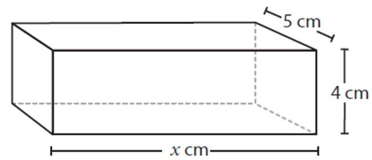
Timss

t1. Prostornina škatle, ki ima obliko kvadra, je 200cm^3. Kolikšna je dolžina x?



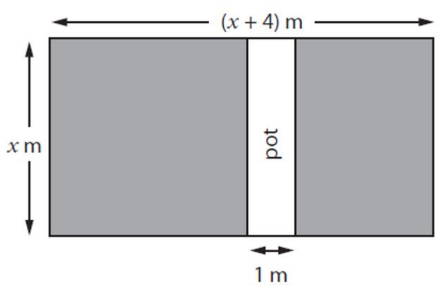
t2. Katero od naslednjega je NAJBOLJŠI približek za $\frac{7{,}21\cdot 3{,}86}{10{,}09}$?

a) $\frac{7\cdot3}{10}$ b) $\frac{7\cdot4}{10}$ c) $\frac{7\cdot3}{11}$ d) $\frac{7\cdot4}{11}$

t3. Kateri od izrazov prikazuje, kako lahko 36 zapišemo kot produkt prafaktorjev?

a) $6\cdot6$ b) $4\cdot9$ c) $4\cdot3\cdot3$ d) $2\cdot2\cdot3\cdot3$

t4. To je načrt pravokotnega vrta. Beli del je pravokotna pot, široka 1 meter. Kateri izraz predstavlja ploščino osenčenega dela vrta v kvadratnih metrih?



a) x^2+3x
b) x^2+4x
c) x^2+4x-1
d) x^2+3x-1

t5. Kateri številski izraz je pravilen?

a) $\frac{3}{10}$ od $50 = 50\%$ od 3 b) 3% od $50 = 6\%$ od 100
c) $50:30 = 30:50$ d) $\frac{3}{10}\cdot 50 = \frac{5}{10}\cdot 30$

t6. Kateri izraz prikazuje pravi postopek, za izračun $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$?

a) $\frac{1-1}{4-3}$ b) $\frac{1}{4-3}$ c) $\frac{3-4}{3\cdot4}$ d) $\frac{4-3}{3\cdot4}$

Deljivost

d1. Poišči največji skupni delitelj števil 18 in 30 ter najmanjši skupni večkratnik števil 9, 18 in 45.

d2. Kateri pozitivni večkratniki števila 27 so delitelji števila 1188?

Odstotki & ...

%1. Koliko sem star, če sem za pet let starejši od sestre, ki je za 82% mlajša od mame, ki je bila pred desetimi leti desetkrat starejša od mene?

%2. Pred tremi leti je bila Katja za 24% mlajša od Roka. Čez tri leta pa bo Rok za 24% starejši od Katje. Koliko sta stara Katja in Rok (letos)?

Parabola

P1. Parabolo z enačbo $y = (x-1)^2 - 1$ prezrcalite čez koordinatno izhodišče. Narišite dobljeno krivuljo in zapišite njeno enačbo.

P2. Točki $A(1,2)$ in $B(2,b)$ ležita na paraboli $y = ax^2$. Točka H leži na y – osi in BH je pravokotna na y – os. Točka $C \neq H$ leži na nosilki BH tako, da je $HB = BC$. Parabola $y = cx^2$ gre skozi točko C. Določite a, b in c.

Geometrija

G1. Kroga ležita v isti ravnini: manjši v večjem, njuna robova se dotikata. Ploščina večjega kroga je devetkrat tolikšna kot ploščina manjšega. Razdalja med središčema obeh krogov meri 2 dm. Izračunajte polmera obeh krogov.

G2. Dana je točka $P(2,0,1)$ v xyz-prostoru. Za točko Q, naj bo točka R presek nosilke PQ in xy-ravnine. Narišite množico vseh točk R, ko točka Q prepotuje krivuljo $z = y^2$ v yz-ravnini.

G3. Naj bodo a, b, c pozitivna realna števila. Ploskev R v $\mathbb{R}^3$ je množica točk (x,y,z) za katere velja $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ in $z = c$. Točkasto svetilo P se giblje po krivulji $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = c+1$. Skicirajte in izračunajte ploščino lika, ki ga na ploskvi xy opiše senca ploskve R.

Izpit 1

1. Poiščite ekstremne vrednosti funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ na intervalu $-\frac{7}{4} \leq x \leq 3$.
2. Dana je točka $P(2,0,1)$ v xyz-prostoru. Za točko Q, naj bo točka R presek nosilke PQ in xy-ravnine. Narišite množico vseh točk R, ko točka Q prepotuje krivuljo $z = y^2$ v yz-ravnini.
3. Pravokotnik $ABCD$ ima stranici dolgi 1 in a. Točka E je presečišče diagonal. Narišite pet krogov z radiji r in s središči v točkah A, B, C, D in E. Poiščite največji r za katerega bo ploščina preseka poljubnih dveh krogov enaka nič. Naj bo $S(a)$ ploščina preseka pravokotnika z unijo vseh petih tako določenih krogov. Skicirajte funkcijo
$$\frac{S(a)}{a}.$$
4. Pokončna piramida ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico a. Vsi robovi piramide so tangentni na kroglo, ki ima središče v središču osnovne ploskve piramide. Izrazite
   (a) višino piramide;
   (b) prostornino preseka piramide in krogle.

Izpit 2

1. Tetraeder postavimo na ravnino. *Poteza* pomeni, da tetraeder (naključno) 'prevalimo' preko poljubnega roba. (Tetraeder po potezi leži na drugi ploskvi.) Kolikšna je verjetnost, da bo po n potezah tetraeder ležal na isti ploskvi kot na začetku?

2. Naj bodo a, b, c pozitivna realna števila. Ploskev R v $\mathbb{R}^3$ je množica točk (x, y, z) za katere velja $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ in $z = c$. Točkasto svetilo P se giblje po krivulji $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = c+1$. Skicirajte in izračunajte ploščino lika, ki ga na ploskvi xy opiše senca ploskve R.

3. Za $p \in \mathbb{R}$ imamo enačbo $x^3 - 3x - p = 0$. Če ima enačba eno samo realno rešitev, naj bo $f(p)$ kvadrat te rešitve. Sicer naj bo $f(p)$ produkt najmanjše in največje rešitve te enačbe.

   (a) Poiščite minimum funkcije $f(p)$.

   (b) Približno skicirajte funkcijo $f(p)$.

4. Pokažite, da za naravna števila $n = 1, 2, \ldots$ obstajajo polinomi $p_n(x), q_n(x)$, za katere

   a) Velja
   $$\sin(n\varphi) = p_n(\tan\varphi)\cos^n\varphi$$
   $$\cos(n\varphi) = q_n(\tan\varphi)\cos^n\varphi$$

   b) Za $n > 1$ veljajo identitete
   $$p_n'(x) = nq_{n-1}(x)$$
   $$q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$$

5. Kolikšen je lahko največji R, da vsaj kaka premica s smernim koeficientom $\frac{2}{5}$ ne bo sekala (ali se dotikala) nobenega izmed krogov z radijem R in središčem v celoštevilskih točkah ravnine?

6. Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija definirana za $x > 0$ in taka, da velja $f(x_1) > f(x_2) > 0$, kadarkoli je $0 < x_1 < x_2$. Naj bo
   $$S(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$
   in $S(1) = 1$. Za vsak $a > 0$ je ploščina območja omejenega

   - s premico, ki povezuje izhodišče in točko $(a, f(a))$,
   - s premico, ki povezuje izhodišče in točko $(2a, f(2a))$ in
   - s krivuljo $y = f(x)$

   enaka $3S(a)$.

   (a) Izrazite $S(x)$ in $f(x) - 2f(2x)$ kot funkciji x-a.

   (b) Za $x > 0$, naj bo
   $$g(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x).$$
   Določite vrednost integrala
   $$\int_x^{2x} g(t)dt$$

   (c) Določite funkcijo $f(x)$.

'Legenda'

t1-t6. Šest izmed (cca 80 razdeljenih v zvezke po 12) nalog, ki jih je reševalo tudi 4415 slovenskih osmošolcev v raziskavi TIMSS 2011. Bolj kot statistika je mogoče zanimiva vsebinska razprava o uspešnosti reševanja posameznih nalog pri nas in po svetu.

D1, D2. D2 je naloga na slovenski maturi pred leti. D1 je naloga iz nacionalnega preverjanja znanja za 6. razred (dvanajstletniki) na Japonskem.

%**1,** %**2.** %2 je naloga na slovenski maturi pred leti. %1 je naloga, ki jo je sestavil štirinajstletnik.

P1, P2. P1 je naloga na slovenski maturi pred leti. P2 je naloga iz nacionalnega preverjanja znanja za petnajstletnike na Japonskem.

G1-G3. G1 je naloga na slovenski maturi pred leti. G2 je naloga iz sprejemnega izpita za humanistične študije na Tokijski univerzi. G3 je naloga iz sprejemnega izpita za naravoslovne in tehnične študije na Tokijski univerzi.

Izpit 1. Sprejemni izpit za humanistične študije na Tokijski univerzi leta 1991. Čas pisanja 100 minut. Sprejetih 642 od 1906.

Izpit 2. Sprejemni izpit za naravoslovne in tehnične študije na Tokijski univerzi 1991. Čas pisanja 150 minut. Sprejetih 1183 od 2714.