

# Regularizacija in singularni razcep

Bor Plestenjak

# Regularizacija in singularni razcep

- Pri reševanju sistemov linearnih enačb se lahko v praksi srečamo s sistemi, ki so zelo občutljivi.
- Orodje, ki nam pomaga razjasniti, zakaj je določen sistem linearnih enačb zelo občutljiv, je **singularni razcep**.
- Singularni razcep je zelo močno orodje v numerični linearni algebri.
- S pomočjo singularnega razcepa lahko pridemo do v praksi uporabnih rešitev nekaterih zelo občutljivih sistemov.
- Postopek, s katerim pridemo do uporabne rešitve zelo občutljivega sistema, se imenuje **regularizacija**.
- Regularizacija se uporablja pri inverznih problemih kot je npr. ostrenje digitalnih fotografij.

# Občutljivost problema

Ko rešujemo nek problem, pričakujemo, da se le-ta lepo obnaša. To naj bi pomenilo, da se ob majhni spremembi podatkov tudi rezultat malo spremeni.

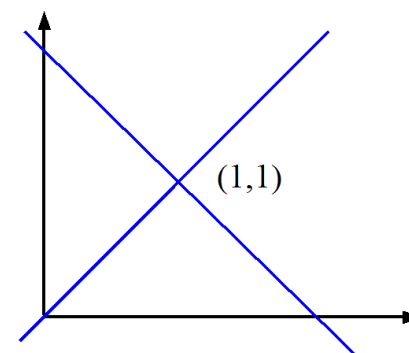
Če se rezultat pri majhni spremembi (motnji) podatkov ne spremeni veliko, je problem *neobčutljiv* (dobro pogojen), sicer pa *občutljiv* (slabo pogojen).

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \implies x = y = 1.$$

Zmotimo desno stran:

$$\begin{cases} x + y = 1.9999 \\ x - y = 0.0002 \end{cases} \implies x = 1.00005, y = 0.99985.$$

Ta sistem je neobčutljiv.

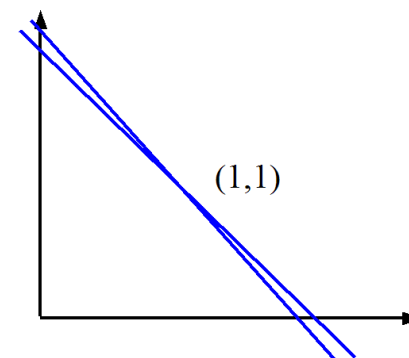


$$\text{b) } \begin{cases} x + 0.99y = 1.99 \\ 0.99x + 0.98y = 1.97 \end{cases} \implies x = y = 1.$$

Zmotimo desno stran:

$$\begin{cases} x + 0.99y = 1.9899 \\ 0.99x + 0.98y = 1.9701 \end{cases} \implies x = 2.97, y = -0.99.$$

Ta sistem je zelo občutljiv.



# Občutljivost in numerično računanje

Pri večini numeričnih metod za reševanje različnih matematičnih problemov je največ, kar lahko zagotovimo, da metoda vrne točno rešitev za bližnji problem.

Takšne tudi metode za reševanje sistemov linearnih enačb. Če numerično rešimo sistem

$$Ax = b$$

in dobimo približek  $\hat{x}$  za  $x$ , zagotovo vemo le to, da je  $\hat{x}$  točna rešitev za malo zmoten sistem. Obstajata torej  $\hat{A} \approx A$  in  $\hat{b} \approx b$ , da je

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b}.$$

Toda, če je začetni sistem  $Ax = b$  zelo občutljiv, se lahko  $\hat{x}$  in  $x$  zelo razlikujeta.

# Singularni razcep

Za vsako matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , obstaja **singularni razcep** (SVD)

$$A = U\Sigma V^T,$$

kjer sta  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  in  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalni matriki in  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  oblike

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & \end{bmatrix},$$

kjer so  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  singularne vrednosti  $A$ .

V primeru  $n < m$  dobimo SVD tako, da transponiramo SVD za  $A^T$ .

$A$  predstavlja preslikavo iz  $\mathbb{R}^n$  v  $\mathbb{R}^m$ . Geometrijski pomen SVD je, da se z ortogonalnima transformacijama baz  $U$  v  $\mathbb{R}^m$  in  $V$  v  $\mathbb{R}^n$   $A$  spremeni v diagonalno matriko:

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

# Lastnosti singularnega razcepa

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n \text{ in } A = U\Sigma V^T$$

Lastne vrednosti  $A^T A$  so  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ , lastni vektorji pa  $v_1, \dots, v_n$ .

Lastne vrednosti  $AA^T$  so  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}$ , lastni vektorji pa  $u_1, \dots, u_m$ .

Naj bo  $\sigma_r > 0$  in  $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ . Če razdelimo

- $V = [V_1 \ V_2]$ , kjer je  $V_1 = [v_1 \ \dots \ v_r]$  in  $V_2 = [v_{r+1} \ \dots \ v_n]$ ,
- $U = [U_1 \ U_2]$ , kjer je  $U_1 = [u_1 \ \dots \ u_r]$  in  $U_2 = [u_{r+1} \ \dots \ u_m]$ ,

potem velja:

- $r = \text{rang}(A)$ ,
- stolpci  $U_1$  tvorijo ortonormirano bazo za  $\text{im}(A)$ ,
- stolpci  $V_2$  tvorijo ortonormirano bazo za  $\text{ker}(A)$ ,
- stolpci  $U_2$  tvorijo ortonormirano bazo za  $\text{ker}(A^T)$ ,
- stolpci  $V_1$  tvorijo ortonormirano bazo za  $\text{im}(A^T)$ .

# Singularna razcepa matrik iz zglada

Neobčutljiv sistem:

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\x - y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.41421 & 0 \\ 0 & 1.41421 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1/\sigma_2 = 1$$

Občutljiv sistem:

$$\begin{aligned}x + 0.99y &= 1.99 \\0.99x + 0.98y &= 1.97\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7107 & -0.7035 \\ -0.7035 & 0.7107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.98005 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7107 & 0.7035 \\ -0.7035 & -0.7107 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1/\sigma_2 = 3.9 \cdot 10^4$$

Občutljivost nesingularne matrike  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je  $\sigma_1/\sigma_n = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

# Reševanje sistemov s pomočjo singularnega razcepa

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nesingularna matrika in  $A = U\Sigma V^T$ .

Rešitev sistema linearnih enačb  $Ax = b$  se potem izraža kot

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

V zgornjem izrazu je  $x$  razvit po levih singularnih vektorjih. Komponente razvoja dobimo tako, da komponente razvoja  $b$  po desnih singularnih vektorjih delimo s singularnimi vrednostmi.

To sledi direktno iz

$$A = V\Sigma^{-1}U^T b.$$



# Slabo zastavljeni problemi

Hadamard<sup>1</sup> je na prelomu 19. in 20. stoletja definiral, kaj naj bi bil dobro zastavljen problem. Po Hadamardu je problem **slabo zastavljen**, če:

- rešitev ni enolična, ali
- rešitev ni zvezna funkcija podatkov, kar pomeni, da poljubno majhna motnja podatkov lahko povzroči poljubno veliko motnjo v rešitvi.

Hadamard je bil prepričan, da se slabo zastavljene probleme lahko ustvari le umetno, ne morejo pa opisovati dejanskih pojavov v naravi.

Izkazalo se je, da to ni res in danes poznamo veliko slabo zastavljenih t.i. inverznih problemov, ki nastopajo na področjih obdelave slik, akustike, obdelave signalov, tomografije, geofizike, ...

---

<sup>1</sup>Francoski matematik Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

## Zgled inverznega problema

Osnoven zgled linearnega slabo pogojenega problema je Fredholmova<sup>2</sup> integralna enačba 1. vrste, ki ima obliko

$$\int_0^1 K(s, t) f(t) dt = g(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

kjer poznamo desno stran  $g$  in jedro  $K$ , iščemo pa funkcijo  $f$ .

Za jedro  $K$  mora veljati, da je s kvadratom integrabilno, oz.

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)^2 ds dt < \infty.$$

Medtem ko jedro  $K$  dobimo iz matematičnega modela v ozadju, desno stran  $g$  ponavadi dobimo iz meritev, zato vrednosti poznamo le v končnem številu točk in le z določeno natančnostjo.

---

<sup>2</sup>Švedski matematik Erik Ivar Fredholm (1866–1927).

## Težave z visokimi frekvencami

Integriranje s  $K$  deluje na funkcijo  $f$  kot glajenje. Pričakujemo lahko, da se zgladijo vse komponente  $f$  z visokimi frekvencami, ostmi in prelomi. Tako npr. za  $f(t) = \sin(2\pi pt)$  in

$$g(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$$

iz Riemann–Lebesgueve leme sledi, da gre  $g \rightarrow 0$ , ko gre  $p \rightarrow \infty$ .

Pri inverznem problemu, ko iz  $g$  računamo  $f$ , lahko pričakujemo ravno obratno, da bomo v  $f$  dobili močno ojačane komponente  $g$  z visokimi frekvencami. Tako lahko že poljubno majhne motnje v  $g$  povzročijo velike motnje v  $f$  in problem ni dobro zastavljen.

Naš cilj je dobiti čim boljši približek za  $f$ .

# Posplošitev singularnega razcepa

Vsako s kvadratom integrabilno jedro  $K$  ima razvoj

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i u_i(s) v_i(t),$$

kjer so  $u_i$  in  $v_i$  leve in desne singularne funkcije  $K$ , ter  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq 0$  singularne vrednosti  $K$ . Singularne funkcije so ortonormirane, kar pomeni

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j, \end{cases}$$

kjer je skalarni produkt podan z  $\langle \varphi, \theta \rangle := \int_0^1 \varphi(t) \theta(t) dt$ . Velja zveza

$$\int_0^1 K(s, t) v_i(t) dt = \sigma_i u_i(s), \quad i = 1, 2, \dots,$$

ki kaže, da je  $\sigma_i$  faktor ojačitve, ko so  $v_i$  preslika v  $u_i$ . Rešitev integralske enačbe lahko potem izrazimo z razvojem

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, g \rangle}{\sigma_i} v_i(t).$$

## Zgled - prevajanje toplote

Za zgled bomo uporabili primer prevajanja toplote. Funkciji  $f$  in  $g$ , ki opisujeta temperaturo na robu in v notranjosti telesa, povezuje Volterrova<sup>3</sup> integralska enačba

$$g(s) = \int_0^s K(s, t) f(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

z jedrom

$$K(s, t) := \frac{e^{-\frac{1}{4(s-t)}}}{2\sqrt{\pi(s-t)^3}}.$$

Z uporabo kvadrature formul integralsko enačbo diskretiziramo in dobimo sistem linearnih enačb

$$Ax = b,$$

kjer je matrika  $A$  izredno občutljiva. Elementi vektorja  $x$  predstavljajo vrednosti funkcije  $f$  v enakomerno razporejenih točkah z intervala  $[0, 1]$ , enako velja za  $b$  in  $g$ .

Zgled v Matlabu

---

<sup>3</sup>Italijanski matematik in fizik Vito Volterra (1860–1940).

## Zgled - ostrenje zamegljenih fotografij



$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : originalna oziroma željena jasna slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : dejanska zamegljena slika, ki bi jo radi izboljšali

Razlogov, zaradi katerih je slika zamegljena, je veliko, npr:

- napačno ocenjena razdalja do objekta,
- premikanje objekta ali kamere,
- atmosferske motnje pri astronomiji.

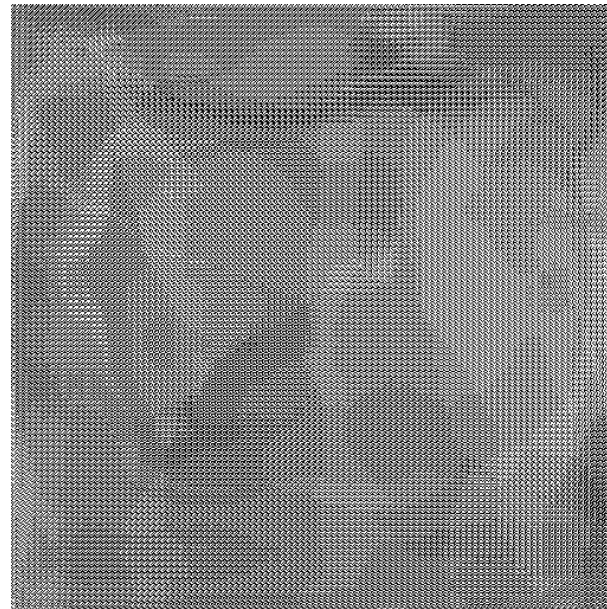
Če poznamo matematično ozadje zgornjih težav, lahko dobljeno sliko izboljšamo.

## Zgled - ostrenje zamegljenih fotografij

Pri preprostem linearnem modelu je zameglitev vrstic neodvisna od zameglitve stolpcev in obstajata obrnljivi matriki  $A_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$  in  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je

$$A_c X A_r^T = B.$$

Če poznamo  $A_c$  in  $A_r$ , bi lahko izračunali  $X = A_c^{-1} B A_r^{-1}$ .



To se ne izkaže za dober pristop, saj v resnici slika  $B$  vsebuje še dodaten šum  $E$ , tako da v resnici računamo z matriko  $B + E$  in dobimo

$$X_n = A_c^{-1} (B + E) A_r^{-1} = X + A_c^{-1} E A_r^{-1}.$$

# Predoločen sistem in metoda najmanjših kvadratov

Imamo sistem linearnih enačb  $Ax = b$ , kjer je  $A$  pravokotna matrika  $m \times n$  in  $m > n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  in  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

Imamo več enačb kot neznank, zato tak sistem imenujemo **predoločen sistem**. V splošnem nima rešitve, lahko pa poiščemo  $x$ , pri katerem bo napaka  $Ax - b$  najmanjša. Predpostavimo še, da je  $\text{rang}(A) = n$ , sicer tak  $x$  ni enoličen.

Če iščemo minimum  $\|Ax - b\|_2$ , potem govorimo o **rešitvi po metodi najmanjših kvadratov**. Taka rešitev obstaja in je enolična. Dobimo jo iz normalnega sistema

$$A^T Ax = A^T b.$$



# Predoločen sistem in singularni razcep

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ ,  $\text{rang}(A) = n$  in  $A = U\Sigma V^T$ .

Rešitev po metodi najmanjših kvadratov je enaka

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

# Splošni sistem linearnih enačb in najmanjši kvadrati

Denimo, da imamo matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = r \leq \min(m, n)$  in vektor  $b \in \mathbb{R}^m$ . Za splošen  $A$  in  $b$  se lahko zgodi ena od naslednjih možnosti:

1. obstaja tak  $x \in \mathbb{R}^n$ , da je  $Ax = b$  in je enoličen,
2. obstaja tak  $x \in \mathbb{R}^n$ , da je  $Ax = b$ , a ni enoličen,
3. ne obstaja tak  $x \in \mathbb{R}^n$ , da je  $Ax = b$ , a obstaja enoličen  $x$ , ki minimizira  $\|Ax - b\|_2$ ,
4. ne obstaja tak  $x \in \mathbb{R}^n$ , da je  $Ax = b$ , obstaja  $x$ , ki minimizira  $\|Ax - b\|_2$ , a ni enoličen.

Če  $x$  ni enoličen, potem pri metodi najmanjših kvadratov izberemo tisti  $x$ , ki ima minimalno normo  $\|x\|_2$ .

Vse štiri možnosti pokrije vektor

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

Zanj velja: pri tem vektorju je dosežen minimum  $\|Ax - b\|_2$  in če je takih vektorjev več, ima med njimi minimalno normo  $\|x\|_2$ .

# Psevdoinverz

Imamo matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = r \leq \min(m, n)$ . To pomeni, da lahko  $A$  zapišemo kot vsoto  $r$  matrik ranga 1:

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T.$$

Potem lahko definiramo

$$A^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T.$$

To je **psevdoinverz** (posplošitev inverzne matrike), za katerega veljajo t.i. Moore–Penroseovi pogoji:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A \\ A^+AA^+ &= A^+ \\ (AA^+)^T &= AA^+ \\ (A^+A)^T &= A^+A \end{aligned}$$

Rešitev splošnega sistema linearnih enačb  $Ax = b$  po m.n.k. je  $x = A^+b$ .

# Najboljša aproksimacija z matriko nižjega ranga

Če je  $A = U\Sigma V^T$  singularni razcep in  $\text{rang}(A) = r$ , je

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T.$$

**Izrek 1.** Naj bo  $A = U\Sigma V^T$  singularni razcep  $A$  in  $\text{rang}(A) > k$ . Naj bo

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T \text{ oziroma } A_k = U\Sigma_k V^T, \text{ kjer je}$$

$$\Sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & & \sigma_k & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & 0 & \end{bmatrix}.$$

Potem velja  $\min_{\text{rang}(B)=k} \|B - A\|_2 = \|A_k - A\|_2 = \sigma_{k+1}$ .

To pomeni, da je  $A_k$  najboljša aproksimacija matrike  $A$  z matriko ranga  $k$ ,  $\sigma_{k+1}$  pa nam pove, kako daleč je  $A$  od prostora matrik ranga  $k$ .

# Zgled - aproksimacija fotografij

Singularni razcep lahko uporabimo za kompresijo slik. Sliko lahko predstavimo z matriko  $A$ , katere elementi predstavljajo nivo sivine. Namesto  $A$  vzamemo najboljšo aproksimacijo z matriko ranga  $k$ . Pri tem namesto  $mn$  podatkov potrebujemo le  $(m + n)k$  podatkov za  $[u_1 \cdots u_k]$  in  $[\sigma_1 v_1 \cdots \sigma_k v_k]$ .

Primer v Matlabu

# Težave z majhnimi singularnimi vrednostmi

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A = U\Sigma V^T$  singularni razcep in  $\sigma_n > 0$ .

1. Če je  $x$  rešitev predločenega sistema  $Ax = b$  po m.n.k., potem je

$$\|x\|_2 \geq \frac{|u_n^T b|}{\sigma_n}.$$

2. Če  $b$  zmotimo v  $b + \delta b$ , se  $x$  spremeni v  $x + \delta x$ , kjer je  $\|\delta x\|_2 \leq \frac{\|\delta b\|_2}{\sigma_n}$ .

V primeru, ko je  $\text{rang}(A) = r < n$  za rešitev  $Ax = b$  po m.n.k. velja

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i,$$

torej je  $\|x\|_2 \leq \frac{\|b\|_2}{\sigma_r}$  in sprememba  $b$  v  $b + \delta b$  spremeni rešitev največ za  $\frac{\|\delta b\|_2}{\sigma_r}$ .

# Regularizacija

Rešujemo linearni sistem  $Ax = b$ , kjer je  $A$  nesingularna, a zelo občutljiva matrika velikosti  $n \times n$ . Predpostavimo še, da v resnici rešujemo sistem z zmoteno desno stranjo  $\tilde{b}$ , kjer so poleg  $b$  prisotne še majhne motnje, npr. zaradi meritev ali zaokrožitvenih napak. Rešitev zmotenega sistema  $\tilde{x}$  lahko s pomočjo singularnega razcepa  $A = U\Sigma V^T$  izrazimo kot

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T \tilde{b}}{\sigma_i} v_i,$$

kjer  $\tilde{x}$  razvijemo po singularnih vektorjih  $v_1, \dots, v_n$ .

Če ima matrika  $A$  najmanjše singularne vrednosti zelo blizu 0, potem vemo, da lahko zelo majhna motnja desne strani povsem pokvari rezultat, kar pomeni, da se lahko  $\tilde{x}$  močno razlikuje od  $x$ . Tovrstne težave rešujemo z [regularizacijo](#). Splošni nastavek je, da za regularizirano rešitev  $x_{\text{reg}}$  vzamemo

$$x_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{u_i^T \tilde{b}}{\sigma_i} v_i,$$

kjer so  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tako imenovani [faktorji filtra](#).

# Odrezani singularni razcep

Pri **TSVD** (truncated SVD) izberemo  $k$  in vzamemo

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & : & 1 \leq k \leq i \\ 0 & : & k + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

To pomeni, da matriko  $A$  nadomestimo z matriko  $A_k$ , ki je najboljša aproksimacija matrike  $A$  z matriko ranga  $k$ , potem pa vzamemo

$$x_{\text{reg}} = A_k^+ b.$$

Ker smo zanemarili majhne singularne vrednosti, je to obratno stabilno in dobljena rešitev je točna rešitev bližnjega problema.

Primer v Matlabu



# Regularizacija Tihonova

Izberemo regularizacijski parameter  $\alpha > 0$  in za  $i = 1, \dots, n$  definiramo faktorje

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}.$$

**Lema 1.** *Regularizacija Tihonova<sup>4</sup> s parametrom  $\alpha$  vrne vektor  $x$ , ki reši naslednji problem:*

$$\min_x \{ \|b - Ax\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|^2 \}.$$

Vrednost parametra  $\alpha$  moramo primerno izbrati:

- Če pošljemo  $\alpha$  proti 0, potem bo  $x$  kar rešitev sistema  $Ax = b$ , a ker je v  $b$  tudi šum, lahko pričakujemo, da bo norma dobljenega vektorja zelo velika.
- Če vzamemo velik  $\alpha$ , potem je bolj bistveno to, da ima  $x$  majhno normo, kot to, da reši sistem  $Ax = b$ .
- Pri primerni izbiri  $\alpha$  norma izračunanega vektorja  $x$  ne bo prevelika in hkrati tudi velikost ostanka  $b - Ax$  ne bo prevelika.

---

<sup>4</sup>Ruski matematik Andrej Nikolajevič Tihonov (1906–1993) je postopek opisal leta 1943.

# Obdelava slik

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : originalna oziroma željena ostra slika

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : dejanska slika, ki jo imamo na voljo in bi jo radi izboljšali

Preprost linearni model

$$A_c X A_r^T = B.$$

Če poznamo  $A_c$  in  $A_r$ , bi lahko izračunali  $X = A_c^{-1} B A_r^{-1}$ .

To se ne izkaže ta dober pristop, saj v resnici slika  $B$  vsebuje še dodaten šum  $E$ , zato v resnici računamo z matriko  $B + E$  in dobimo

$$X_n = A_c^{-1} (B + E) A_r^{-1} = X + A_c^{-1} E A_r^{-1}.$$

Če uporabimo regularizacijo s TSVD, namesto  $A_c^{-1}$  in  $A_r^{-1}$  uporabimo  $(A_c)_k^+$  in  $(A_r)_k^+$ , kjer sta  $(A_c)_k$  in  $(A_r)_k$  matriki ranga  $k$ , ki sta najbližji  $A_c$  in  $A_r$ .

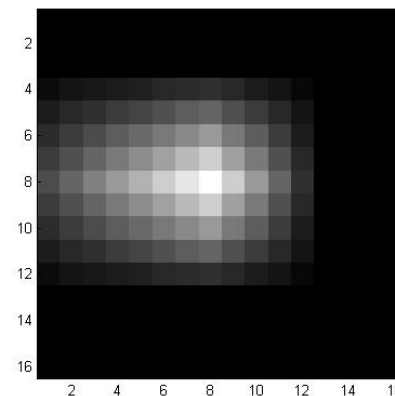
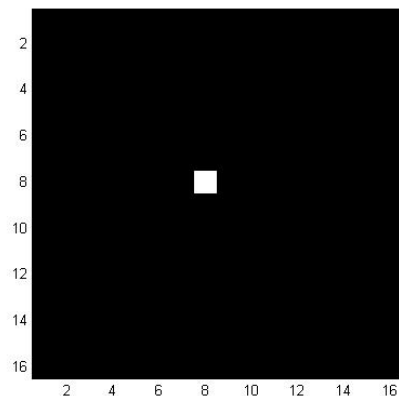
Namesto tega lahko uporabimo tudi regularizacijo Tihonova.

# Funkcija zamegljevanja

Do nejasne končne slike pride zaradi različnih vzrokov, npr.:

- optični sistem ni izostren,
- premikanje objekta ali kamere,
- atomsferske motnje

V modelu  $Ax = b$  motnjo  $i$ -tega piksla predstavlja  $i$ -ti stolpec matrike  $A$ . Če predpostavimo, da pri vseh točkah pride do enake vrste motnje, potem je zadosti poznati, kaj se zgodi z eno točko:



Tako zadošča poznati majhno matriko  $P$ , ki se bločno ponavlja po matriki  $A$ .

# Primeri PSF

Matriko  $P$  lahko dobimo eksperimentalno (npr. astronomi opazujejo sliko znane zvezde) ali analitično.

Če gledamo sliko piksla  $x_{kl}$ , potem pri t.i. **out-of-focus PSF** dobimo

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/(\pi r^2) & \text{za } (i - k)^2 + (j - l)^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pri **atmosferskih motnjah** dobimo 2D Gaussovo funkcijo z elementi

$$p_{ij} = \exp \left( -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i - k \\ j - l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_1^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i - k \\ j - l \end{bmatrix} \right),$$

kjer parametri  $s_1, s_2, \rho$  določajo širino in smer motnje. V praksi ne vzamemo celotne matrike, ki je polna, temveč jo odrežemo in normiramo, da je vsota vseh elementov 1.

# Najbolj znana testna slika za primerjavo algoritmov je...



Lena

# Literatura

1. P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, SIAM, Philadelphia, 1998.
2. P. C. Hansen, J. G. Nagy, D. P. O'Leary, *Deblurring Images. Matrices, Spectra, and Filtering*, SIAM, Philadelphia, 2006.
3. B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2015
4. Lenna, Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna>