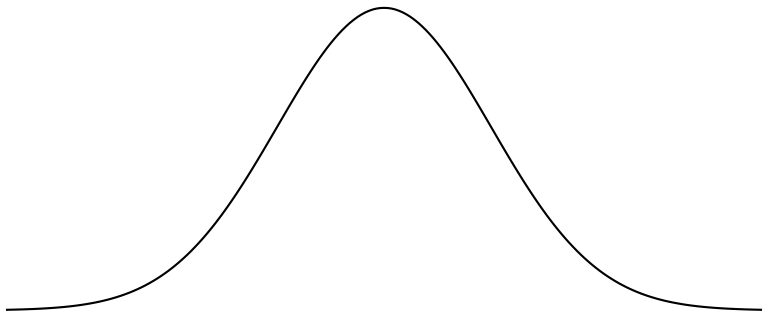


GAUSSOVA KRIVULJA

Martin Raič

Izzivi poučevanja matematike
UL FMF
21. september 2019

GAUSSOVA KRIVULJA



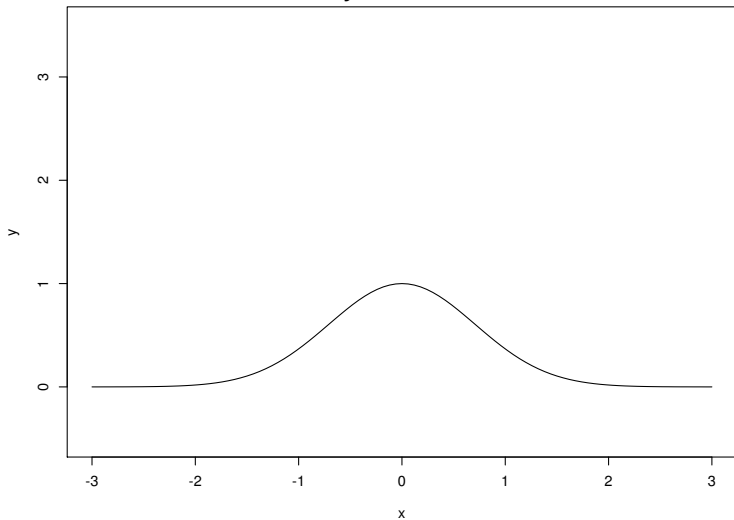


Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)
nemški matematik

Vir: Wikipedija

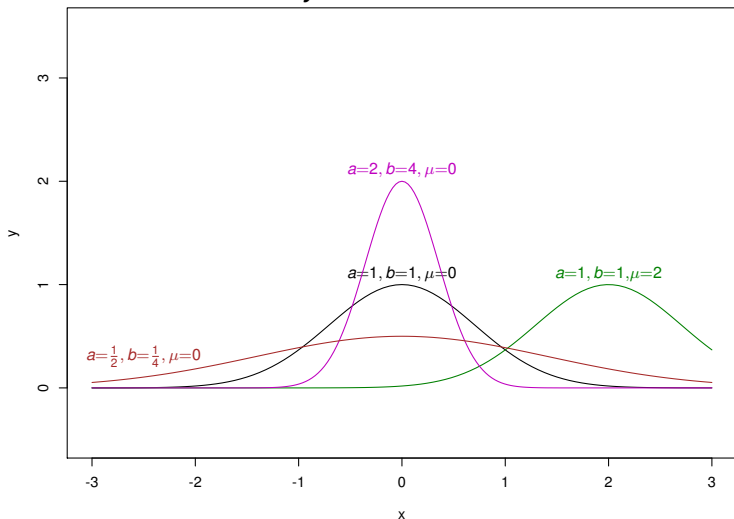
GAUSSOVA KRIVULJA (OSNOVNA)

$$y = e^{-x^2}$$

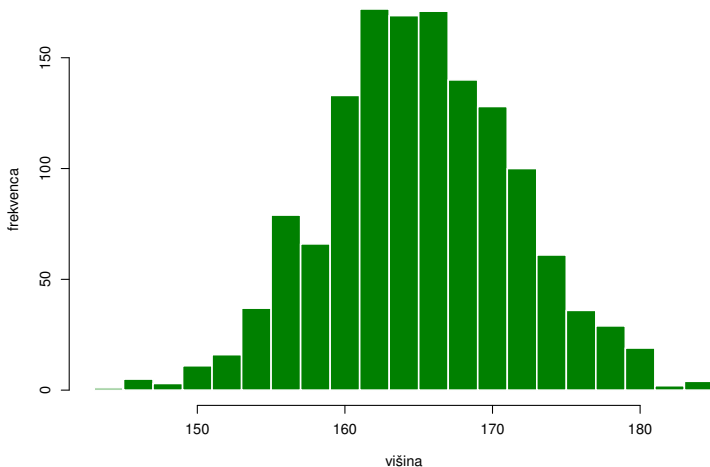


GAUSSOVA KRIVULJA (TRANSFORMIRANA)

$$y = ae^{-b(x-\mu)^2}$$

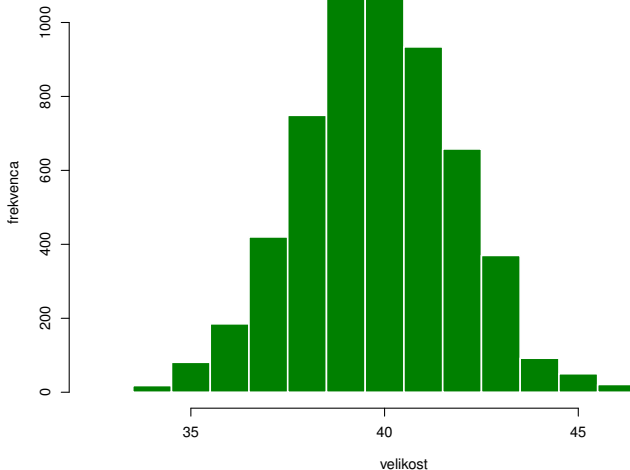


TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA



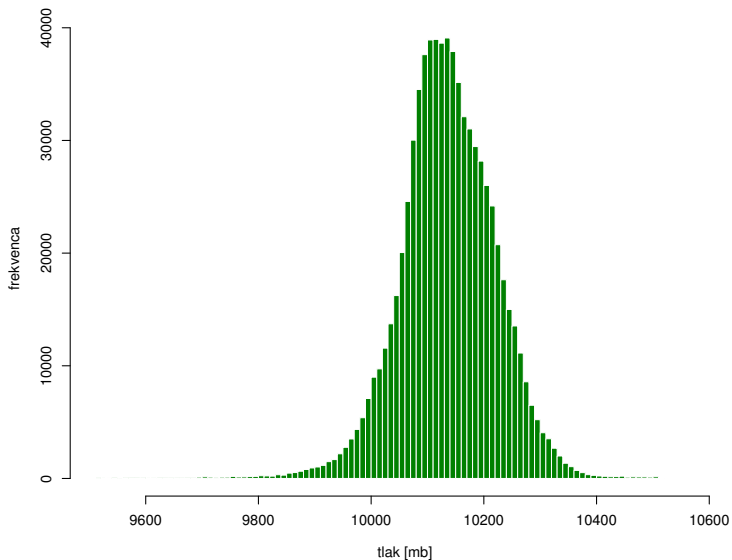
Vir podatkov (9. 8. 2015): <http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html>

OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH



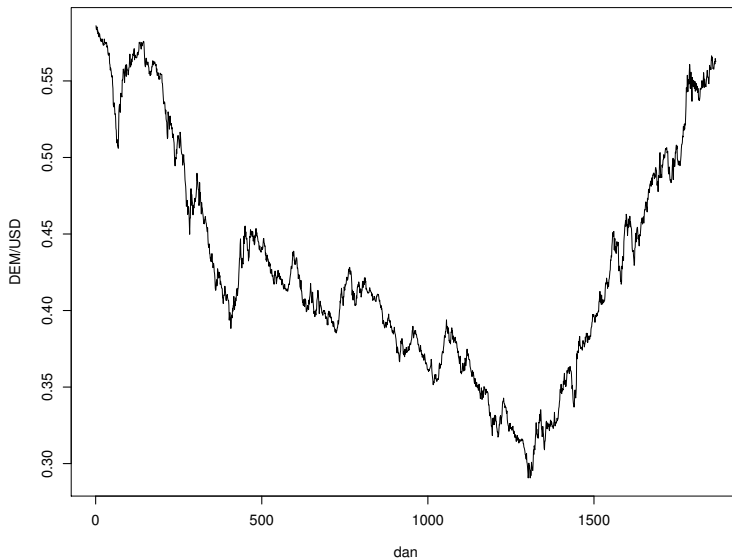
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

ZRAČNI TLAK PO SVETU (761286) MERITEV



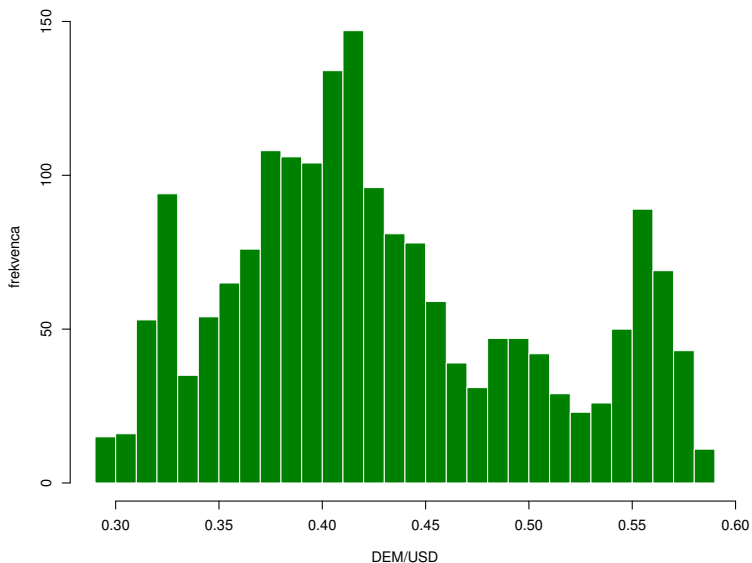
Vir podatkov (9. 8. 2015): <http://cdiac.ornl.gov/epubs/ndp/ndp026c/ndp026c.html>

DEM : USD (1980–1987)



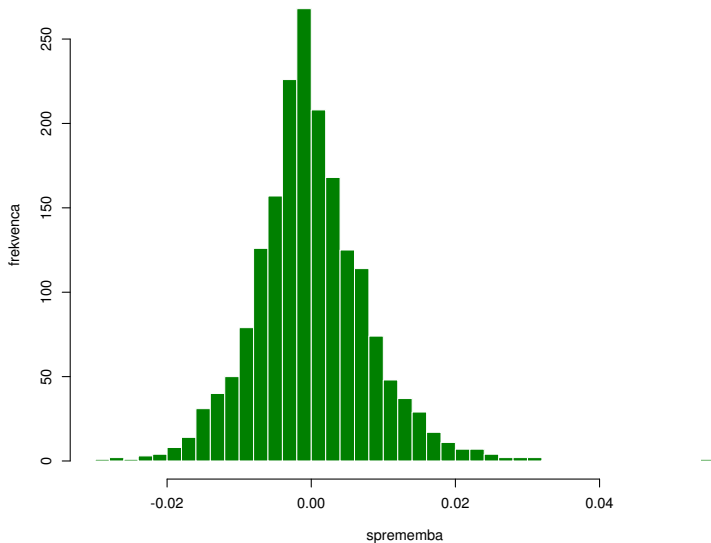
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

DEM : USD (1980–1987)



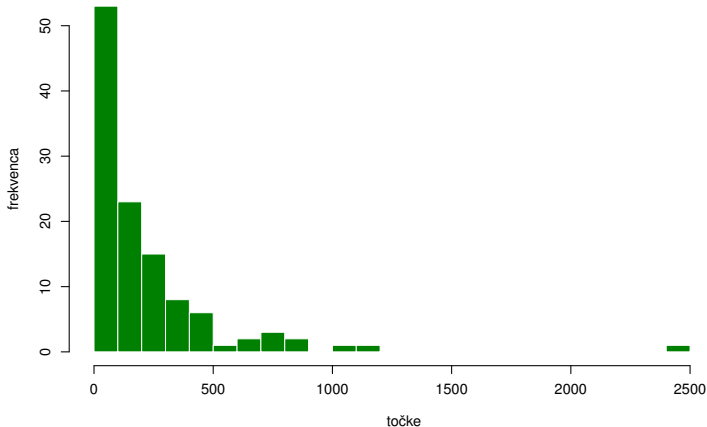
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

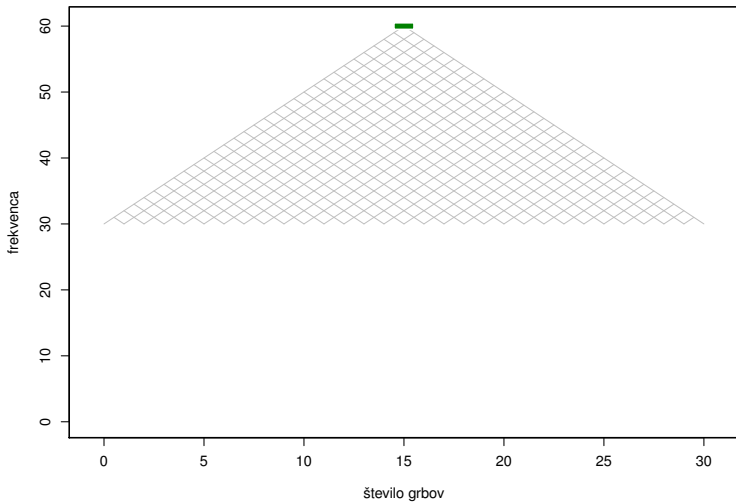
TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)



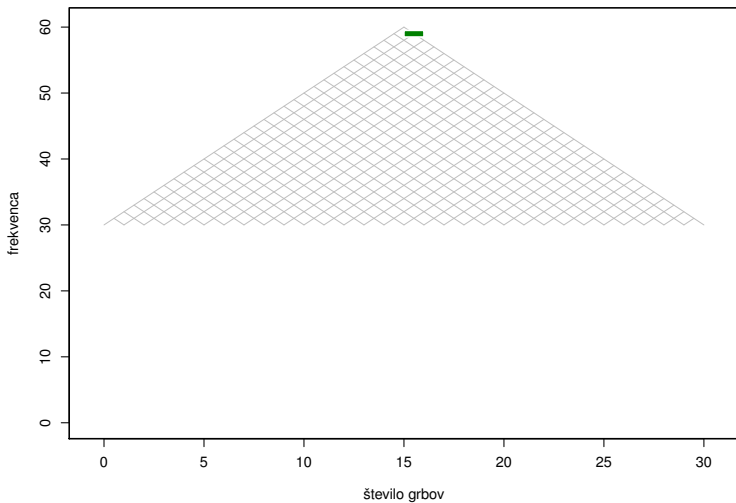
Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

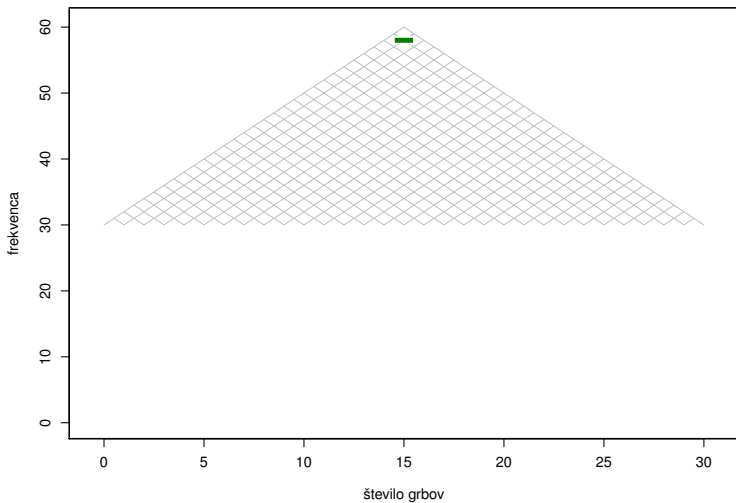
MET 30 POŠTENIH KOVANČEV: 1. izvedba



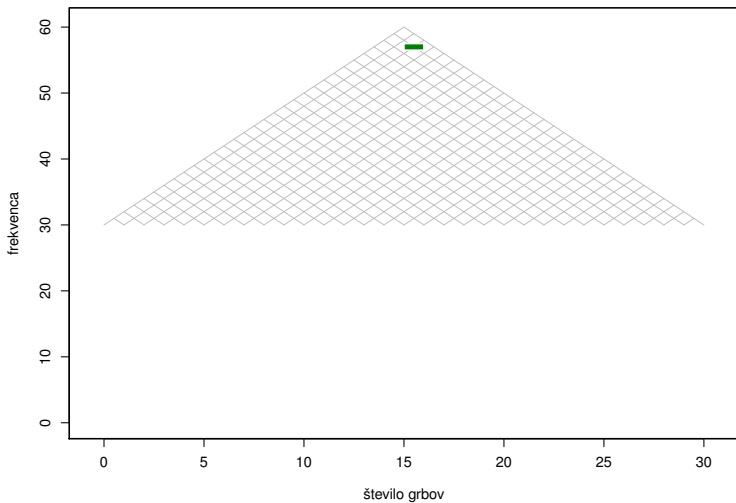
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



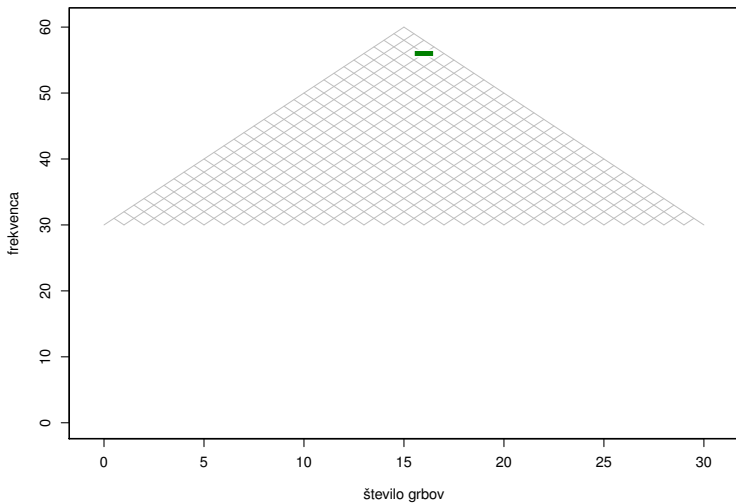
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



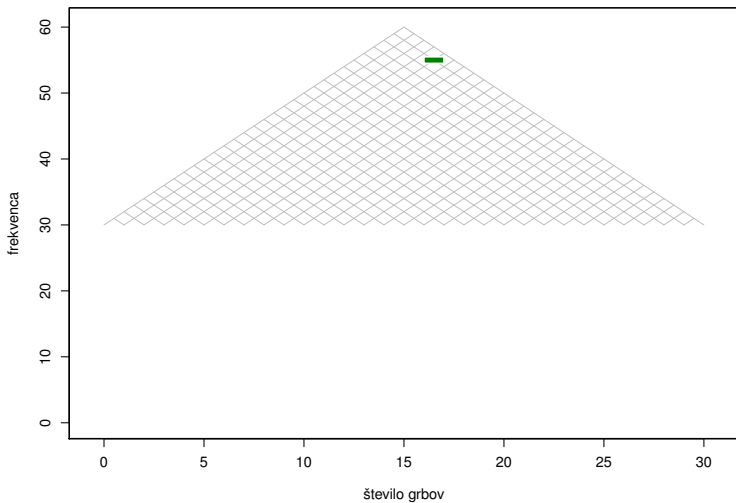
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



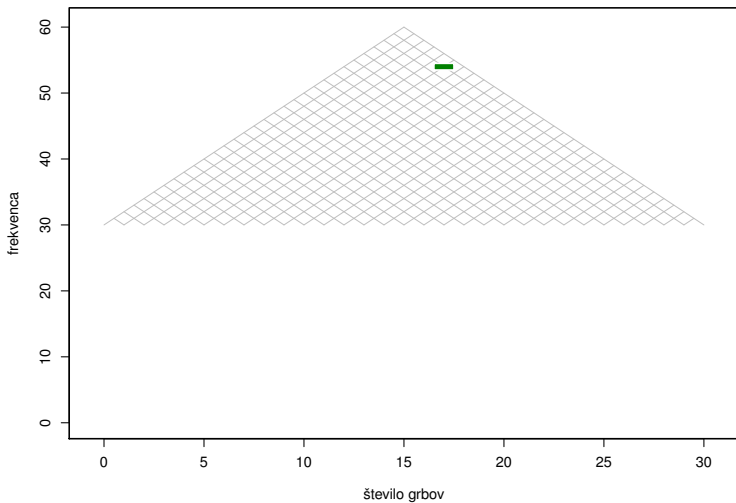
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



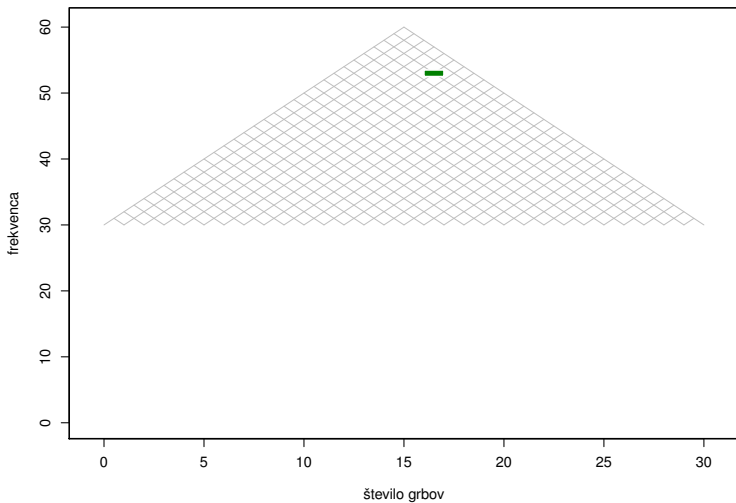
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



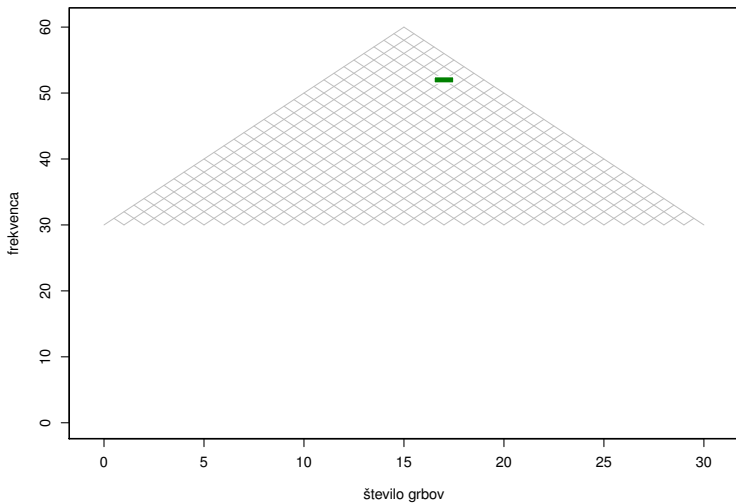
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



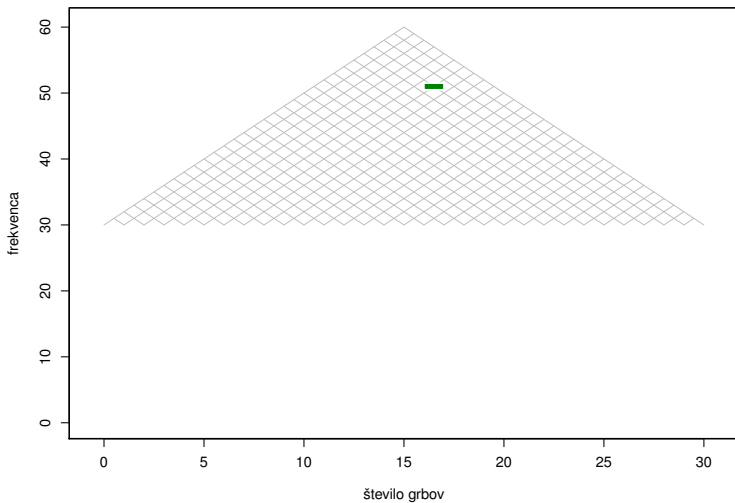
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



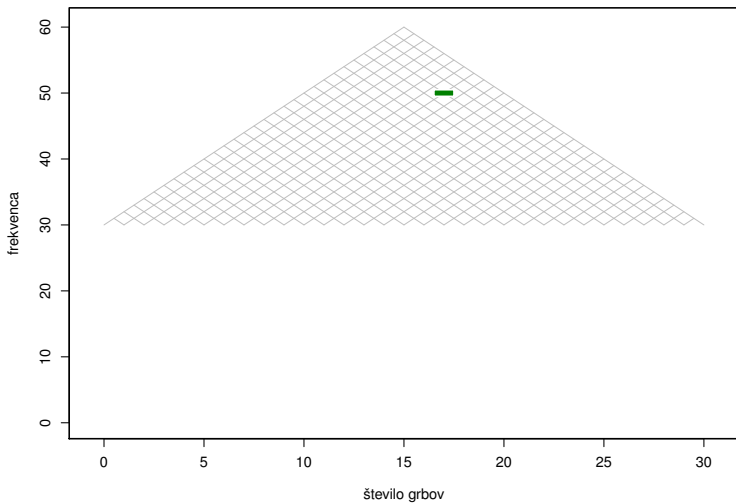
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



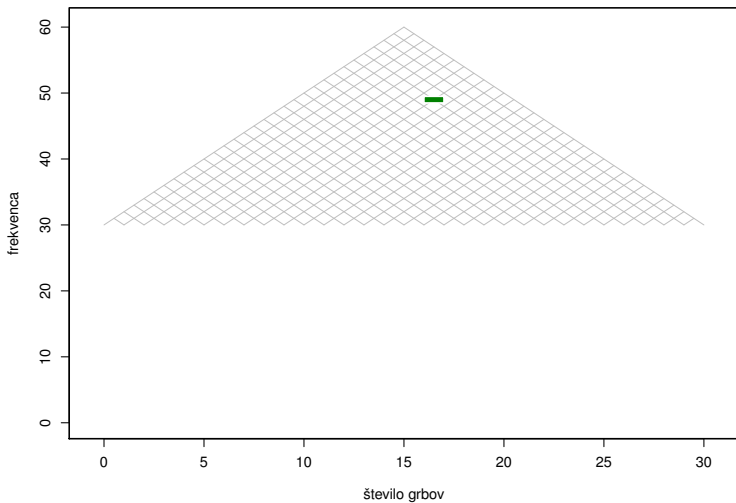
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



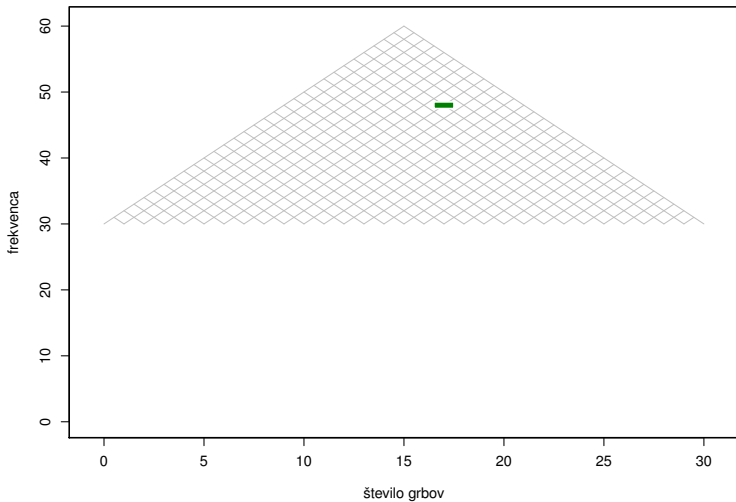
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



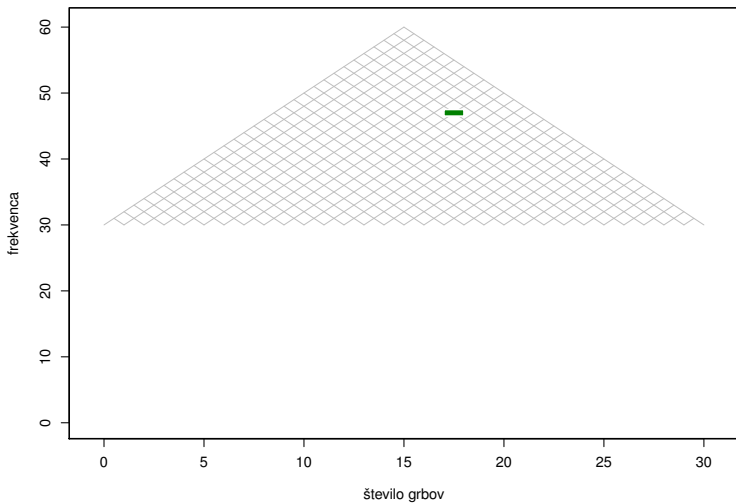
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



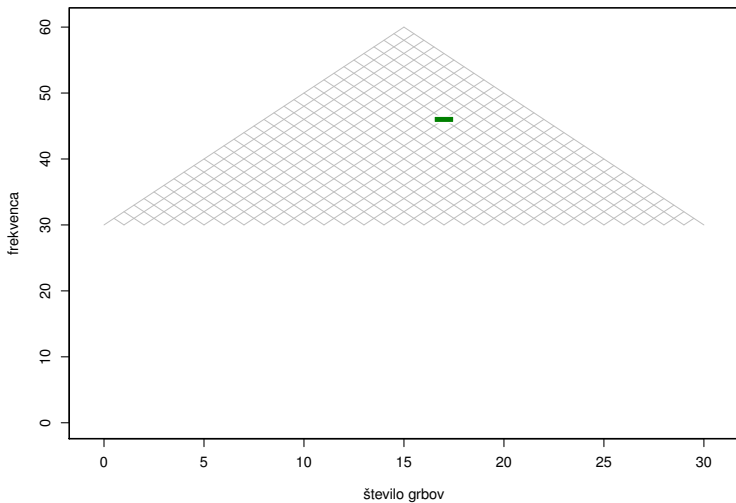
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



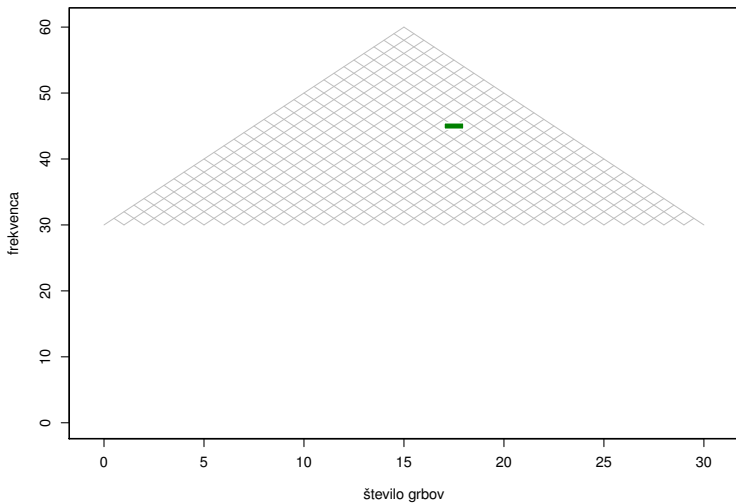
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



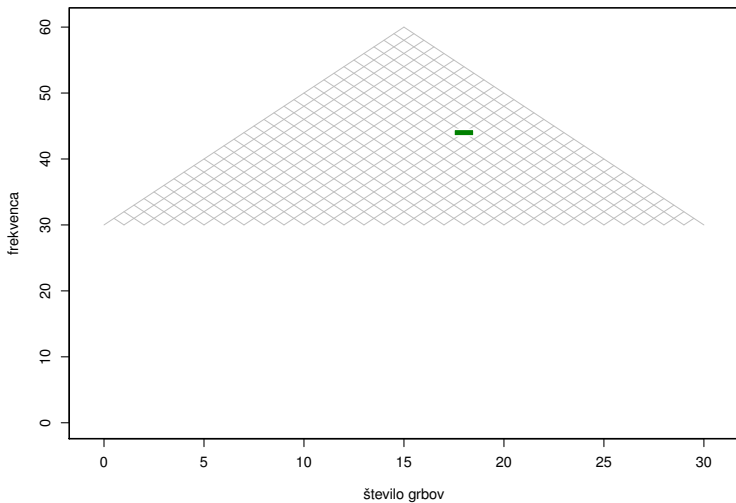
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



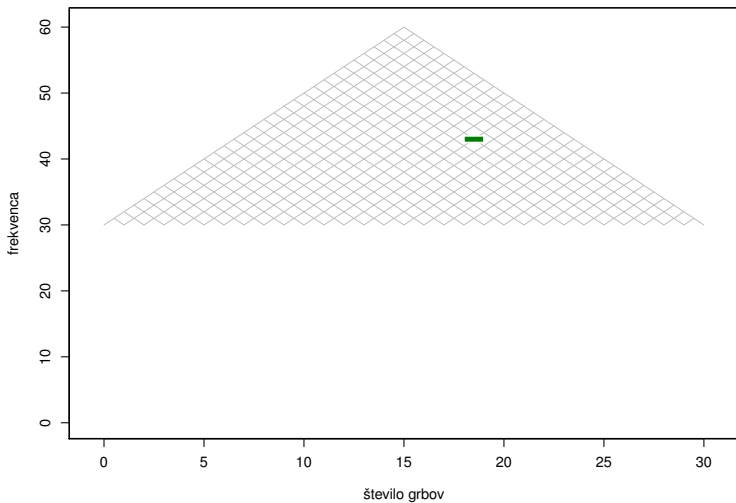
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



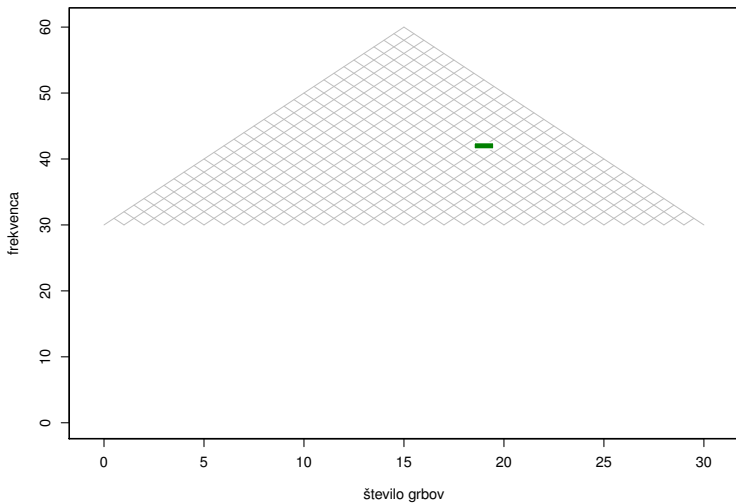
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



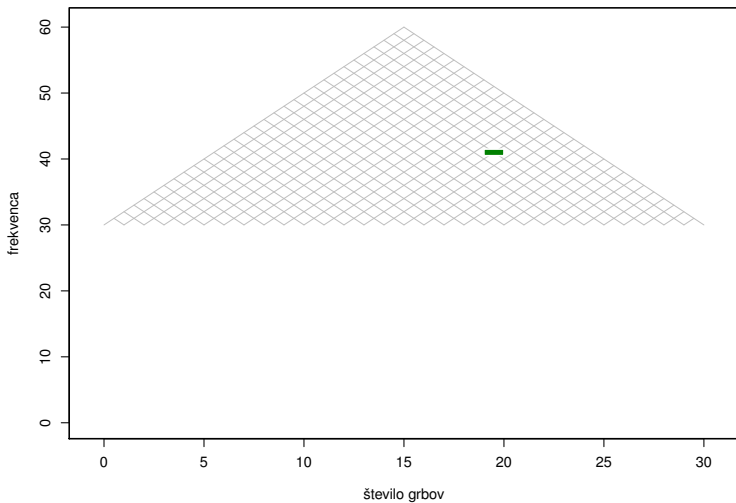
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



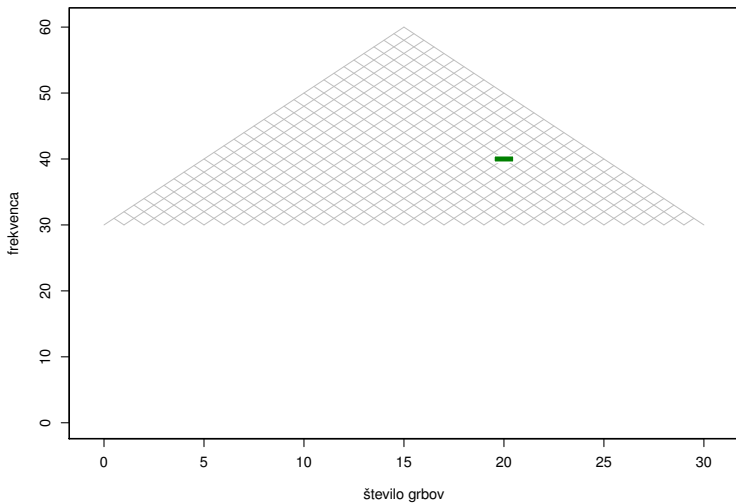
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



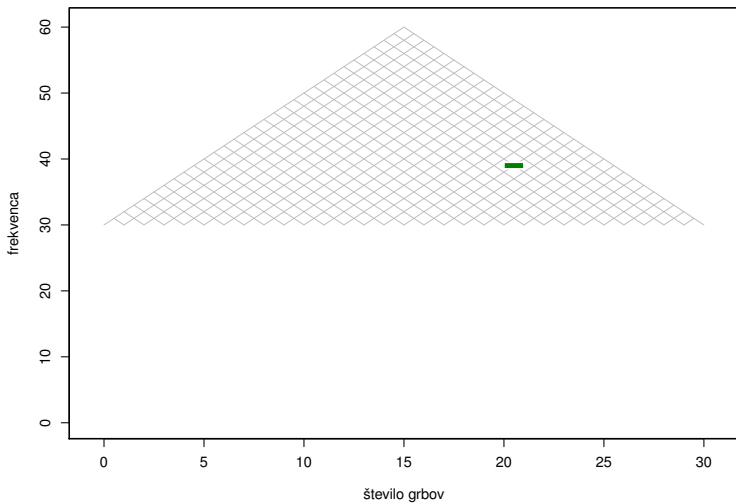
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



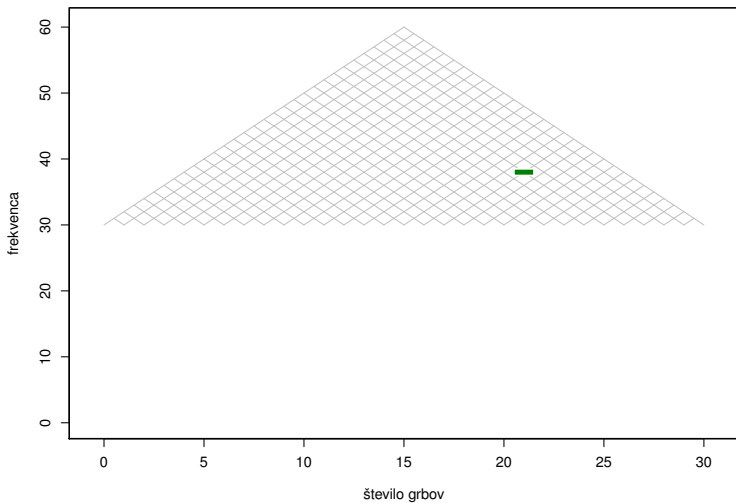
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



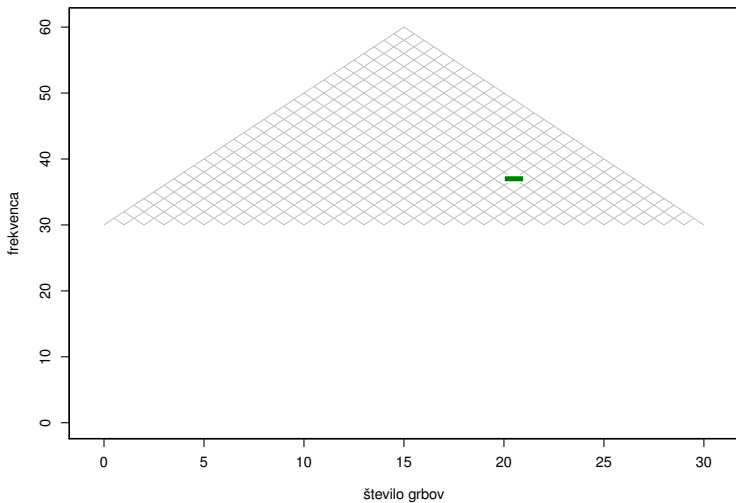
MET 30 POŠTENIH KOVANČEV: 1. izvedba



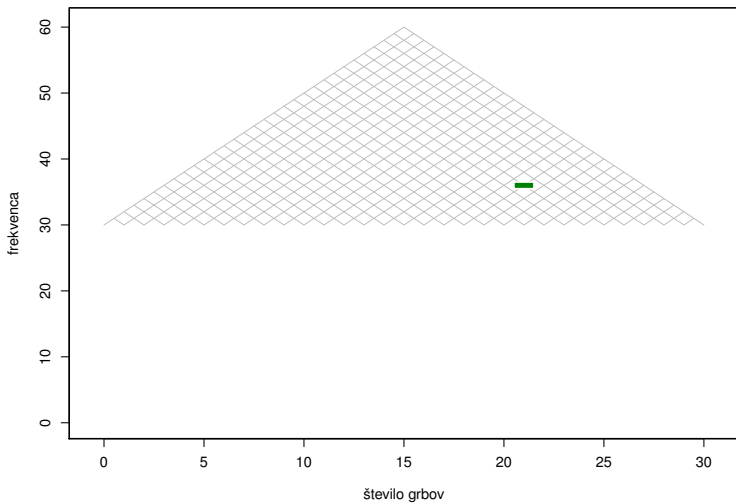
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



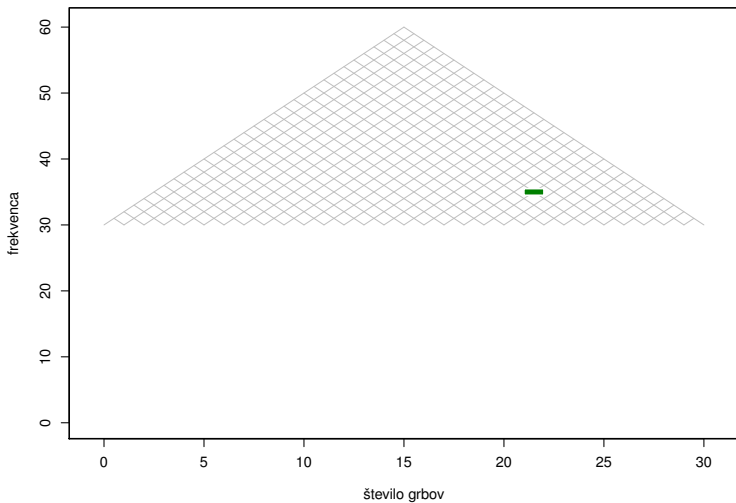
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



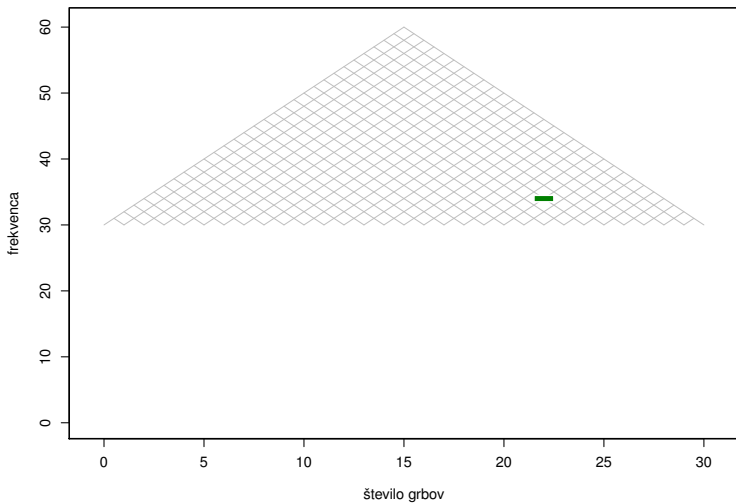
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



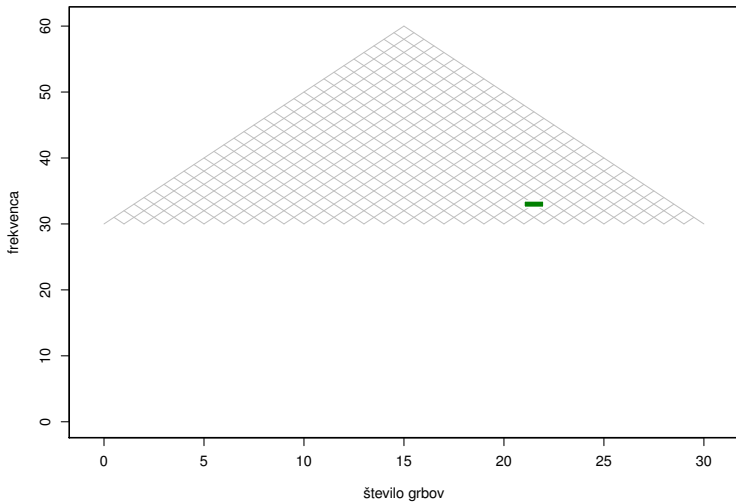
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



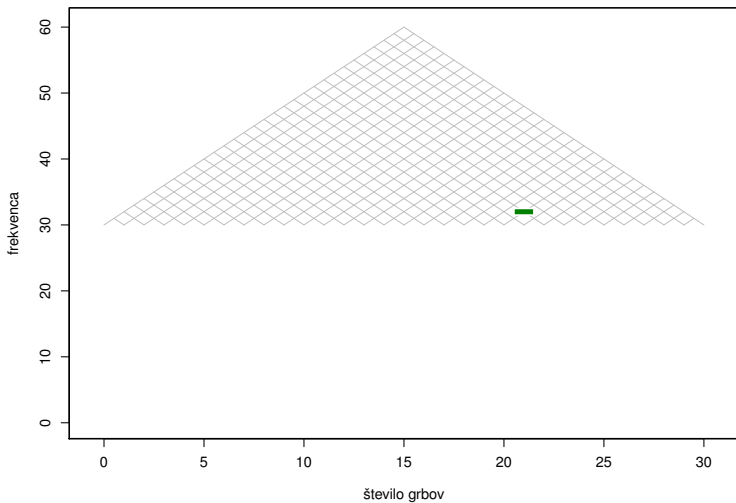
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



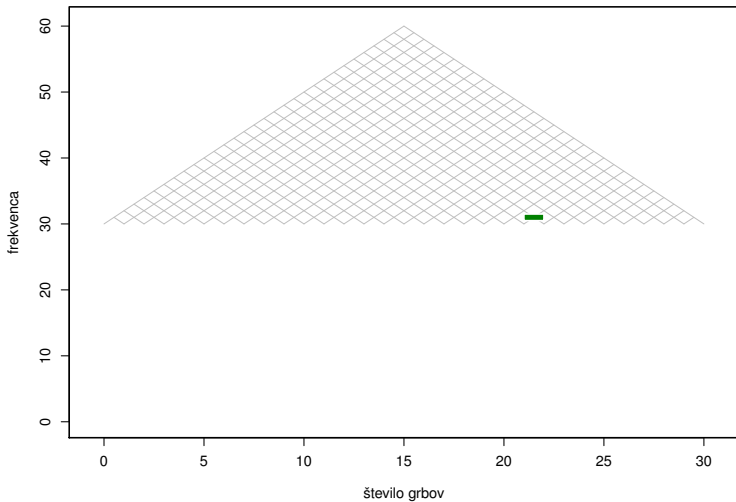
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



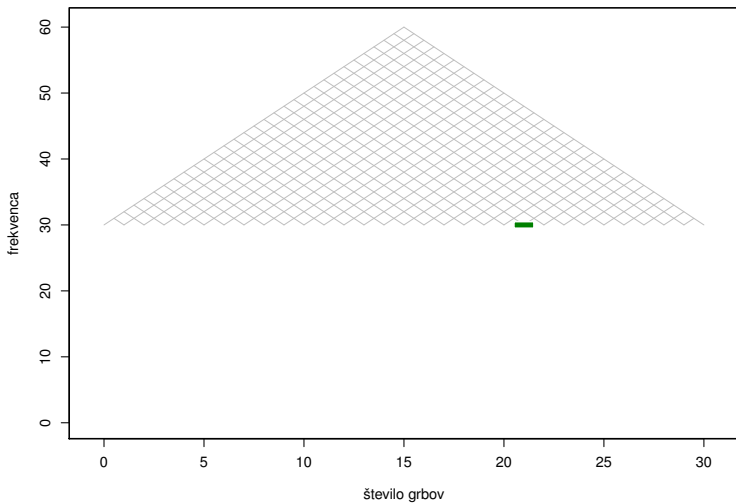
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



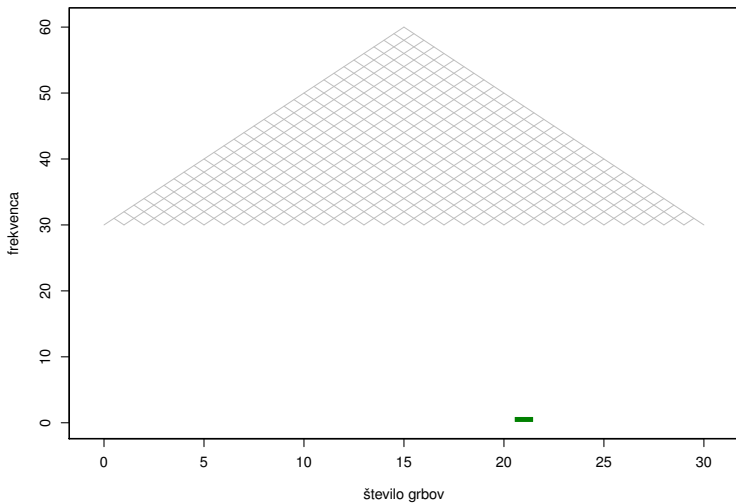
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



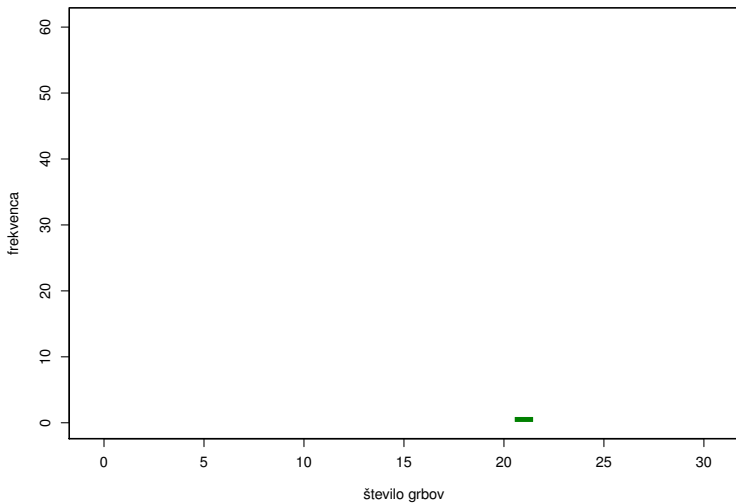
MET 30 POŠTENIH KOVANČEV: 1. izvedba



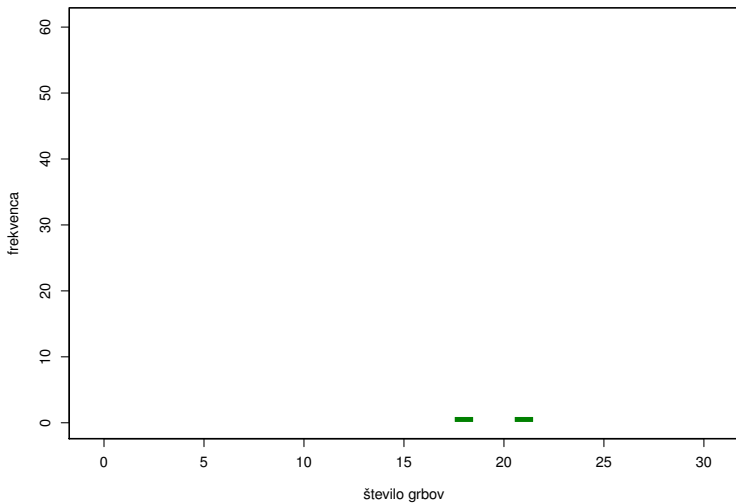
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



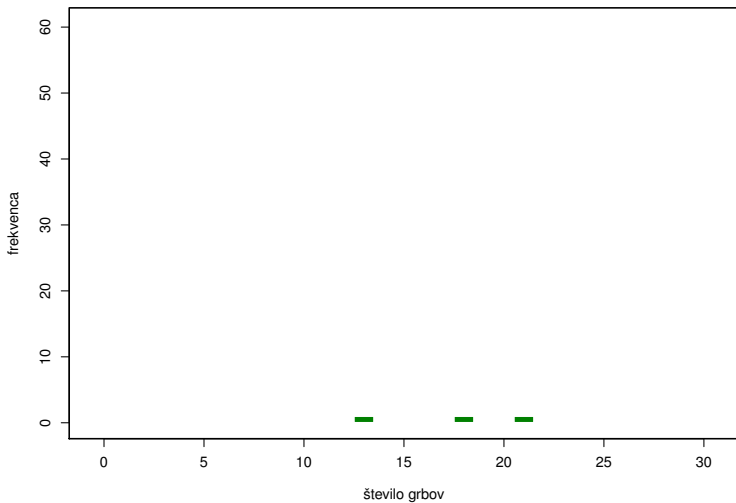
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 1. izvedba



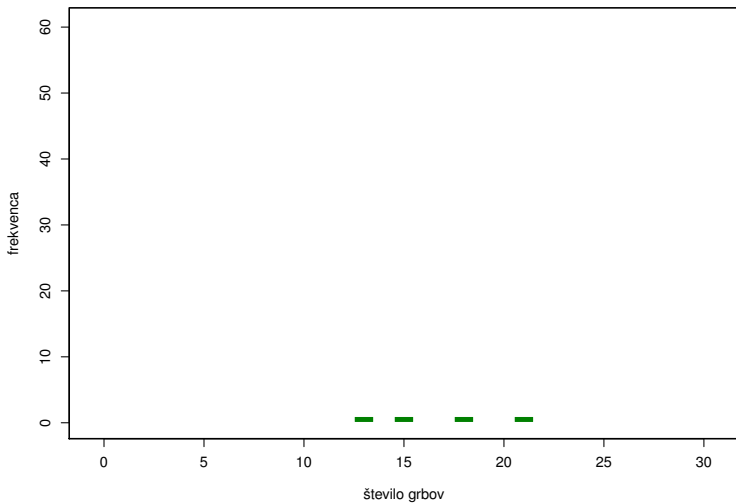
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 2. izvedba



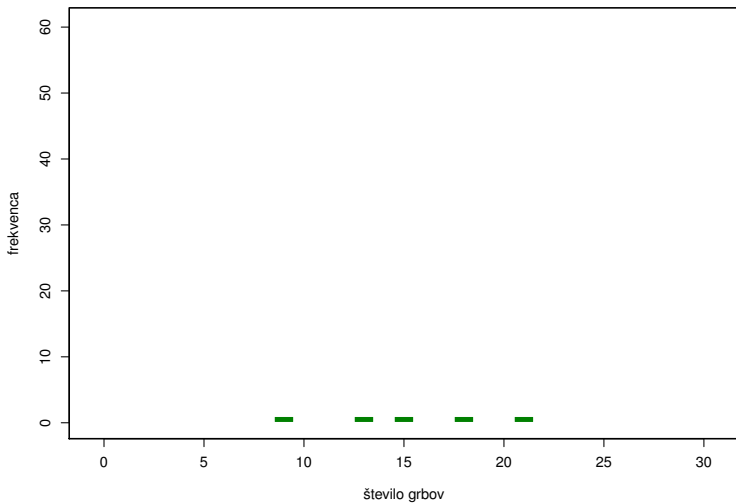
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 3. izvedba



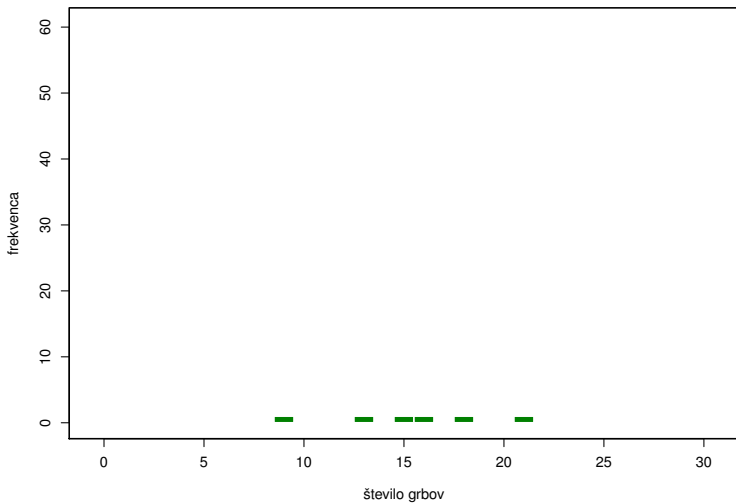
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 4. izvedba



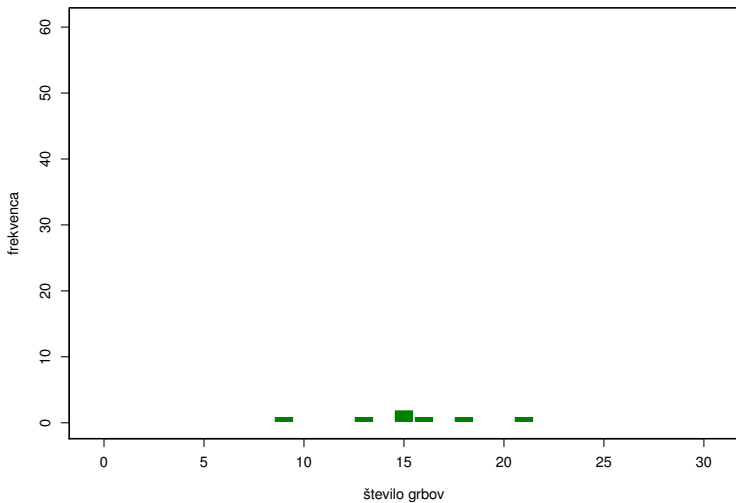
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 5. izvedba



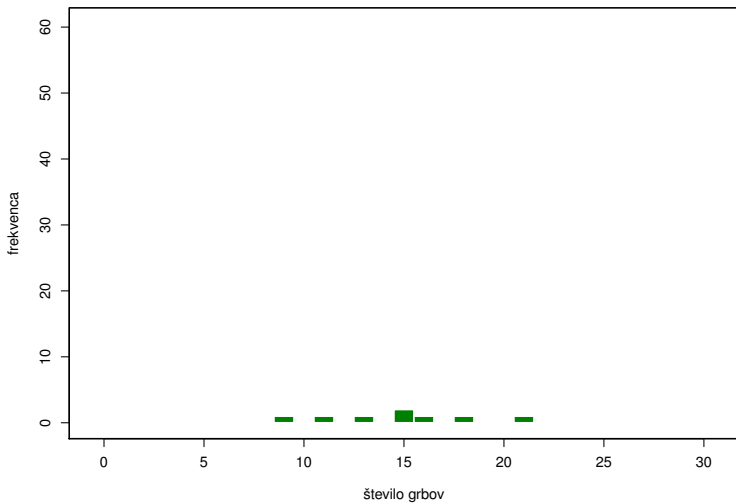
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 6. izvedba



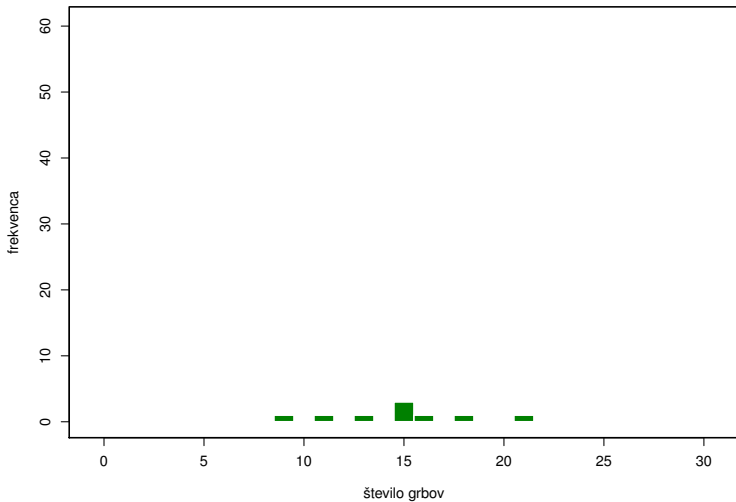
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 7. izvedba



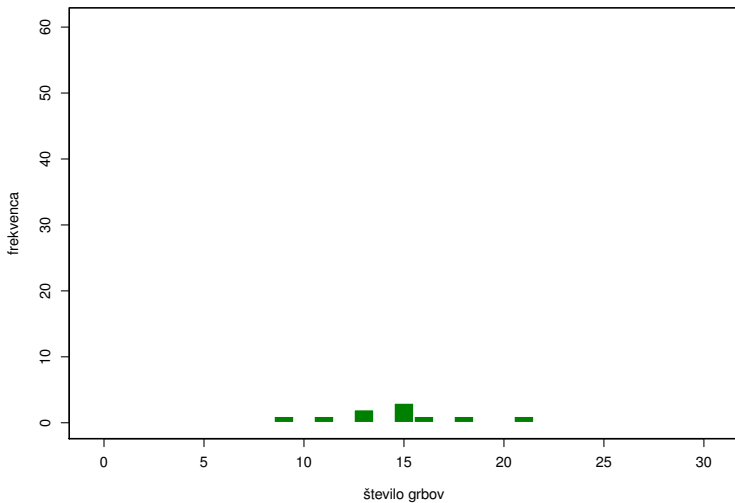
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 8. izvedba



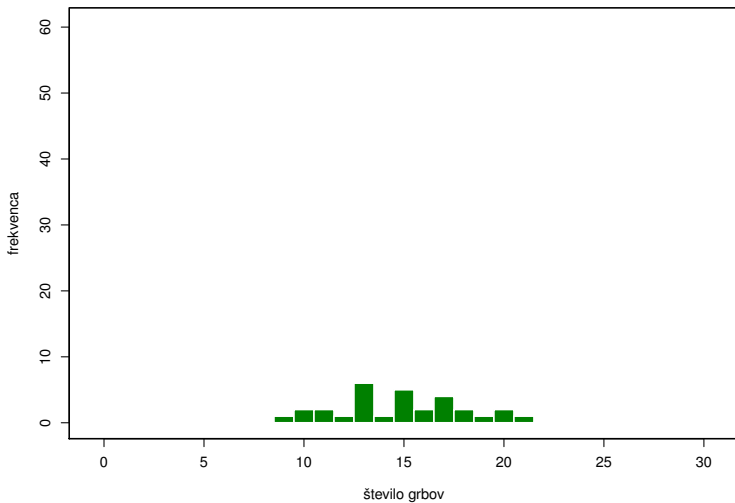
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 9. izvedba



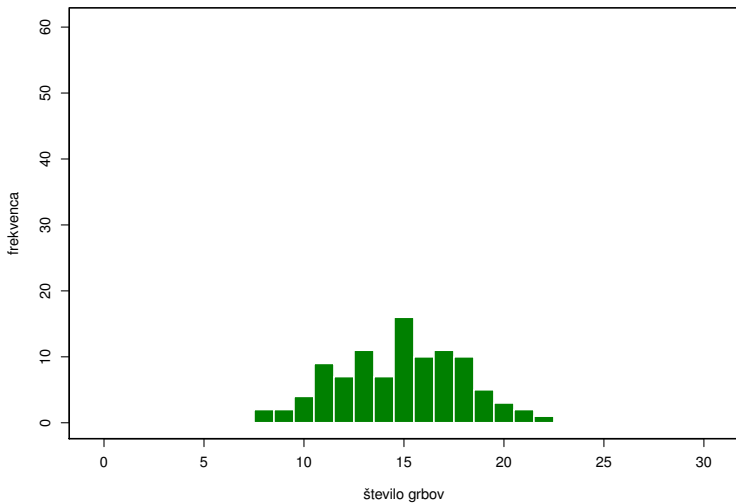
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 10. izvedba



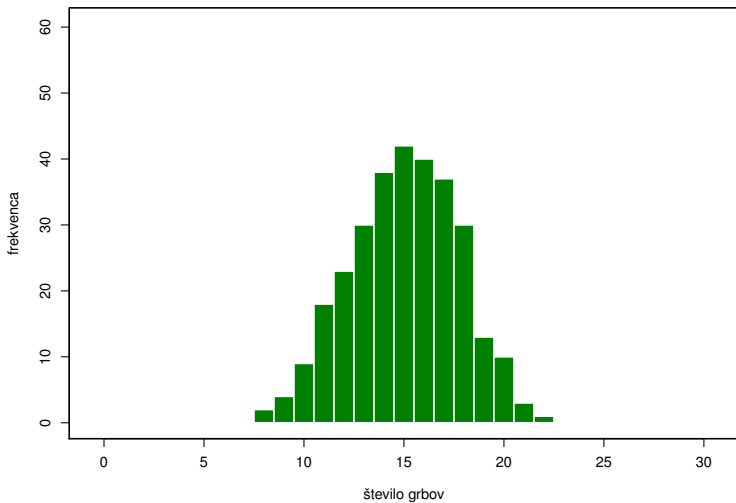
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 30. izvedba



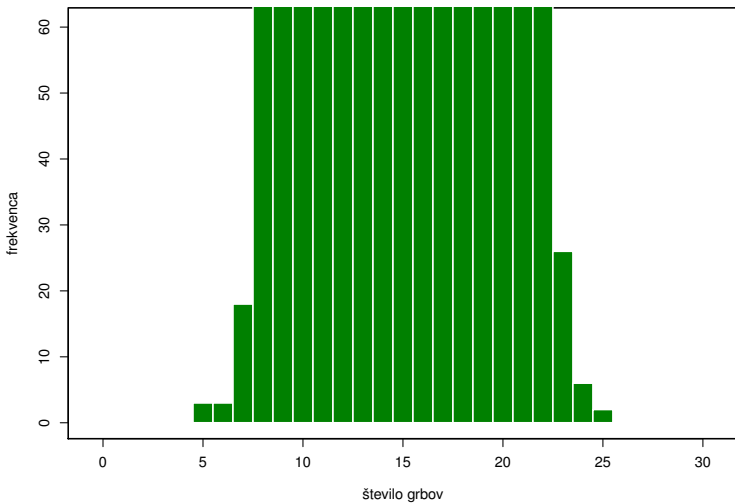
MET 30 POŠTENIH KOVANECV: 100. izvedba



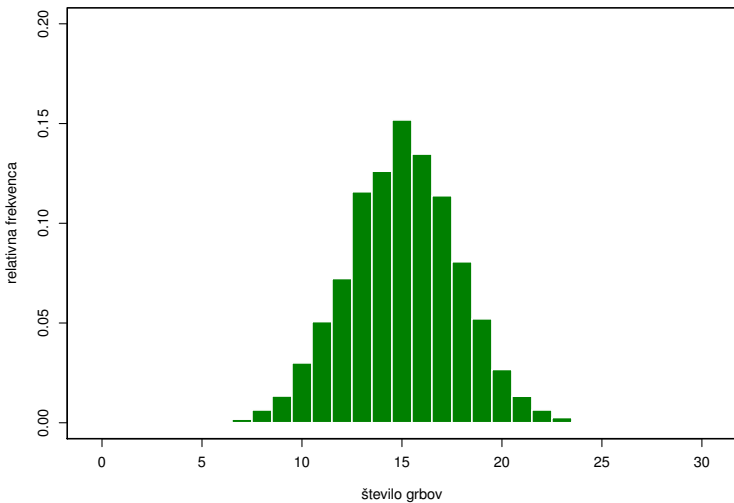
MET 30 POŠTENIH KOVANČEV: 300. izvedba



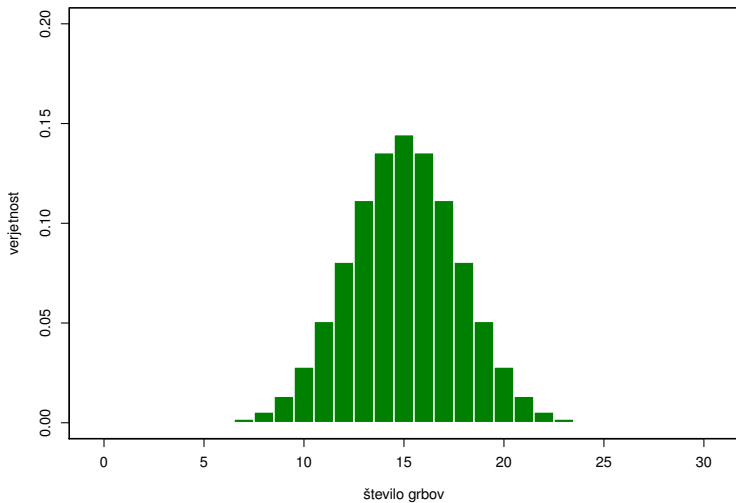
MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 10000. izvedba



MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 10000. izvedba

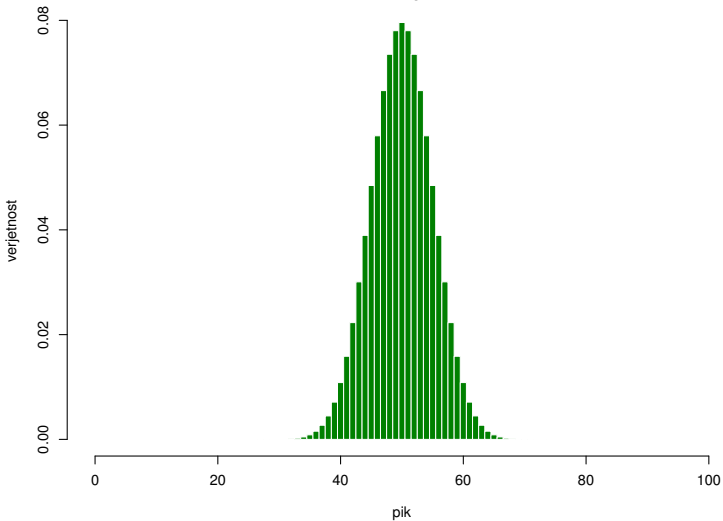


MET 30 POŠTENIH KOVANČEV: VERJETNOSTI

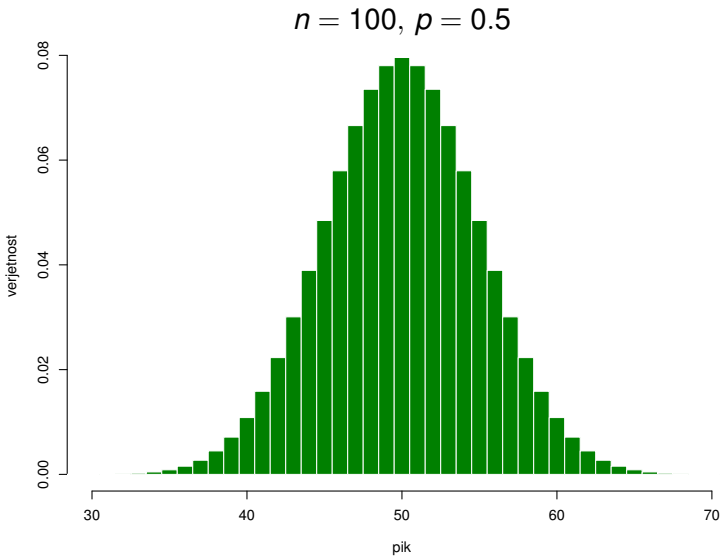


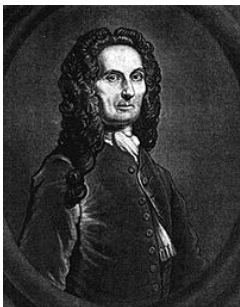
100 METOV POŠTENEGA KOVANCA

$$n = 100, p = 0.5$$



100 METOV POŠTENEGA KOVANCA





Abraham de Moivre
(1667–1754)
francoski matematik, deloval v Angliji

Vir: Wikipedija

- n -krat vržemo pošten kovanec
- $X :=$ število grbov, ki padejo
- Verjetnost, da pade natanko g grbov, označimo s $\mathbb{P}_n(X = k)$.
- $\mathbb{P}_n(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Aproksimacija temelji na kvocientu zaporednih verjetnosti:

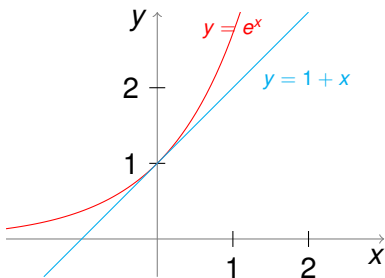
$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_n(X = k)}{\mathbb{P}_n(X = k - 1)} &= \frac{\frac{n!}{2^n k! (n-k)!}}{\frac{n!}{2^n (k-1)! (n-k+1)!}} = \frac{(k-1)! (n-k+1)!}{k! (n-k)!} = \\ &= \frac{n-k+1}{k}. \end{aligned}$$

Zaradi enostavnosti vzemimo, da je n sodo število, t. j. $n = 2m$. Naj bo $k = m + d$. Tedaj lahko zgornjo enakost prepíšemo v obliki:

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(X = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(X = m + d - 1)} = \frac{m - d + 1}{m + d} = \frac{1 - \frac{d-1}{m}}{1 + \frac{d}{m}}.$$

V naslednjem koraku bomo to aproksimirali za primer, ko je $d \ll m$.

Za majhne x je $1 + x \approx e^x$:





Leonhard Euler
(1707–1783)
švicarski matematik

Vir: Wikipedija

Če d ni prevelik, je torej:

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(X = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(X = m + d - 1)} = \frac{m - d + 1}{m + d} \approx \frac{e^{-(d-1)/m}}{e^{d/m}} = e^{-(2d-1)/m}.$$

Z množenjem teh približkov dobimo (za $d \geq 0$):

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(X = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(X = m)} \approx e^{-(1+3+5+\dots+(2d-1))/m} = e^{-d^2/m}.$$

Sledi:

$$\mathbb{P}_{2m}(X = m + d) \approx \mathbb{P}_{2m}(X = m) e^{-d^2/m}.$$

Zaradi simetrije to velja tudi za negativne d .

Verjetnosti torej sledijo Gaussovi krivulji.

Približek za $\mathbb{P}_{2m}(X = m)$ dobimo iz dejstva, da je vsota vseh verjetnosti enaka 1:

$$\sum_{d=-m}^m \mathbb{P}_{2m}(X = m + d) = 1.$$

Ker se vse dogaja v območju $d = O(\sqrt{n})$ (sicer je faktor $e^{-d^2/m}$ zanemarljiv), smemo aproksimirati:

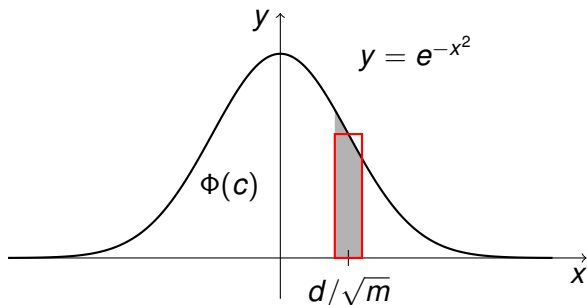
$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{2m}(X = m) e^{-d^2/m} \approx 1.$$

IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (6)

Prejšnjo formulo prepišemo v obliki:

$$\sqrt{m} \mathbb{P}_{2m}(X = m) \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-(d/\sqrt{m})^2} \approx 1.$$

Posamezen sumand je enak ploščini pravokotnika s širino $1/\sqrt{m}$ in višino $e^{-(d/\sqrt{m})^2}$, ta pa je približno enaka ploščini pod krivuljo $y = e^{-x^2}$ na intervalu okoli d/\sqrt{m} s širino $1/\sqrt{m}$:



Celotna vsota pa je približno enaka ploščini pod celotno krivuljo $y = e^{-x^2}$, za katero je znano, da je enaka $\sqrt{\pi}$:

$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-(d/\sqrt{m})^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Torej je:

$$\mathbb{P}_{2m}(X = m) \approx \frac{1}{\sqrt{m\pi}},$$

$$\mathbb{P}_{2m}(X = m + d) \approx \frac{1}{\sqrt{m\pi}} e^{-d^2/m}.$$

A tudi če je n lih, se da z nekoliko tehnično zahtevnejšo izpeljavo dobiti:

$$\mathbb{P}_n \left(X = \frac{n}{2} + d \right) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi}} e^{-2d^2/n}$$

oziroma:

$$\mathbb{P}_n(X = k) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi}} e^{-2(k-n/2)^2/n}.$$

Gaussovi krivulji pa sledijo tudi verjetnosti za nepošten kovanec, na katerem grb pade z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, cifra pa z verjetnostjo $q = 1 - p$: za $|k - np| \ll (npq)^{2/3}$ velja

Laplaceova lokalna formula:

$$\mathbb{P}_{n,p}(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-2(k-np)^2/(2npq)}.$$



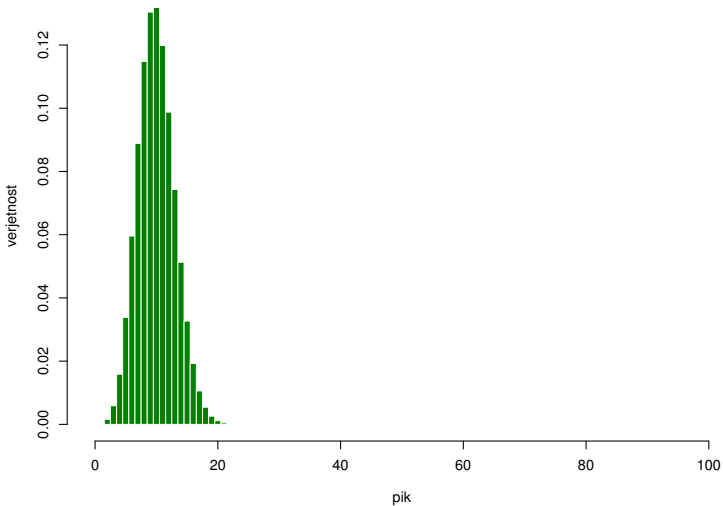
Pierre-Simon de Laplace
1749–1827

francoski matematik, astronom, fizik in politik

Vir: Wikipedija

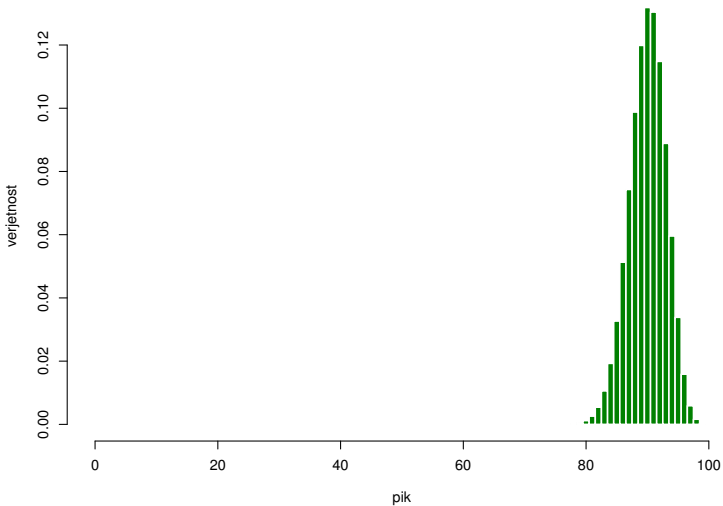
100 METOV NEPOŠTENEGA KOVANCA

$$n = 100, p = 0.1$$



100 METOV NEPOŠTENEGA KOVANCA

$$n = 100, p = 0.9$$



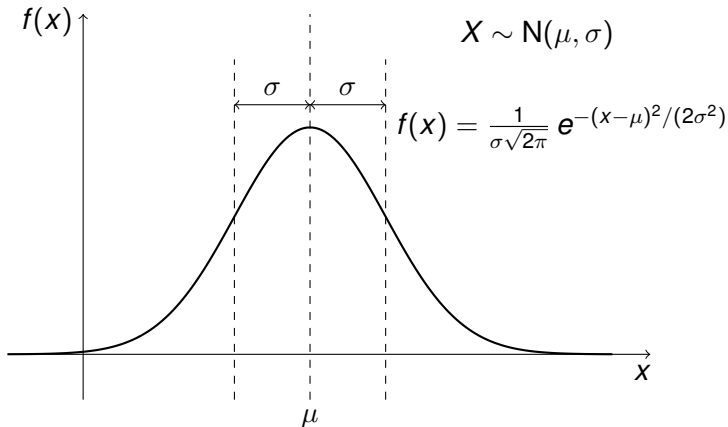
Velja $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, kjer je:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & ; \text{ pri } j\text{-tem metu pade grb,} \\ 0 & ; \text{ pri } j\text{-tem metu pade cifra.} \end{cases}$$

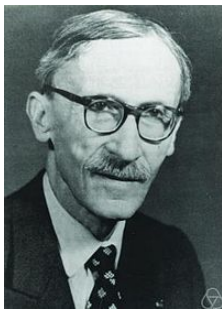
Gaussovi krivulji pa pod razmeroma milimi pogoji sledi tudi porazdelitev vsote veliko splošnejših neodvisnih slučajnih spremenljivk: porazdelitve posameznih seštevancev ne smejo biti pregrde in nobeden ne sme preveč izstopati. Precizni formulaciji tega dejstva pravimo **centralni limitni izrek**.

Gaussovi krivulji torej sledi porazdelitev slučajne količine, ki nastane kot rezultanta veliko majhnih neodvisnih vplivov, ki se med seboj seštevajo.

NORMALNA (GAUSSOVA) PORAZDELITEV



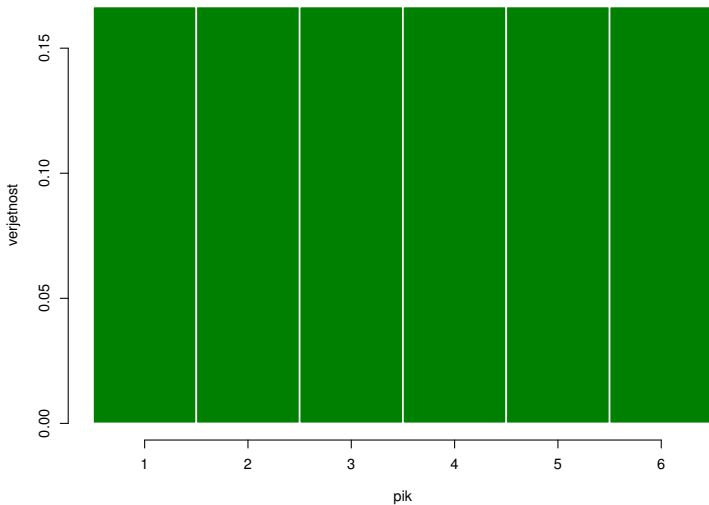
- $\mu = \mathbb{E}(X)$ (pričakovana vrednost ali matematično upanje)
- $\sigma^2 = \text{var}(X) = D(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$
(varianca ali disperzija)



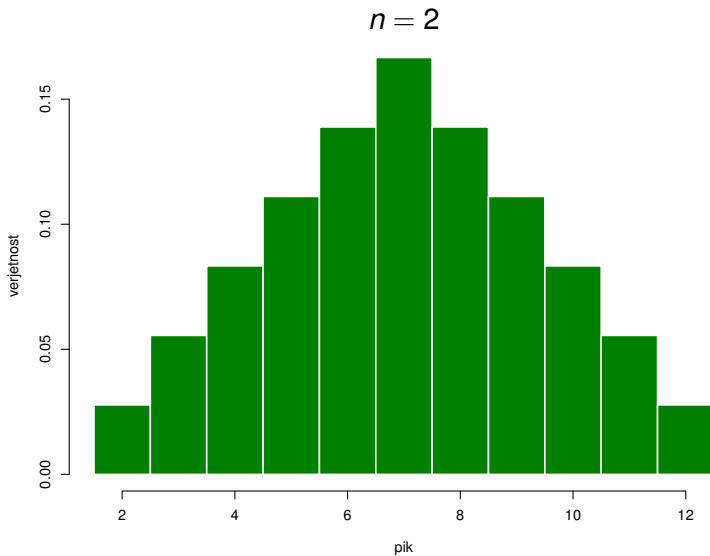
Paul Pierre Lévy
(1886–1971)
francoski matematik židovskega rodu

Vir: Wikipedija

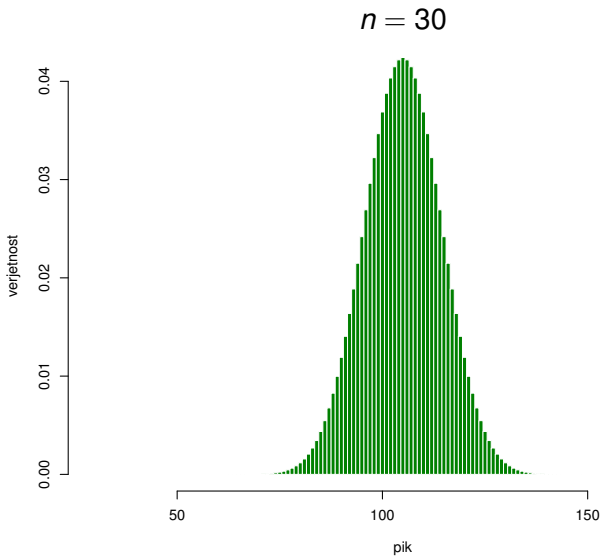
$n = 1$



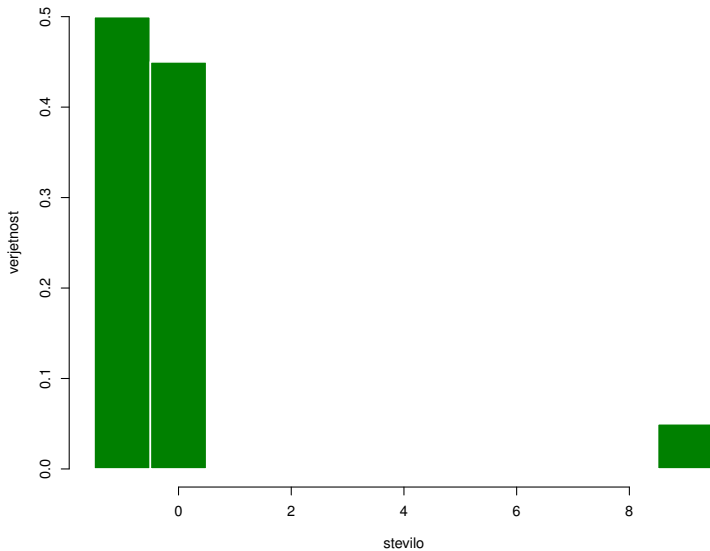
2 META POŠTENE KOCKE



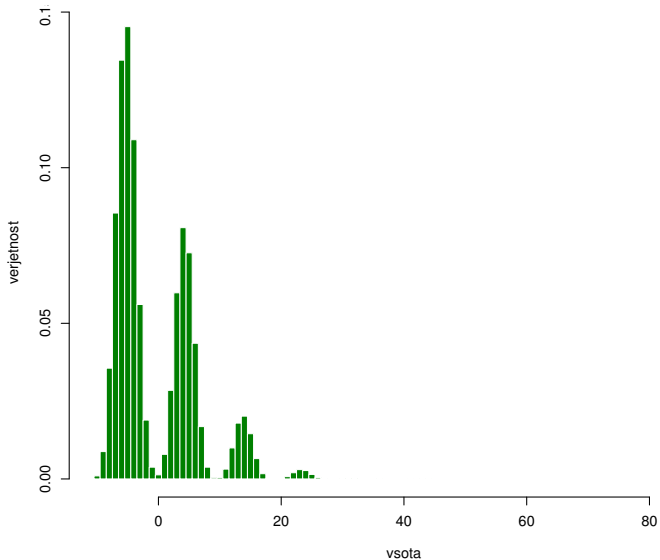
30 METOV POŠTENE KOCKE



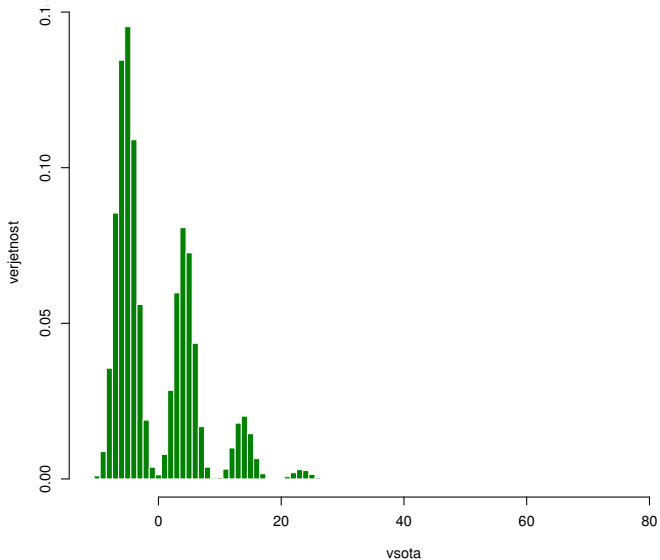
GRDA PORAZDELITEV



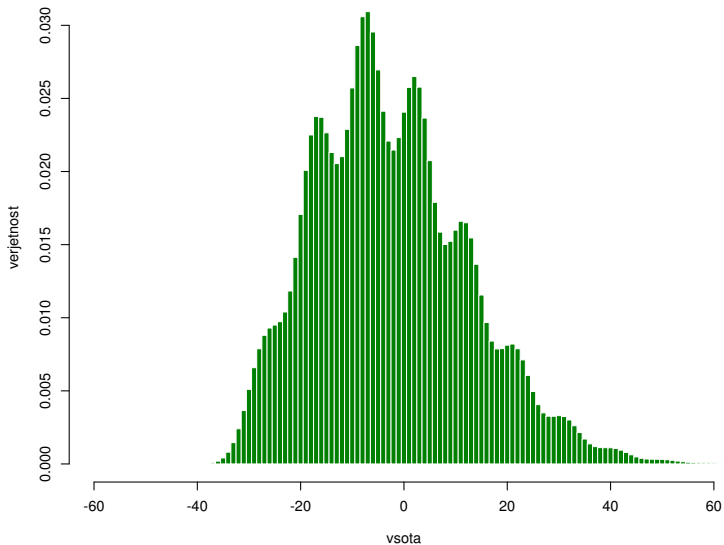
VSOTA 10 GRDIH PORAZDELITEV



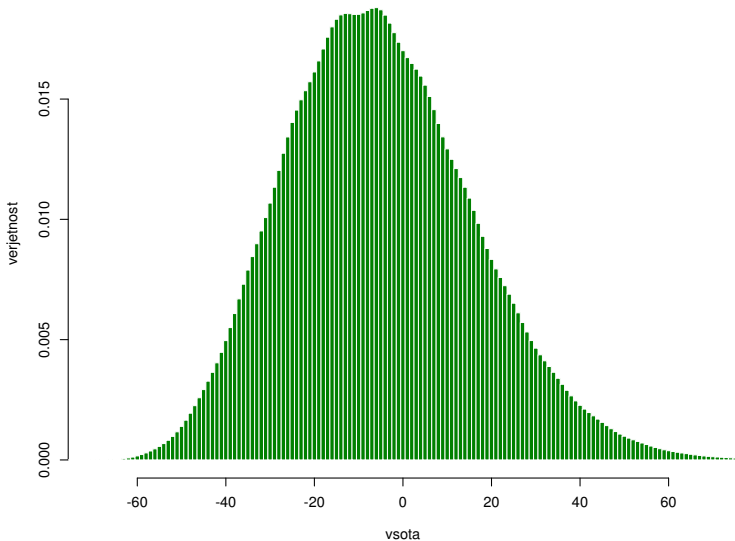
VSOTA 10 GRDIH PORAZDELITEV



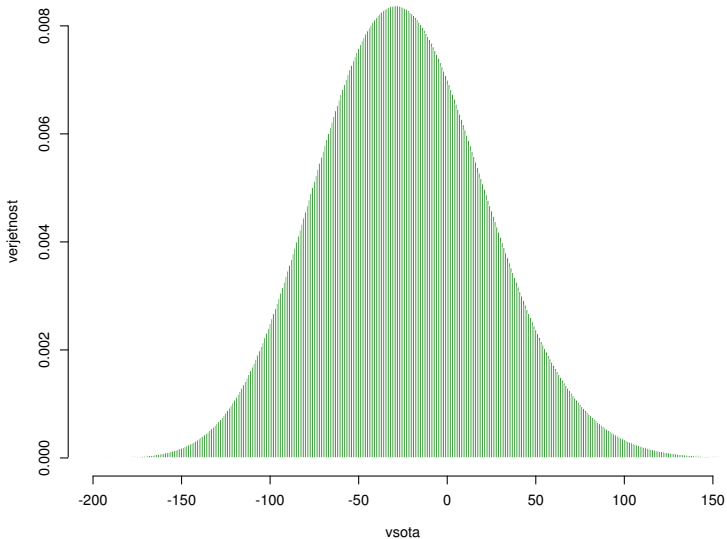
VSOTA 50 GRDIH PORAZDELITEV



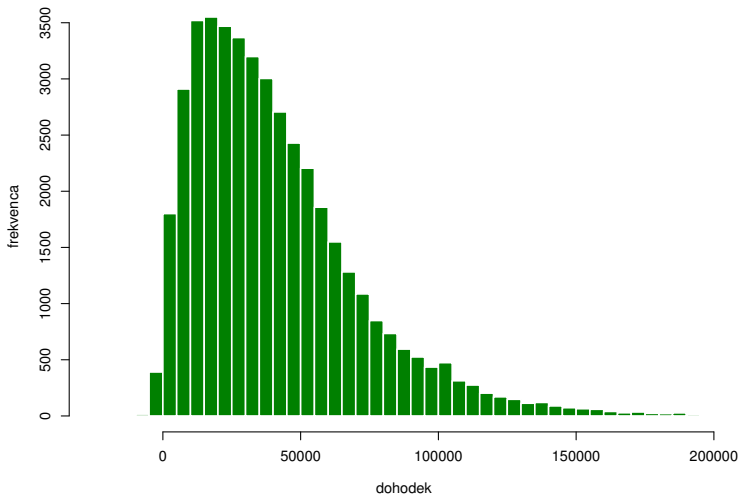
VSOTA 100 GRDIH PORAZDELITEV



VSOTA 500 GRDIH PORAZDELITEV

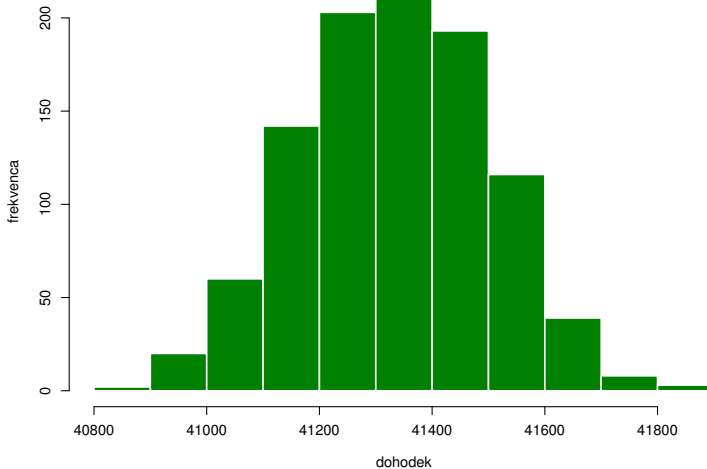


DOHODKI 43886 DRUŽIN V KIBERGRADU

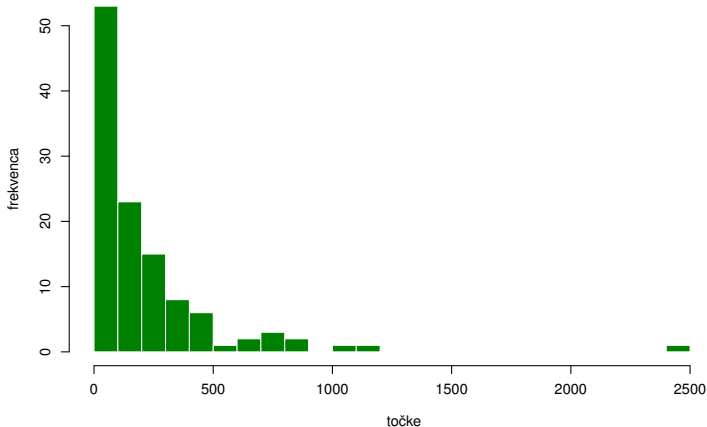


Vir podatkov: J. Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis, Duxbury, 2007

1000 POVPREČIJ PO 2000 DOHODKOV



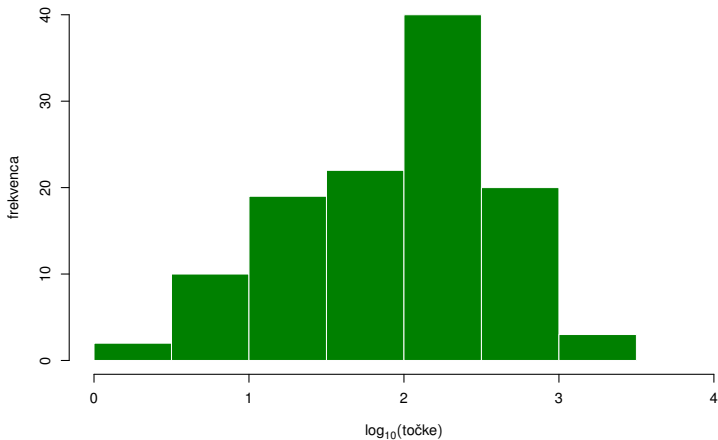
TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)



Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

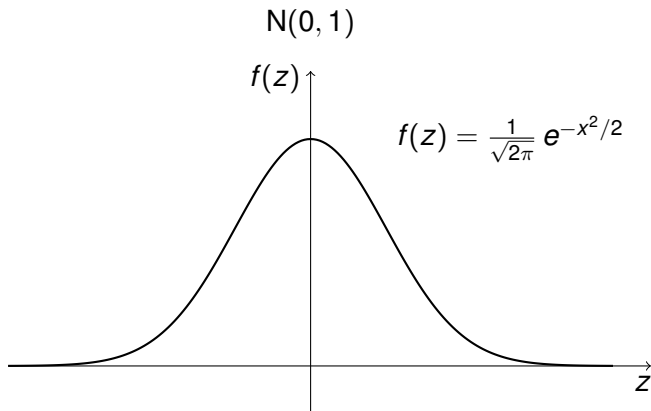
LOGARITEM TOČK



Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

STANDARDNA NORMALNA PORAZDELITEV

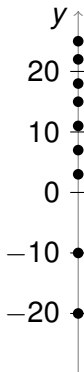


$$Z \sim N(0, 1) \implies a + bZ \sim N(a, |b|)$$

PRIMERJALNI KVANTILNI (Q-Q) GRAFIKON: IDEJA 1

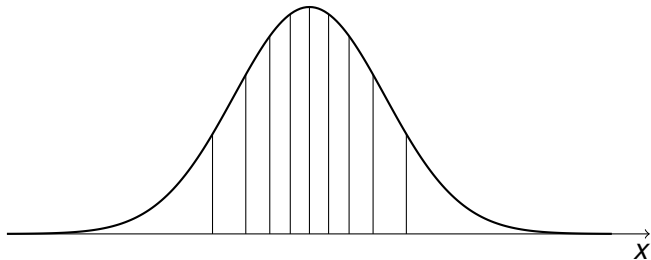
n različnih podatkov razdeli realno os na $n + 1$ delov:

Primer: 3, 22, 7, -20, 11, -10, 15, 18, 25



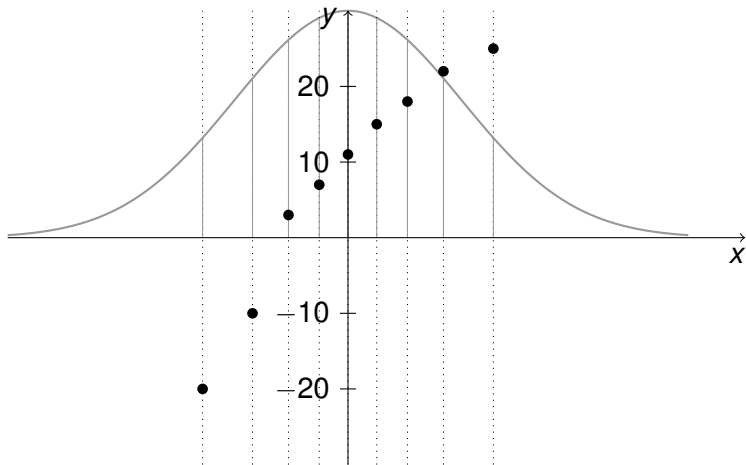
PRIMERJALNI KVANTILNI (Q-Q) GRAFIKON: IDEJA 2

Realno os pa lahko razdelimo tudi glede na ploščine pod Gaussovo krivuljo:



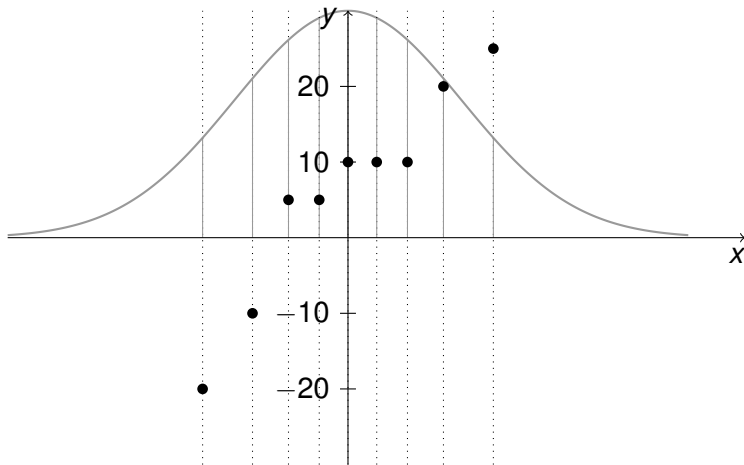
PRIMERJALNI KVANTILNI (Q-Q) GRAFIKON: PRIMER 1

Podatki: 3, 22, 7, -20, 11, -10, 15, 18, 25

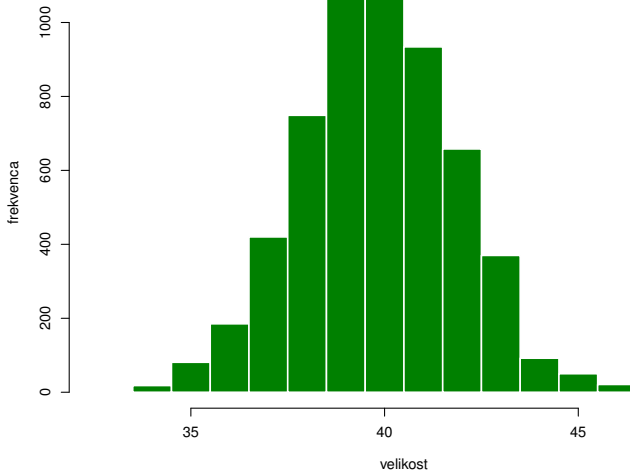


PRIMERJALNI KVANTILNI (Q-Q) GRAFIKON: PRIMER 2

Podatki: 5, 20, 5, -20, 10, -10, 10, 10, 25

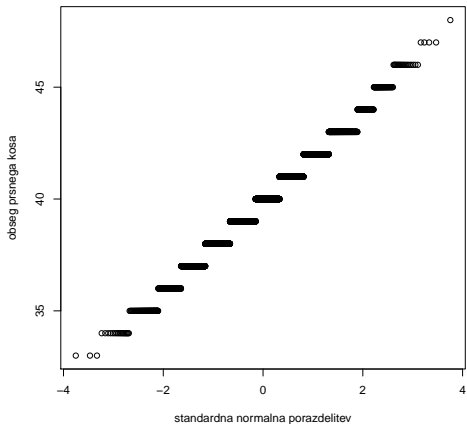


OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH



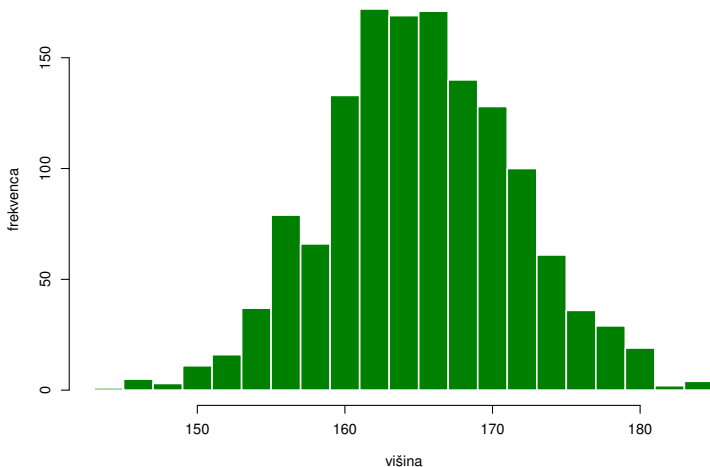
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH



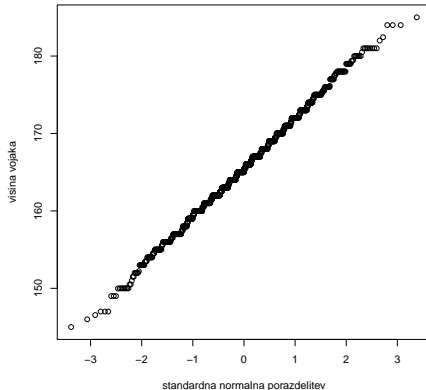
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA



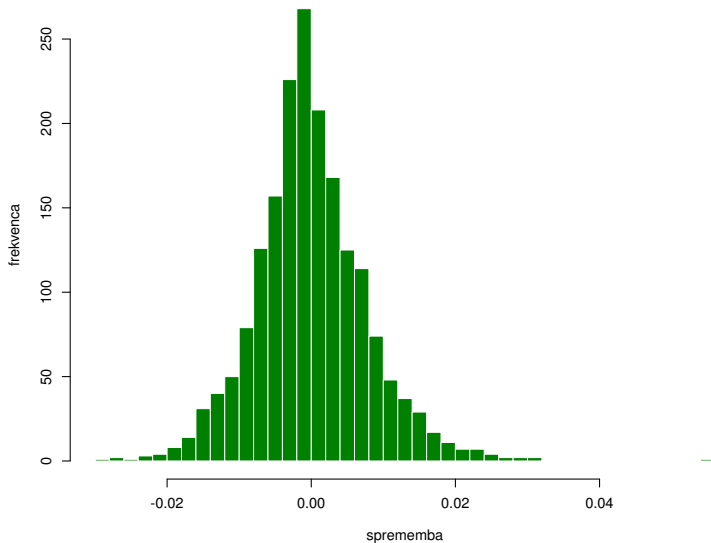
Vir podatkov (9. 8. 2015): <http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html>

TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA



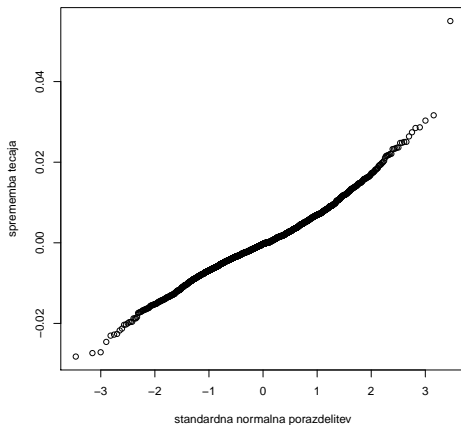
Vir podatkov (9. 8. 2015): <http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html>

DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



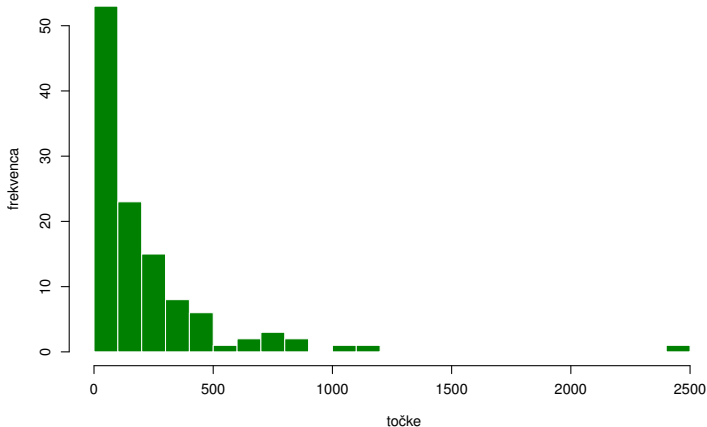
Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



Vir podatkov (9. 8. 2015): <https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html>

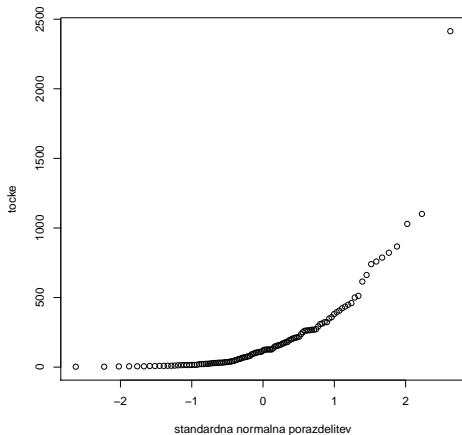
TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)



Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

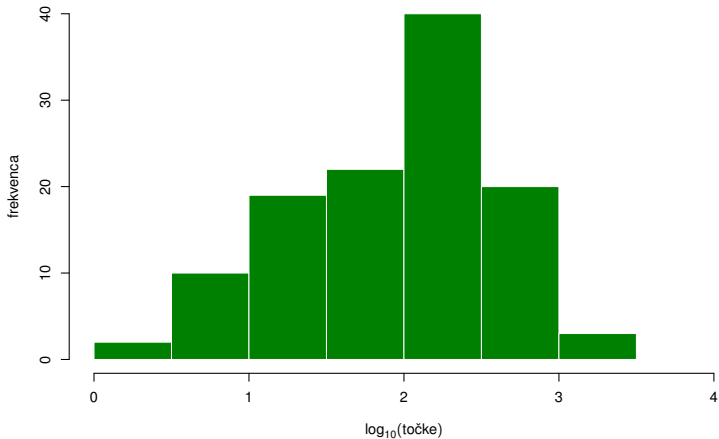
TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)



Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

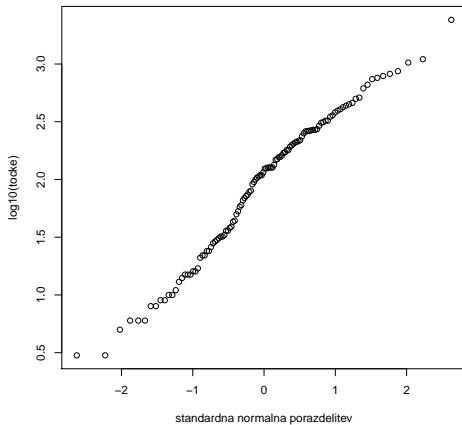
LOGARITEM TOČK



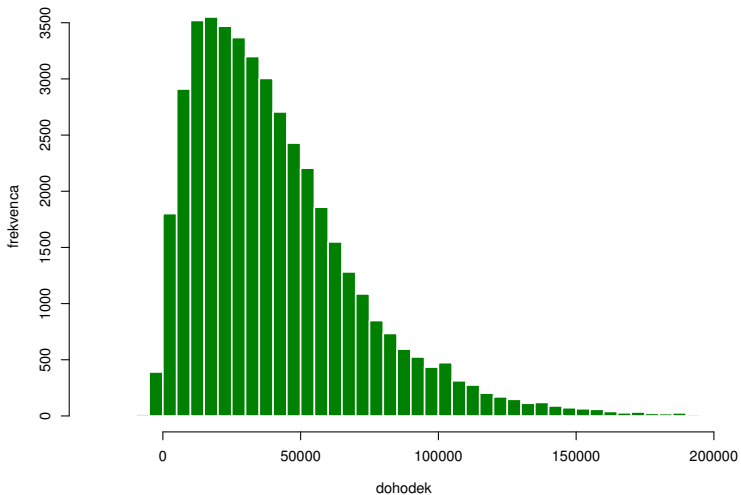
Vir podatkov (27. 3. 2013):

<http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html>

LOGARITEM TOČK

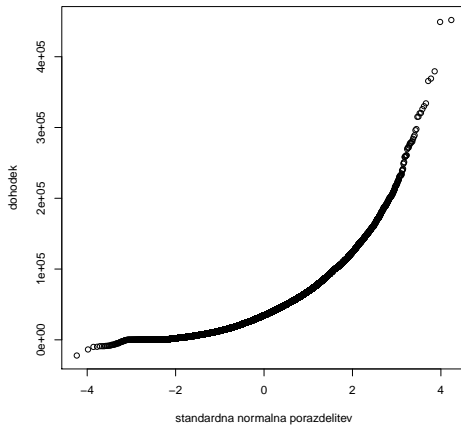


DOHODKI 43886 DRUŽIN V KIBERGRADU



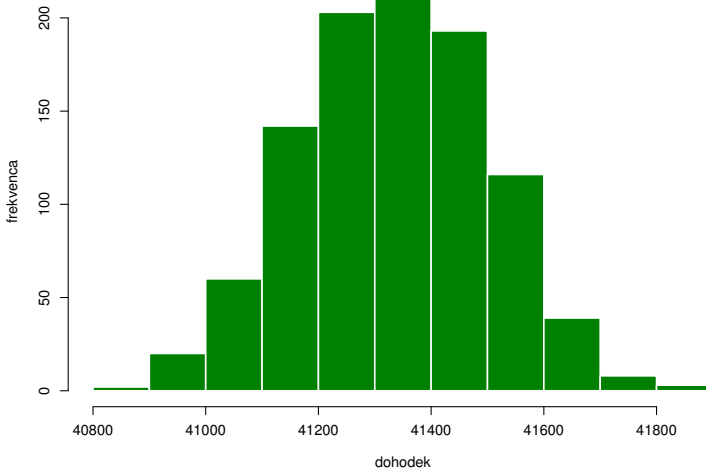
Vir podatkov: J. Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis, Duxbury, 2007

DOHODKI 43886 DRUŽIN V KIBERGRADU



Vir podatkov: J. Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis, Duxbury, 2007

1000 POVPREČIJ PO 2000 DOHODKOV



1000 POVPREČIJ PO 2000 DOHODKOV

