Izračunavanje posebnih limit

Marko Kandić

29. 1. 2016

- Ponovitev osnovnih pojmov

- Ponovitev osnovnih pojmov
- Ponovitev pravil za računanje z limitami in osnovni tipi limit

- Ponovitev osnovnih pojmov
- Ponovitev pravil za računanje z limitami in osnovni tipi limit
- Wallisova produktna formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

- Ponovitev osnovnih pojmov
- Ponovitev pravil za računanje z limitami in osnovni tipi limit
- Wallisova produktna formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

- Stirlingova formula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

- Ponovitev osnovnih pojmov
- Ponovitev pravil za računanje z limitami in osnovni tipi limit
- Wallisova produktna formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

- Stirlingova formula

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

- Če bo čas, primer zelo enostavnega "zanimivega" zaporedja, ki nima limite.

Če imamo opravka z raznimi objekti

Če imamo opravka z raznimi objekti

- ponavadi objektom določimo nekakšen vrstni red

$$a_1, a_2, \ldots, a_{291}, \ldots, a_{2016}, \ldots.$$

Če imamo opravka z raznimi objekti

- ponavadi objektom določimo nekakšen vrstni red

$$a_1, a_2, \ldots, a_{291}, \ldots, a_{2016}, \ldots.$$

- s tem objekte razvrstimo v zaporedje

Če imamo opravka z raznimi objekti

- ponavadi objektom določimo nekakšen vrstni red

$$a_1, a_2, \dots, a_{291}, \dots, a_{2016}, \dots .$$

- s tem objekte razvrstimo v zaporedje
- zaporedja lahko imajo končno členov ali neskončno členov.

V matematiki imamo opravka z raznimi zaporedji. Najbolj znani sta zaporedji realnih in/ali kompleksnih števil.

Kako formalno definirati zaporedje?

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Ponavadi pišemo $a_n = f(n)$.

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Ponavadi pišemo $a_n = f(n)$.
- a_n imenujejmo splošni člen zaporedja.

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Ponavadi pišemo $a_n = f(n)$.
- a_n imenujejmo splošni člen zaporedja.
- Zaporedje označimo z $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Ponavadi pišemo $a_n = f(n)$.
- a_n imenujejmo splošni člen zaporedja.
- Zaporedje označimo z $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Podobno vpeljemo zaporedja kompleksnih števil.

Kako formalno definirati zaporedje?

- Zaporedje realnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Ponavadi pišemo $a_n = f(n)$.
- a_n imenujejmo splošni člen zaporedja.
- Zaporedje označimo z $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Podobno vpeljemo zaporedja kompleksnih števil.

Kakšna so lahko zaporedja?

Odgovor:

Odgovor: zelo različna.

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega
- padajoča: naslednji člen je manjši ali enak od prejšnjega

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega
- padajoča: naslednji člen je manjši ali enak od prejšnjega
- konstantna: vsi členi so med seboj enaki

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega
- padajoča: naslednji člen je manjši ali enak od prejšnjega
- konstantna: vsi členi so med seboj enaki
- navzgor omejena: vsi členi so manjši od nekega števila

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega
- padajoča: naslednji člen je manjši ali enak od prejšnjega
- konstantna: vsi členi so med seboj enaki
- navzgor omejena: vsi členi so manjši od nekega števila
- navzdol omejena: vsi členi so večji od nekega števila

Odgovor: zelo različna.

- naraščajoča: naslednji člen je večji ali enak od prejšnjega
- padajoča: naslednji člen je manjši ali enak od prejšnjega
- konstantna: vsi členi so med seboj enaki
- navzgor omejena: vsi členi so manjši od nekega števila
- navzdol omejena: vsi členi so večji od nekega števila
- neomejena na eno ali obe strani

- Včasih se členi zaporedja približujejo nekemu številu.

- Včasih se členi zaporedja približujejo nekemu številu.
- To število imenujemo limita zaporedja.

- Včasih se členi zaporedja približujejo nekemu številu.
- To število imenujemo limita zaporedja.

Primer:

$a_n = \frac{1}{n}$ in $b_n = 1 + (-1)^n$.

- Včasih se členi zaporedja približujejo nekemu številu.
- To število imenujemo limita zaporedja.

Primer:

$a_n = \frac{1}{n}$ in $b_n = 1 + (-1)^n$.

$$\begin{array}{ll} a_n: & 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots \\ b_n: & 0, 2, 0, 2, \ldots, 2, 0, \ldots \end{array}$$

- Včasih se členi zaporedja približujejo nekemu številu.
- To število imenujemo limita zaporedja.

Primer:

$a_n = \frac{1}{n}$ in $b_n = 1 + (-1)^n$.

$$\begin{array}{ll} a_n: & 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots \\ b_n: & 0, 2, 0, 2, \ldots, 2, 0, \ldots \end{array}$$

Opazimo, da se zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ približuje 0, zaporedje $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pa se ne približuje nobenem številu.

Definicija:

Število L je limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Definicija:

Število L je limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Če ima zaporedje limito, ga imenujemo konvegentno zaporedje.

Definicija:

Število L je limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Če ima zaporedje limito, ga imenujemo konvegentno zaporedje.

Definicija:

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k $+\infty$, če za vsak $M > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \geq M$.

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Trditev:

Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Trditev:

Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:

(a) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je zaporedje $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\alpha \cdot a$.

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Trditev:

Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:

(a) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je zaporedje $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\alpha \cdot a$.

(b) Zaporedje $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito $a + b$.

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Trditev:

Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:

(a) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je zaporedje $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\alpha \cdot a$.

(b) Zaporedje $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito $a + b$.

(c) Zaporedje $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito ab.

Naštejmo nekaj osnovnih pravil računanja z limitami.

Trditev:

Naj bosta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma konvergentni zaporedji z limitama a in b. Tedaj veljajo naslednje trditve:

(a) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je zaporedje $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\alpha \cdot a$.

(b) Zaporedje $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito $a + b$.

(c) Zaporedje $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno z limito ab.

(d) Če je $b_n \neq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $b \neq 0$, je zaporedje $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $\frac{a}{b}$.

Prejšnji izrek nam pove, kako iz konvergentnih zaporedij tvoriti nova konvergentna zaporedja.

Prejšnji izrek nam pove, kako iz konvergentnih zaporedij tvoriti nova konvergentna zaporedja.

Kako ugotoviti, če zaporedje konvergira v primeru, ko limite ne znamo izračunati?

Prejšnji izrek nam pove, kako iz konvergentnih zaporedij tvoriti nova konvergentna zaporedja.

Kako ugotoviti, če zaporedje konvergira v primeru, ko limite ne znamo izračunati?

Izrek

- Naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.

Prejšnji izrek nam pove, kako iz konvergentnih zaporedij tvoriti nova konvergentna zaporedja.

Kako ugotoviti, če zaporedje konvergira v primeru, ko limite ne znamo izračunati?

Izrek

- Naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.
- Padajoče navzdol omejeno zaporedje je konvergentno.

Prejšnji izrek nam pove, kako iz konvergentnih zaporedij tvoriti nova konvergentna zaporedja.

Kako ugotoviti, če zaporedje konvergira v primeru, ko limite ne znamo izračunati?

Izrek

- Naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.
- Padajoče navzdol omejeno zaporedje je konvergentno.

Ali obstaja

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n}?$$

Spomnimo se naslednjih znanih limit

Spomnimo se naslednjih znanih limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

Spomnimo se naslednjih znanih limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

Tudi ti limiti ne izračunamo direktno.

Spomnimo se naslednjih znanih limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Tudi ti limiti ne izračunamo direktno.

- Prvo limito uženemo tako, da pokažemo, da je zaporedje s splošnim členom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ naraščajoče in navzgor omejeno. To limito proglasimo za e.

Spomnimo se naslednjih znanih limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

Tudi ti limiti ne izračunamo direktno.

- Prvo limito uženemo tako, da pokažemo, da je zaporedje s splošnim členom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ naraščajoče in navzgor omejeno. To limito proglasimo za e.
- Ko poznamo prvo limito, z njeno pomočjo izračunamo drugo limito.

Kako pokazati obstoj prve limite?

Kako pokazati obstoj prve limite?

- Uporabimo bionomski izrek:

$$a_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Kako pokazati obstoj prve limite?

- Uporabimo bionomski izrek:

$$a_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

- Velja

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

- Sledi

$$a_n = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \\ + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

- Kdaj ga uporabimo?

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

- Kdaj ga uporabimo?
- Kako ga uporabimo?

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

- Kdaj ga uporabimo?
- Kako ga uporabimo?

Odgovora:

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

- Kdaj ga uporabimo?
- Kako ga uporabimo?

Odgovora:

- Če nas zaporedje spomni na znano zaporedje.

Naslednji izrek je zelo uporaben.

Izrek o sendviču:

Naj bodo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taka zaporedja realnih števil, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \le b_n \le c_n$. Če sta zaporedji $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z isto limito L, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito L.

- Kdaj ga uporabimo?
- Kako ga uporabimo?

Odgovora:

- Če nas zaporedje spomni na znano zaporedje.
- Poiščemo znani zaporedji, ki vkleščita dano zaporedje.

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

Čeprav kaže, da je izrek o sendviču precej močno orodje, z njegovo pomočjo ne moremo izračunati razmeroma enostavnih limit.

Primer uporabe izreka o sendviču:

Naj bo $|x| < 1$ in $a > 0$. Tedaj velja

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

Čeprav kaže, da je izrek o sendviču precej močno orodje, z njegovo pomočjo ne moremo izračunati razmeroma enostavnih limit.

$$a_n = \sqrt[n]{n!}.$$

Za izračun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Za izračun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Izrek:

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Če obstaja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, potem obstaja tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Za izračun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Izrek:

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Če obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Primer:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}} = \frac{256}{27}.$$

Primer:

Zaporedje s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{n!}$ je naraščajoče z

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Primer:

Zaporedje s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{n!}$ je naraščajoče z

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Vprašanje:

Kako hitro zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n!}$ narašča?

Primer:

Zaporedje s splošnim členom $a_n = \sqrt[n]{n!}$ je naraščajoče z

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Vprašanje:

Kako hitro zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n!}$ narašča?

n	$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
1	1.00000000
2	1.41421356
10	2.20812521
100	2.63208532
1000	2.70642101
10000	2.71678063
100000	2.71810038

Primer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Primer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Z drugimi besedami: za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Primer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Z drugimi besedami: za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Ali je zgornji približek resnično dober?

Primer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Z drugimi besedami: za velike $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Ali je zgornji približek resnično dober? NE.

n	$\sqrt[n]{n!}$	$\frac{n}{e}$
10	4.52872869	3.67879441
100	37.9926893	36.7879441
1000	369.491663	367.879441
10000	3680.82718	3678.79441
100000	36790.3999	36787.9441

.

Boljši približek

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$$

Boljši približek

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$$

sledi iz Stirlingove formule

Stirlingova formula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

V dokazu Stirlingove formule bomo potrebovali Wallisovo produktno formulo.

V dokazu Stirlingove formule bomo potrebovali Wallisovo produktno formulo.

Wallisova produktna formula:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

V dokazu Stirlingove formule bomo potrebovali Wallisovo produktno formulo.

Wallisova produktna formula:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Kaj formalno pomenita neskončna vrsta in neskončni produkt?

V dokazu Stirlingove formule bomo potrebovali Wallisovo produktno formulo.

Wallisova produktna formula:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Kaj formalno pomenita neskončna vrsta in neskončni produkt?

Naj bo $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil. Definirajmo

$$s_n = z_1 + \cdots + z_n$$
$$p_n = z_1 \ \cdot \cdots \cdot \ z_n$$

- Če obstaja limita $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, pravimo, da je s neskončna vsota števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru s označimo kot $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

- Če obstaja limita $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, pravimo, da je s neskončna vsota števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru s označimo kot $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.
- Če obstaja limita $p := \lim_{n\to\infty} p_n$, pravimo, da je p neskončen produkt števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru p označimo kot $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

- Če obstaja limita $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, pravimo, da je s neskončna vsota števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru s označimo kot $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.
- Če obstaja limita $p := \lim_{n\to\infty} p_n$, pravimo, da je p neskončen produkt števil $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. V tem primeru p označimo kot $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Povezava med s in p

Ker za $a, b > 0$ velja $\ln ab = \ln a + \ln b$, sta pojma neskončnega produkta in neskončne vrste tesno povezana. Natančneje: za pozitivna števila z_i velja

$$\ln p_n = \ln z_1 + \cdots + \ln z_n.$$

- Naj bo $z_n = a \geq 0$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $p_n = a^n$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq a < 1 \\ 1 & : \quad a = 1 \\ \infty & : \quad a > 1 \end{cases},$$

neskončni produkt konvergira le v primeru, ko je $0 \leq a \leq 1$.

- Naj bo $z_n = a \geq 0$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $p_n = a^n$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \begin{cases} 0 & : & 0 \leq a < 1 \\ 1 & : & a = 1 \\ \infty & : & a > 1 \end{cases},$$

neskončni produkt konvergira le v primeru, ko je $0 \leq a \leq 1$.

- Naj bo $z_n = a^{\lambda_n}$, kjer je $a > 0$ in $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Ker je $p_n = a^{s_n}$ za $s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, neskončni produkt konvergira, če konvergira številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

Wallisova produktna formula:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Wallisova produktna formula:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Ekvivalentni zapisi Wallisove produktne formule:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Označimo

$$a_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Spodnja tabela prikazuje, kako dober približek dobimo z uporabo Wallisove produktne formule za število $\pi \approx 3.14159265$.

n	$2a_n$	razlika
10	3.06770381	0.07388885
100	3.13378749	0.00780516
1000	3.14080775	0.00078491
10000	3.14151412	0.00007853
100000	3.14158480	0.00000785

Glavni koraki v dokazu Wallisove produktne formule

Glavni koraki v dokazu Wallisove produktne formule

- Vpeljemo

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

in za $n \geq 2$ dokažemo

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}.$$

Glavni koraki v dokazu Wallisove produktne formule

- Vpeljemo

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

in za $n \geq 2$ dokažemo

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}.$$

- Za $n \geq 2$ izračunamo

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$J_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

- $$1 \leq \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{J_{2n}}{J_{2n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

- $$1 \leq \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{J_{2n}}{J_{2n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

- Po izreku o sendviču sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1.$$

- $$1 \leq \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{J_{2n}}{J_{2n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

- Po izreku o sendviču sledi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1.$$

- Upoštevamo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} c_n},$$
če $\lim_{n\to\infty} c_n$ obstaja in ni 0.

Čeprav za velike n velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

ta ocena ni najboljša.

Čeprav za velike n velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

ta ocena ni najboljša.

Boljšo oceno dobimo z uporabo Stirlingove formule.

Čeprav za velike n velja

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

ta ocena ni najboljša.

Boljšo oceno dobimo z uporabo Stirlingove formule.

Stirlingova formula:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Primerjava med izrazi $\sqrt[n]{n!}$, $\frac{n}{e}$ in $\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$ za razne vrednosti števila n.

Primerjava med izrazi $\sqrt[n]{n!}$, $\frac{n}{e}$ in $\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$ za razne vrednosti števila n.

n	$\sqrt[n]{n!}$	$\frac{n}{e}$	$\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$
10	4.52872869	3.67879441	4.52495757
100	37.9926893	36.7879441	37.9923727
1000	369.491663	367.879441	369.491633
10000	3680.82718	3678.79441	3680.82718
100000	36790.3999	36787.9441	36790.3999

.

Vidimo, da $\frac{n}{e}$ ni najboljši približek za izraza $\sqrt[n]{n!}$. Kako dober približek dobimo iz Stirlingove formule vidimo v spodnji tabeli.

Vidimo, da $\frac{n}{e}$ ni najboljši približek za izraza $\sqrt[n]{n!}$. Kako dober približek dobimo iz Stirlingove formule vidimo v spodnji tabeli.

n	$\sqrt[n]{n!}$	$\frac{n}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}$	razlika
100	37.9926893	37.9923727	0.0003166
200	74.9004528	74.9002968	0.000156
300	111.759901	111.759798	0.000103
400	148.599051	148.598973	0.000077
500	185.426934	185.426872	0.000062
600	222.247633	222.247582	0.000051
700	259.063348	259.063304	0.000044
800	295.875398	295.875360	0.000039
900	332.684641	332.684607	0.000034
1000	369.491663	369.491633	0.000031

Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Zapis v asimptotični obliki:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Zapis v asimptotični obliki:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720
pribl	0.92	1.92	5.84	23.51	118.02	710.08

Glavni koraki v dokazu Stirlingove formule

Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Zapis v asimptotični obliki:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720
pribl	0.92	1.92	5.84	23.51	118.02	710.08

Glavni koraki v dokazu Stirlingove formule

- Definiramo $a_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}$ in $b_n = \ln a_n$

Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Zapis v asimptotični obliki:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720
pribl	0.92	1.92	5.84	23.51	118.02	710.08

Glavni koraki v dokazu Stirlingove formule

- Definiramo $a_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}$ in $b_n = \ln a_n$
- $b_n - b_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2} \ln \dfrac{n+1}{n} - 1$

- Za $|t| < 1$ velja

$$
\begin{aligned}
\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots \\
-\ln(1-t) &= t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots \\
\ln\frac{1+t}{1-t} &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

- Za $|t| < 1$ velja

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots$$
$$-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots$$
$$\ln\frac{1+t}{1-t} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

- Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je padajoče:

$$b_n - b_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k} > 0$$

- Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je navzdol omejeno:

$$b_n - b_{n+1} < \frac{1}{4n(n+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 - b_n < \frac{1}{4}$$

- Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je navzdol omejeno:

$$b_n - b_{n+1} < \frac{1}{4n(n+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 - b_n < \frac{1}{4}$$

- Padajoča navzdol omejena zaporedja konvergirajo:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}$$

- Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je navzdol omejeno:

$$b_n - b_{n+1} < \frac{1}{4n(n+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 - b_n < \frac{1}{4}$$

- Padajoča navzdol omejena zaporedja konvergirajo:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n}}$$

- Upoštevamo Wallisovo produktno formulo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \sqrt{\pi}$$