na devet decimalnih mest zaokrožene račune z uporabo programa Mathematica.

n	$\sqrt[n]{n!}$	$\frac{n}{e}$	$\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$
10	4.52872869	3.67879441	4.52495757
100	37.9926893	36.7879441	37.9923727
1000	369.491663	367.879441	369.491633
10000	3680.82718	3678.79441	3680.82718
100000	36790.3999	36787.9441	36790.3999

Iz tabele razberemo, da je izraz $\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$ bistveno boljši približek izraza $\sqrt[n]{n!}$ kot pa izraz $\frac{n}{e}$. Spodnja tabela prikazuje absolutno razliko med izrazoma $\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$ in $\sqrt[n]{n!}$.

n	$\sqrt[n]{n!}$	$\frac{n}{e}\cdot\sqrt[2n]{2\pi n}$	razlika
100	37.9926893	37.9923727	0.0003166
200	74.9004528	74.9002968	0.000156
300	111.759901	111.759798	0.000103
400	148.599051	148.598973	0.000077
500	185.426934	185.426872	0.000062
600	222.247633	222.247582	0.000051
700	259.063348	259.063304	0.000044
800	295.875398	295.875360	0.000039
900	332.684641	332.684607	0.000034
1000	369.491663	369.491633	0.000031

Dokaz Stirlingove formule je povzet po spletnih zapiskih profesorja Jaceka Cichońa [1].

Izrek 3.1 (Stirlingova formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}.$$

Če Strilingovo formulo zapišemo v asimptotični obliki, dobimo

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Dokaz. Za $n\in\mathbb{N}$ označimo

$$a_n=\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}$$

in pokažimo, da je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno. Naj bo $b_n=\ln a_n$. Z neposrednim računom se lahko prepričamo, da velja

$$\begin{aligned}b_n-b_{n+1}&=\ln\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}-\ln\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{2(n+1)}}\\&=\frac{2n+1}{2}\ln\frac{n+1}{n}-1.\end{aligned}$$

Ker za $|t|<1$ velja

$$\begin{aligned}\ln(1+t)&=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+\cdots\\-\ln(1-t)&=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+\cdots,\end{aligned}$$

je

$$\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Za $t=\frac{1}{2n+1}$, je

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{n+1}{n},$$

od koder sledi

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2n+1}{2} \ln \frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} > 0.$$

S tem smo pokazali, da je zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče. Pokažimo, da je tudi navzdol omejeno. Potemtakem bo konvergentno.

V spodnji vrstici imamo opravka z vsoto geometrijske vrste:

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} = \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Ker je

$$b_1 - b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n),$$

je

$$b_1 - b_n < \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{4},$$

od koder sledi $b_n > b_1 - \frac{1}{4}$. S tem smo utemeljili, da je zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno. Ker je $a_n = e^{b_n}$, je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tudi konvergentno. Če označimo

$$D := \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2n}},$$

dobimo $n! \sim D\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Če pa še upoštevamo Wallisovo formulo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

dobimo

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} D^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{D^2 4n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (2n+1} = D^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} 4n^2 n^{4n}}{4n(2n+1)(2n)^{4n}} = \frac{D^2}{2},$$

od koder sledi $D = \sqrt{\pi}$.

□

4. Primer divergentnega zaporedja

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki je podano s splošnim členom $a_n = \sin n$ divergira. Predpostavimo nasprotno, tj., obstaja

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin n.$$

Ker je podzaporedje konvergentnega zaporedja konvergentno z isto limito kot originalno zaporedje, je

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = \lim_{n\to\infty} (\sin n \cos 1 + \cos n \sin 1).$$

Ker je vsota konvergentnih zaporedij zopet konvergentno zaporedje, obstaja $M := \lim\limits_{n\to\infty} \cos n$. S pomočjo formule za sinus dvojnega kota dobimo

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin 2n = \lim_{n\to\infty} 2 \sin n \cos n = 2LM.$$

Odtod sledi $L(2M-1)=0$. Če je $L=0$, potem iz

$$L = \cos 1 \cdot L + \sin 1 \cdot M$$

sledi $\sin 1 \cdot M = 0$. Ker $\sin 1 \neq 0$, je $M = 0$. Iz zveze

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

dobimo $L^2 + M^2 = 1$, kar je protislovje z $L = M = 0$. Ker $L \neq 0$, je $M = \frac{1}{2}$. Ker je $L^2 + M^2 = 1$, je $L = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} \cos 2n = M = \frac{1}{2}$ in ker iz zveze

$$\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$$

sledi $M = M^2 - L^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$, zopet pridemo v protislovje. Torej $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ ne obstaja. Na podoben način vidimo, da ne obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n$.

Velja bistveno več:

Izrek 4.1. *Zaporedje* $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je gosto v intervalu* $[-1,1]$.

V spodnjem dokazu bomo brez dokaza uporabili dejstvo, da je množica

$$\{a + \lambda b : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, če je λ racionalno število.

Dokaz: Naj bo x poljubno realno število. Ker je množica

$$A = \{a + 2\pi b : \ a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}\}$$

gosta podmnožica realnih števil, obstajajo taka naravna števila $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in cela števila $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + 2\pi b_n) = x.$$

Ker je sinusna funkcija zvezna, je

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sin(a_n + 2\pi b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin a_n.$$

■

Literatura

[1] http://ki.pwr.edu.pl/cichon/Math/StirlingApp.pdf
[2] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
[3] M. Giaquinta, G. Modica, *Mathematical Analysis: Approximation and Discrete Processes*, Birkhäuser Boston, Boston, 2004.
[4] John Wallis, https://en.wikipedia.org/wiki/John_Wallis#cite_note-1