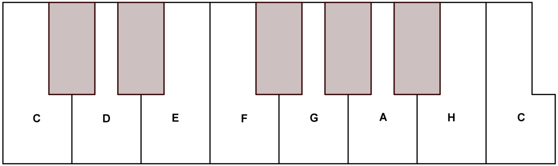
Matematika v glasbi

Tinka Majaron

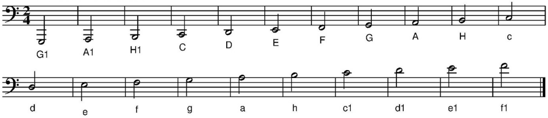
OŠ dr. Ivana Korošca Borovnica
tinka.majaron@guest.arnes.si

25. januar 2019

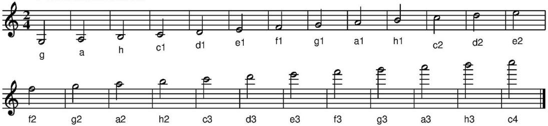
Glasba je matematika s čustvi.

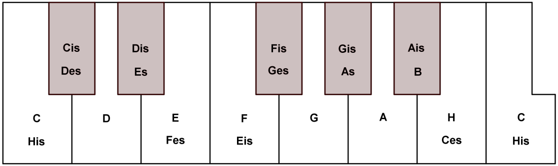

C
D
E
F
G
A
H
C

V BASOVSKEM KLJUČU:

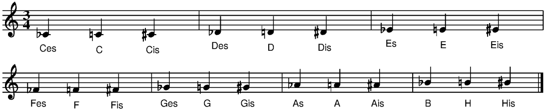


V VIOLINSKEM KLJUČU:

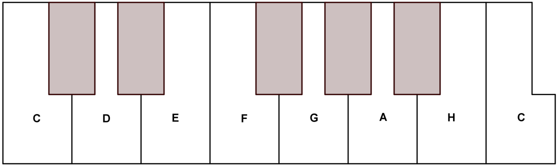




Višaj (♯) označuje zvišanje tona za polton, k imenu osnovnega tona dodamo končnico -is. **Nižaj** (♭) označuje znižanje tona za polton, k imenu osnovnega tona dodamo končnico -es. Pri imenovanju znižanih tonov je nekaj izjem: pri tonih E in A se doda le -s (Es in As), namesto Hes pa običajno uporabljamo B. Obstajajo tudi dvojni višaji ($\times$) in nižaji (♭♭), ki višino tona spremenijo za celi ton.


Ces C Cis Des D Dis Es E Eis
Fes F Fis Ges G Gis As A Ais B H His


C–dur
1
1
1/2
1
1
1
1/2
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII


C
D
E
F
G
A
H
C


G–dur
I II III IV V VI VII VIII
D–dur
I II III IV V VI VII VIII
A–dur
I II III IV V VI VII VIII
E–dur
I II III IV V VI VII VIII
H–dur
I II III IV V VI VII VIII
Fis–dur
I II III IV V VI VII VIII
Cis–dur
I II III IV V VI VII VIII
F–dur
I II III IV V VI VII VIII
B–dur
I II III IV V VI VII VIII
Es–dur
I II III IV V VI VII VIII
As–dur
I II III IV V VI VII VIII
Des–dur
I II III IV V VI VII VIII
Ges–dur
I II III IV V VI VII VIII
Ces–dur
I II III IV V VI VII VIII

Pri številu predznakov je pomemben njihov vrstni red: višaji so po vrsti **fis, cis, gis, dis, ais, eis, his**, nižaji pa **b, es, as, des, ges, ces, fes**. To pomeni, da ima lestvica s štirimi višaji fis, cis, gis in dis, lestvica s tremi nižaji pa b, es in as.

Dur	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis
Vzp. mol	a	e	h	fis	cis	gis	dis	ais
Predznaki	0	1 ♯	2 ♯	3 ♯	4 ♯	5 ♯	6 ♯	7 ♯

Dur	F	B	Es	As	Des	Ges	Ces	
Vzp. mol	d	g	c	f	b	es	as	
Predznaki	1 ♭	2 ♭	3 ♭	4 ♭	5 ♭	6 ♭	7 ♭	

Višino tonov lahko zapišemo tudi s številkami (namesto glasbene abecede C, D, E, F, G, A, H). Leta 1973 je Allen Forte v knjigi *The Structure of Atonal Music* objavil glasbeno teorijo množic ali nizov. Tonske višine je obravnaval po načelu oktavne ekvivalence in po načelu enharmonske identitete (to pomeni, da so bili zanj vsi c-ji enaki in da je bil ton cis enak tonu des in podobno). Tako je dobil sistem razredov notnih višin (pitch-classes), v katerem je tonske višine predstavil s preglednim številčnim sistemom.

c	cis/des	d	dis/es	e	f	fis/ges	g	gis/as	a	ais/b	h	c
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 = 0

Nizi po definiciji Allena Forteja

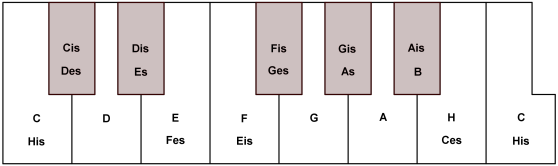
Za statistično analizo skladb bomo potrebovali tudi intervale. **Interval** je razmik med dvema tonoma. S številom stopenj, ki jih obsega interval, določujemo kvantiteto intervala, s številom poltonov, ki jih meri pa kvaliteto intervala. Intervali po kvantiteti so **prima** (lat. prima pomeni prva, oznaka: 1), **sekunda** (lat. secunda pomeni druga, oznaka: 2), **terca** (lat. tertia pomeni tretja, oznaka: 3), **kvarta** (lat. quarta pomeni četrta, oznaka: 4), **kvinta** (lat. quinta pomeni peta, oznaka: 5), **seksta** (lat. sexta pomeni šesta, oznaka: 6), **septima** (lat. septima pomeni sedma, oznaka: 7) in **oktava** (lat. octava pomeni osma, oznaka: 8). Po kvaliteti ločimo čiste, male in velike intervale. Osnovni intervali so:

Ime intervala	Oznaka intervala	Razdalja (v poltonih)
čista prima	č1	0
mala sekunda	m2	1
velika sekunda	v2	2
mala terca	m3	3
velika terca	v3	4
čista kvarta	č4	5
čista kvinta	č5	7
mala seksta	m6	8
velika seksta	v6	9
mala septima	m7	10
velika septima	v7	11
čista oktava	č8	12

S predznaki lahko dobimo še zvečane, dvakrat zvečane, zmanjšane in dvakrat zmanjšane intervale. Intervali so lahko tudi večji od oktave. Za take intervale bomo povedali le, koliko poltonov merijo.

Ime intervala	Oznaka intervala	Razdalja (v poltonih)
čista prima	č1	0
mala sekunda	m2	1
velika sekunda	v2	2
mala terca	m3	3
velika terca	v3	4
čista kvarta	č4	5
čista kvinta	č5	7
mala seksta	m6	8
velika seksta	v6	9
mala septima	m7	10
velika septima	v7	11
čista oktava	č8	12

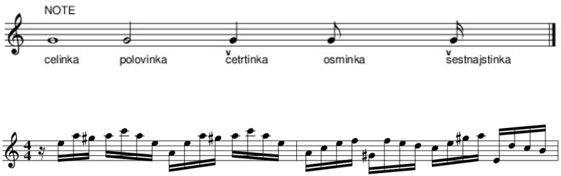
Iz tabele je razvidno, da med osnovnimi intervali ne obstaja interval z razdaljo šestih poltonov. Toliko merita zvečana kvarta in zmanjšana kvinta. Ta interval imenujemo tudi **tritonus**, saj je sestavljen iz treh celih tonov, po razdalji meri natanko polovico oktave. V glasbi je dolgo veljal za prepovedan interval, imenovali so ga celo vrag v glasbi (diabolo in musica).



c	cis/des	d	dis/es	e	f	fis/ges	g	gis/as	a	ais/b	h	c
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 = 0

Nizi po definiciji Allena Forteja

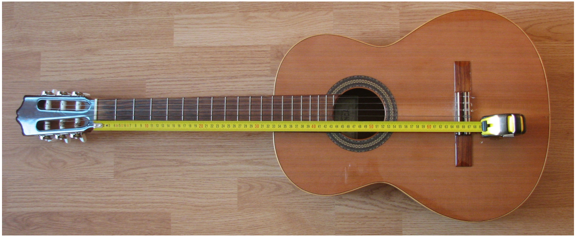
Tesna povezanost med glasbo in matematiko se kaže tudi v imenih not glede na njihovo dolžino:

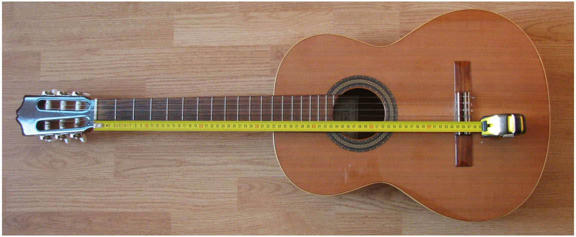

NOTE
celinka
polovinka
četrtinka
osminka
šestnajstinka

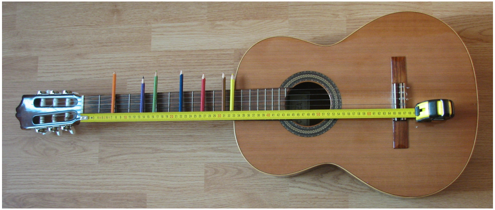
Slika: Vir: zbirka vaj Skrivnosti števil in oblik 7, založba Rokus Klett

Slika: Vir: zbirka vaj Skrivnosti števil in oblik 7, založba Rokus Klett


IV BAL
PYTAGORA
PITAGORAS
PYTAGORA
PHYLOLAVS







Meritve:

- celotna struna 65 cm,
- oktava (12. prečka - rumena barvica) 32,4 cm,
- kvinta (7. prečka - temno modra barvica) 43,2 cm,
- kvarta (5. prečka - zelena barvica) 48,4 cm,
- velika terca (4. prečka - vijolična barvica) 51,5 cm,
- velika seksta (9. prečka - rdeča barvica) 38,5 cm,
- velika sekunda (2. prečka - oranžna barvica) 57,8 cm,
- velika septima (11. prečka - rjava barvica) 34,3 cm.

Razmerja:

- oktava : celota = 32,4 cm : 65 cm,
- kvinta : celota = 43,2 cm : 65 cm,
- kvarta : celota = 48,4 cm : 65 cm,
- velika terca : celota = 51,5 cm : 65 cm,
- velika seksta : celota = 38,5 cm : 65 cm,
- velika sekunda : celota = 57,8 cm : 65 cm,
- velika septima : celota = 34,3 cm : 65 cm.

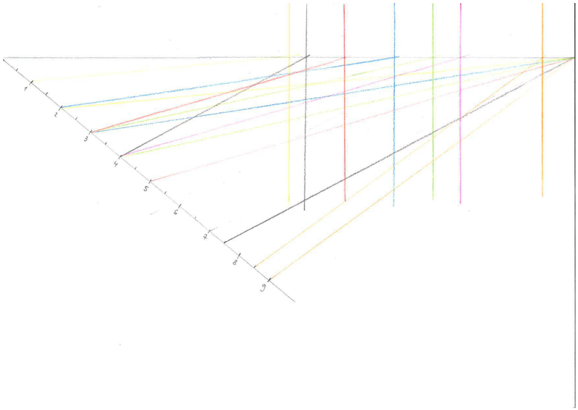
Poenostavimo razmerja v približno enaka razmerja, pri katerih lahko uporabimo le prvih 9 naravnih števil. Izjema je velika septima, pri kateri je eno od števil enako 15.

Poenostavljena razmerja:

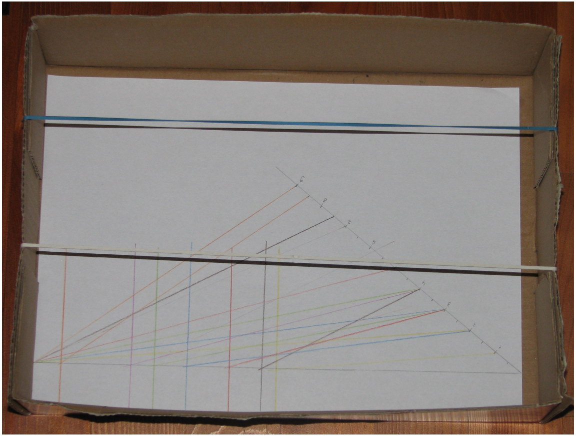
- oktava : celota = 32,4 cm : 65 cm $\doteq$1 : 2,
- kvinta : celota = 43,2 cm : 65 cm $\doteq$2 : 3,
- kvarta : celota = 48,4 cm : 65 cm $\doteq$3 : 4,
- velika terca : celota = 51,5 cm : 65 cm $\doteq$4 : 5,
- velika seksta : celota = 38,5 cm : 65 cm $\doteq$3 : 5,
- velika sekunda : celota = 57,8 cm : 65 cm $\doteq$8 : 9,
- velika septima : celota = 34,3 cm : 65 cm $\doteq$8 : 15.

S pomočjo dobljenih razmerij lahko izdelamo preprosto glasbilo.

Najprej na papir velikosti A4 skonstruiramo dobljena razmerja:



Nato sliko položimo v pokrov škatle za papir te velikosti, čez napnemo elastiko in glasbilo je narejeno:



Ustvarjeno glasbilo je uglašeno po lestvici čiste uglasitve, tako so bila uglašena prva glasbila (na primer flavta iz stegnenice jamskega medveda, ki so jo našli v Divjih babah). Pri tej uglasitvi se upošteva narava tona, natančna je le v osnovni lestvici, pri višajih in nižajih prihaja do velikih napak.

Slika: Vir: divje-babe.si

Zaradi želje, da bi skladbe lahko pisali in igrali v različnih tonalitetah (z različnimi predznaki), se je skozi leta razvila enako temperirana uglasitev. Pri tej se oktava razdeli na dvanajst enakih poltonov. To je razlog, da so bila naša poenostavljena razmerja le približno enaka izmerjenim razmerjem. Dandanes so kitare uglašene po enako temperirani uglasitvi - polovico strune (oktava) moramo razdeliti na 12 enakih poltonov.


PRE
SEK
30 (2002 – 03)
6
ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Pri različnih uglasitvah intervale dobimo na različne načine. Pri starejših (naravna in Pitagorova) dobimo tone lestvice z množenjem osnovne frekvence z racionalnimi števili, pri temperirani pa potrebujemo $\sqrt[12]{2}$, kar je iracionalno število. Kako pridemo do teh lestvic, je postopno razloženo v gradivih E-um na http://www.e-um.si/.

V gradivu **E-um -> Gimnazija -> 1. letnik -> Racionalna števila -> Ulomki in glasba** najdemo razlago, kako je Pitagora prišel do glasbene lestvice. Bil je prvi, zato velja (med drugim) za začetnika glasbene teorije.

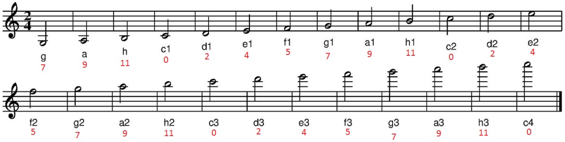
V gradivu **E-um -> Gimnazija -> 1. letnik -> Realna števila -> Iracionalna števila** najdemo lestvico čiste uglasitve (po kateri smo naredili naše škatlasto glasbilo) in enako temperirano lestvico. Razloženo je, zakaj moramo frekvenco osnovnega tona pomnožiti z $\sqrt[12]{2}$, da dobimo frekvenco za temperiran polton višjega tona.

V istem gradivu lahko tudi slišimo razliko med racionalnimi in iracionalnimi števili (glede na njihov decimalni zapis).

Statistična analiza skladbe nam lahko razkrije značilnosti skladateljevega komponiranja ali značilnosti ljudskih pesmi z nekega področja. Opazovali bomo značilnosti slovenske ljudske pesmi Marko skače.

c	cis/des	d	dis/es	e	f	fis/ges	g	gis/as	a	ais/b	h	c
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 = 0

Nizi po definiciji Allena Forteja



Podobno kot Fortejeve nize lahko vsakemu tonu priredimo številsko vrednost na naslednji način:


H C Cis D Dis E F Fis G Gis A Ais H C Cis D Dis E F Fis G
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Ces His Des Es Fes Ges As B Ces His Des Es Fes Ges

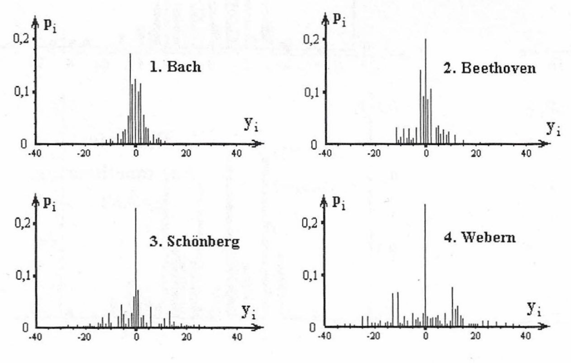

Mar - ko ska - ce, Mar - ko ska - ce, po ze - le - noj
tra - ti. Aj, aj, aj, aj, aj, po ze - le - noj tra - ti.

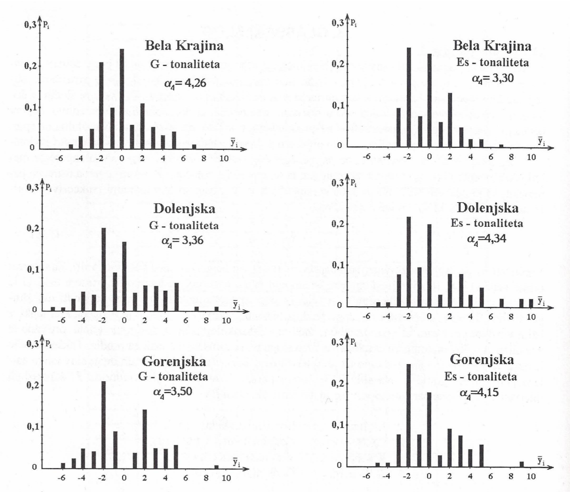

H C Cis D Dis E F Fis G Gis A Ais H C Cis D Dis E F Fis G
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Ces His Des Es Fes Ges As B Ces His Des Es Fes Ges


3 0 0 −3 3 0 0 −3 0 −2 0 2 0 0 2 2 3 0 −3
−1 2 2 2 −1 2 2 2 −1 −1 −3 −3 −5 −5 −5 −3 −1 2 2
0 −2 0 2 0 0 2 2 3 0 −3 0 −2 0 2 0
−1 −1 −3 −3 −5 −5 −5 −3 −1 2 2 −1 −1 −3 −3 −5 −5

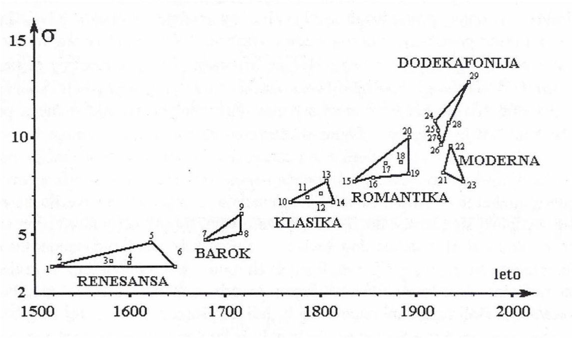
Rešitve učnega lista...

Oglejmo si še nekaj porazdelitev intervalov:




Bela Krajina
G - tonaliteta
α_4= 4,26
Bela Krajina
Es - tonaliteta
α_4= 3,30
Dolenjska
G - tonaliteta
α_4= 3,36
Dolenjska
Es - tonaliteta
α_4=4,34
Gorenjska
G - tonaliteta
α_4=3,50
Gorenjska
Es - tonaliteta
α_4=4,15
p_i
$\bar{y}_i$
0,3
0,2
0,1
0
-6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

In zgodovinski pregled standardnega odklona tonov:



Zastopanost posameznega tona v melodiji pove njegova pogostost (verjetnost pojavitve), ki je enaka deležu ponovitev tega tona. Za Marko skače dobimo:

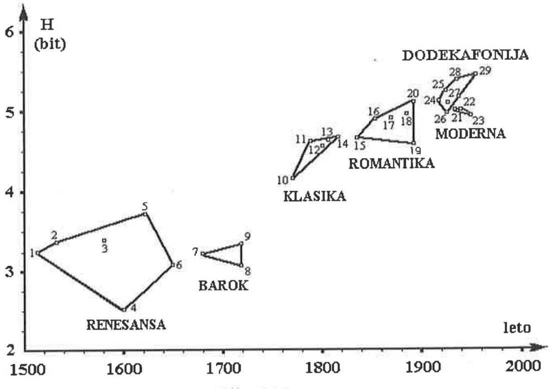
ton	-5	-3	-1	2
frekvenca	8	8	10	10
pogostost	$0,\overline{2}$	$0,\overline{2}$	$0,2\overline{7}$	$0,2\overline{7}$

Entropija je pričakovana informacija o pojavljanju tonov pri naključnem izbiranju tona,

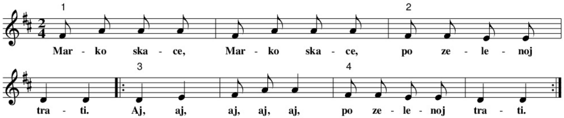
$$H = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i,$$

pri čemer je p_i verjetnost pojavitve (pogostost) posameznega tona, k pa število tonov. Entropijo merimo v bitih in jo lahko privzamemo kot merilo za razvitost melodijske zgradbe. Za Marko skače dobimo:

$$H = -0,\overline{2} \cdot \log_2 0,\overline{2} - 0,\overline{2} \cdot \log_2 0,\overline{2} - 0,2\overline{7} \cdot \log_2 0,2\overline{7} - 0,2\overline{7} \cdot \log_2 0,2\overline{7} = 1,9911 \text{ bit}.$$


H
(bit)
6
5
4
3
2
DODEKAFONIJA
MODERNA
ROMANTIKA
KLASIKA
BAROK
RENESANSA
leto
1500
1600
1700
1800
1900
2000

Začnimo s premikom. Osnovni premik si lahko predstavljamo kot transponiranje v višjo ali nižjo lego (na primer iz D-dura v C-dur). Še bolj zanimiv je premik v času, tako dobimo kanon.



Lahko ga zapojemo tudi kot retrogradni kanon - ena skupina poje, kot piše, druga pa od zadaj naprej. Matematično gre za zrcaljenje čez vertikalno premico skozi sredino skladbe (če je skladba zapisana v eni vrstici).

Če osnovno melodijo zavrtimo okrog sredine skladbe za 180°, dobimo prav poseben kanon. Pri tem kanonu prvi glas poje osnovno melodijo, drugi pa od zadaj naprej, a z notami, obrnjenimi na glavo.

Nazadnje si oglejmo še razteg. Dobimo ga, če skladbo izvajamo hitreje ali počasneje (običajno s faktorjem 2). V našem primeru bi Marko skače en glas lahko pel počasneje - zapisano v štiričetrtinskem taktu, drugi pa kot običajno (alla breve). Drugi glas skladbo zapoje dvakrat. Tako dobimo proporcionalni kanon. Matematično gledano je prvi glas podoben drugemu.

Prava zakladnica kanonov vseh naštetih vrst je glasbena zapuščina Johanna Sebastiana Bacha.

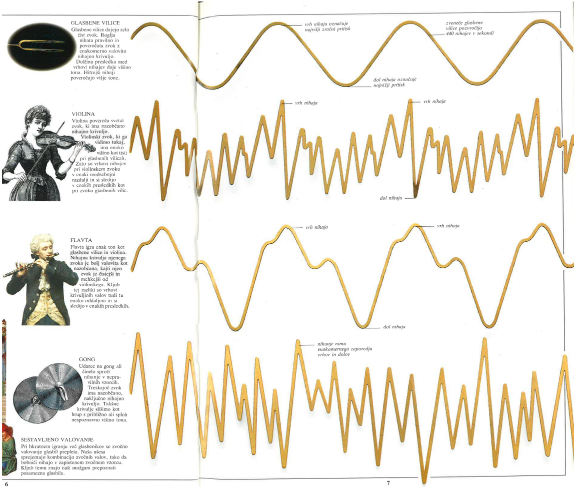
Zvok nastane z nihanjem. Oddaljenost od središvčne lege je pri tem nihanju za glasbila s strunami in za glasbila, pri katerih zvok nastane z zrakom, periodična funkcija. Vsako periodično funkcijo pa lahko zapišemo s Fourierovo vrsto. Za opisano oddaljenost od središčne lege lahko v zelo poenostavljeni obliki zapišemo:

$$x = A_1 \sin(2\pi\nu t) + A_2 \sin(2 \cdot 2\pi\nu t) + A_3 \sin(3 \cdot 2\pi\nu t) + \cdots + A_n \sin(n \cdot 2\pi\nu t) + \cdots ,$$

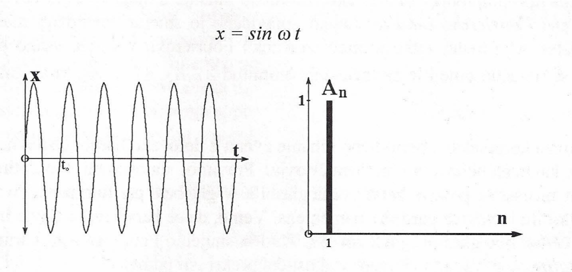
pri čemer ν predstavlja osnovno frekvenco tona.

Poleg osnovne frekvence so prisotni tudi vsi njeni večkratniki. Večkratniki osnovne frekvence predstavljajo alikvotne tone. Prvi alikvotni ton je oktavna ponovitev osnovnega, drugi je kvinto višji od drugega, tretji je kvarto višji od drugega in tako naprej. S harmonsko ali zvensko analizo lahko izračunamo amplitude (Fourierove koeficiente) $A_1, A_2, A_3 \ldots$, ki nam povejo, kako močno je zastopan posamezen alikvotni ton. Vrednosti amplitud praviloma padajo in postanejo od nekega člena naprej zanemarljivo majhne. Tako lahko teoretično neskončno vrsto v praksi obravnavamo kot končno vrsto.

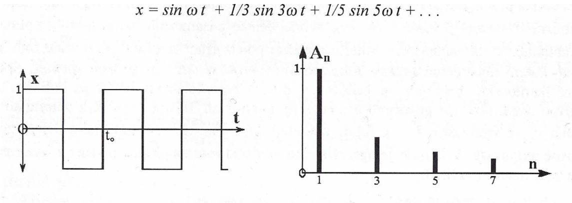
Vrednosti amplitud so odvisne od glasbila in ravno te vrednosti določajo barvo zvoka (tako prepoznamo različna glasbila, ki jih slišimo na radiu). Običajno jih predstavimo s stolpičnim diagramom, ki ga imenujemo harmonski ali zvenski spekter. Pri tem vnašamo relativne vrednosti amplitud - privzamemo, da je $A_1 = 1$, ostale amplitude pa izrazimo z deležem osnovne amplitude.



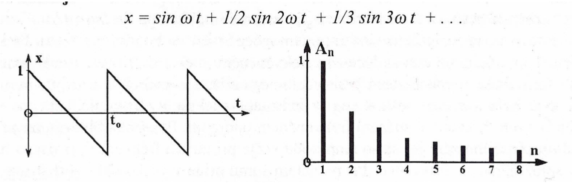
Slika: Vir: Neil Ardley, Glasbila, Pomurska založba



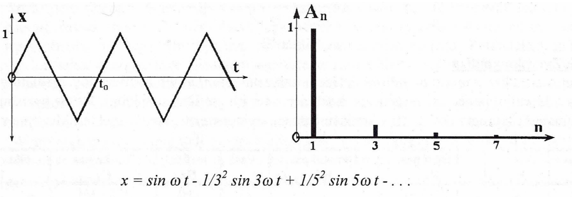
Slika: Vir: Bruno Ravnikar, Osnove glasbene akustike in informatike, založba DZS



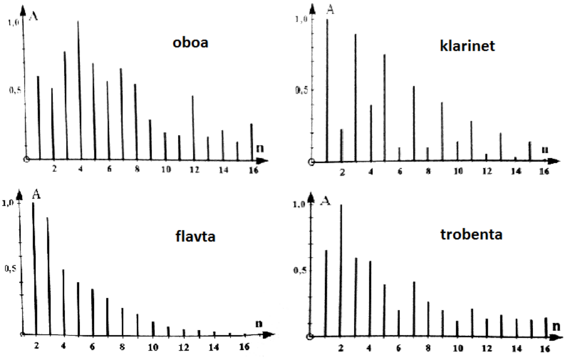
Slika: Vir: Bruno Ravnikar, Osnove glasbene akustike in informatike, založba DZS



Slika: Vir: Bruno Ravnikar, Osnove glasbene akustike in informatike, založba DZS



Slika: Vir: Bruno Ravnikar, Osnove glasbene akustike in informatike, založba DZS



Slika: Vir: Bruno Ravnikar, Osnove glasbene akustike in informatike, založba DZS

Za konec le še dve zanimivosti: solopevci se naučijo ojačati višje alikvotne tone, zato jih lahko slišimo tudi ob glasnem orkestru.

https://www.youtube.com/watch?v=c1AiCTJ9t8g

Se zdaj strinjate, da je glasba matematika s čustvi?

- T. Majaron, *Matematika glasbenih lestvic - diplomsko delo*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2003.
- T. Majaron, *Vzorci v glasbi - magistrsko delo*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2016.
- P. Mihelčič, *Teorija glasbe*, DZS, Ljubljana, 2000.
- G. Pavlič, *Bach, mojster Jaka in matematika*, Življenje in tehnika, **6** (1999), 69–72.
- B. Ravnikar, *Osnove glasbene akustike in informatike*, DZS, Ljubljana, 2001.