HORROR INFINITI

OLIVER DRAGIČEVIĆ

Povzetek. Besedilo je razširjena različica predavanja z naslovom "Neskončne vsote", ki ga je avtor izvedel na FMF dne 1. februarja 2020 v okviru seminarja za učitelje. Obravnavamo več vprašanj, povezanih z razumevanjem koncepta neskončnosti. Kot iztočnico vzamemo t.i. Ross–Littlewoodov paradoks, v nadaljevanju pa pozornost usmerimo na neskončne vrste ter vprašanje neobčutljivosti vsote le-teh pri spremembi vrstnega reda seštevanja (Riemannov sumacijski izrek).

1. Ross–Littlewoodov paradoks

Izhodišče za predavanje je naslednje vprašanje, ki ga je omizju med večerjo v Padovi junija 2004 postavil prof. Frank Morgan, eden izmed predavateljev na takratni poletni šoli iz matematične analize na Univerzi v Padovi, sicer pa profesor na Williams College (Williamstown, Massachusetts, ZDA):

Imejmo dve neskončni posodi. V prvi naj bo (števno) neskončno kroglic, druga pa je prazna. Na vsakem koraku nato iz prve posode v drugo prestavimo dve kroglici, nakar iz druge posode eno kroglico odstranimo. Koliko kroglic ostane v drugi posodi po ***neskončno*** *mnogo korakih?* **(RL)**

Na prvi pogled se zdi, da je odgovor "neskončno", saj je po n-tem koraku v 2. posodi ravno n kroglic. Toda če kroglice oštevilčimo po vrstnem redu, v katerem jih postavljamo v 2. posodo, nato pa na n-tem koraku odvzamemo kroglico številka n, tedaj seveda vsaka kroglica slej ko prej zapusti 2. posodo. Torej je odgovor na naše vprašanje v tem primeru enak "nič", čeprav se število kroglic, ki ostanejo v 2. posodi po n korakih, čedalje veča oz. celo raste proti neskončno.

Kako smo lahko dobili dva različna odgovora? Kako si lahko razložimo, da strogo naraščajoče pozitivno zaporedje (v našem primeru števila kroglic v 2. posodi) na koncu konvergira proti nič?

Ta problem je znan kot *Ross–Littlewoodov paradoks*. Grška beseda $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$ pomeni *nepričakovano, nenavadno*, oziroma *v nasprotju s prevladujočim prepričanjem*. Problem namenoma ni postavljen precizno, pač pa nas (kot vsak pravi paradoks) napelje na premišljevanje ne le o tem, kako ga rešiti, ampak najprej kaj vprašanje sploh pomeni. Namreč, sprva se zdi, da *na koncu* tega procesa pogledamo v 2. posodo in preštejemo, koliko kroglic je "preživelo". Toda ali sploh obstaja čas *po koncu neskončnosti*? Malce drugače rečeno, kako lahko "počakamo, da bo *neskončnosti konec*" (in potem pogledamo v 2. posodo)?

Opomba 1.1. Da nas premišljevanje o neskončnosti lahko zbega, ni presenetljivo. Že v antiki so skovali besedno zvezo *horror infiniti*, ki je bila izraz tega nelagodja oz. nezmožnosti suvereno obravnavati neskončnost. Tudi starogrška beseda za neskončnost, apeiron ($\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$), je imela slabšalni prizven. Poučna manifestacija antične "nemoči" pred pojmovanjem neskončnosti so znani paradoksi filozofa Zenona iz Eleje.

Date: April 6, 2020 *Verzija*: "Ross-Littlewood.tex'.

Vendarle pa je "strah" starih Grkov pred neskončnostjo treba vzeti z rezervo. Vemo namreč, da so se s tem konceptom spoprijemali tudi z uspehom. Eden bolj znanih primerov je Evklidov izrek o tem, da je praštevil neskončno mnogo.

Neskončno *veliko* ima svojo zrcalno sliko v enako zahtevnem konceptu neskončno *majhnega*. Obravnavo enega in drugega je omogočil revolucionaren razvoj matematične analize in logike. Med vrsto matematikov, ki so dali ključne prispevke k razvoju teh področij ter olajšali spopadanje z neskončnostjo, omenimo dve veliki imeni matematike 19. stoletja: Augustin-Louis Cauchy ter Georg Cantor.

Povejmo še, da je neskončnost kot pojem od nekdaj bila predmet dolgih razprav v filozofiji znanosti. Te razprave, oz. že zgodovinsko naštevanje pomembnih virov, močno presegajo okvir naše kratke prezentacije, zato na koncu tega besedila samo navajamo nekaj izčrpnih monografij na to temo [1, 2, 3].

1.1. **Problem kot limitni proces.** Standardno orodje za obravnavo neskončnosti je *limita*. Privzamemo, da poznamo pojem limite zaporedja ali funkcije. Sedaj želimo te koncepte prilagoditi za razumevanje Ross–Littlewoodovega paradoksa.

Definirajmo podmnožice B_n, B_∞ v $\mathbb{N}$ s predpisom

$$\begin{aligned} B_n &:= \{\text{kroglice (oz. njihovi indeksi), ki so v posodi po } n \text{ korakih}\} \\ B_\infty &:= \{\text{kroglice (oz. njihovi indeksi), ki so v posodi po } \infty \text{ korakih}\}. \end{aligned}$$

Kaj *točno* je B_∞ in kaj *zares* pomeni intuitivna predstava, da "$B_n \to B_\infty$" ko $n \to \infty$? Ali lahko množico B_∞ izrazimo s pomočjo množic B_n (s predstavami katerih nimamo težav)?

Eksaktna opredelitev množice B_∞ je naslednja:

$$B_\infty = \{\text{kroglice, ki so } \textbf{od nekega koraka dalje vedno} \text{ v posodi}\}.$$

Torej

$$m \in B_\infty \iff \exists n \in \mathbb{N} \ni: m \in B_n \cap B_{n+1} \cap B_{n+2} \cap \ldots$$

To pa pomeni ravno

$$B_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} B_k,$$

oziroma

$$B_\infty = \liminf_{n\to\infty} B_n. \tag{1.1}$$

Opazimo, da velja tudi:

$$\begin{aligned} B_\infty &= \{\text{kroglice, ki ležijo v } \textbf{neskončno mnogo } B_n\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} B_k, \end{aligned}$$

oziroma

$$B_\infty = \limsup_{n\to\infty} B_n. \tag{1.2}$$

Terminologijo lim inf oz. lim sup v kontekstu *množic* razložita naslednji formuli, veljavni za poljubno števno družino $\mathscr{A}_n$ podmnožic neke ambientne množice X:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \mathscr{A}_n &= \left\{ x \in X \,;\, \liminf_{n\to\infty} \chi_{\mathscr{A}_n}(x) = 1 \right\} \\ \limsup_{n\to\infty} \mathscr{A}_n &= \left\{ x \in X \,;\, \limsup_{n\to\infty} \chi_{\mathscr{A}_n}(x) = 1 \right\} \end{aligned}$$

oziroma, simbolično,

$$\chi_{\liminf \mathscr{A}_n} := \liminf \chi_{\mathscr{A}_n}$$
$$\chi_{\limsup \mathscr{A}_n} := \limsup \chi_{\mathscr{A}_n}.$$

Tu je χ_Y oz.

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & ; \quad x \in Y \\ 0 & ; \quad x \notin Y \end{cases}$$

karakteristična funkcija množice Y.

V smislu, da veljata tako enakost (1.1) kot tudi (1.2), sedaj lahko rečemo, da je

$$B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

To je pomembna formula, ker predstavlja izražavo abstraktne (torej težje predstavljive) množice B_∞ z množicami B_n, ki so končne (ter enostavno predstavljive) in s katerimi znamo delati. Na ta način smo - šele sedaj! - jasno opredelili izvorno vprašanje o interpretaciji B_∞.

Definirajmo

$$C_n := \bigcap_{k\geqslant n} B_k.$$

Torej so C_n kroglice (oz. njihovi indeksi), ki so v 2. posodi po vseh korakih od vključno n-tega dalje. Sledi:

- $$B_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$
- $$C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \dots$$

Torej

$$\mu(B_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n),$$

kjer je μ *mera štetja točk* na $\mathbb{N}$.

Opomba 1.2. Spomnimo: σ-*algebra* na množici X je družina $\mathcal{F}$ pomnožic v X, ki:

- med svojimi članicami vsebuje X;
- je zaprta za komplement;
- je zaprta za števne unije.

Funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, ki je števno aditivna, pa se imenuje *mera* na X (oz. na $\mathcal{F}$). Kot model za mero si lahko predstavljamo *dolžino* množice v $\mathbb{R}$, *ploščino* v $\mathbb{R}^2$, volumen v $\mathbb{R}^3$, ali pa *mero štetja točk* na $\mathbb{N}$, ki končnim podmnožicam v $\mathbb{N}$ priredi njihovo *moč* (število elementov), neskončnim pa število ∞.

Sledi: **če** bi vedeli, da je

$$\mu(C_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$

bi najprej sledilo, da je število $\mu(C_n)$ neodvisno od n; še več, končno bi lahko uporabili, da je $\mu(B_k) = k$, in bi dobili $\mu(C_n) = \infty$ ter posledično $\mu(B_\infty) = \infty$. Toda enakost

$$\mu\Big(\bigcap_{k\geqslant n} B_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$

v splošnem *ne* velja! Pravzaprav smo to videli že na začetku besedila, namreč, v primeru, ko na n-tem koraku izberemo n-to kroglico, kar ustreza naslednjemu zaporedju množic B_n:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{2\} \\ B_2 &= \{3,4\} \\ B_3 &= \{4,5,6\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tedaj imamo $\mu(\cap_k B_k) = \mu(\emptyset) = 0$, medtem ko je $\mu(B_k) = k$ in zato $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \infty$. To lahko izrazimo na še en način, oziroma kot primer, da limite ter integrala ne moremo poljubno zamenjevati. Namreč, če $\int$ predstavlja integral po meri štetja točk, tedaj v zgornjem primeru velja

$$\int \lim \chi_{B_n} \neq \lim \int \chi_{B_n}.$$

Videli smo, da so mogoči različni odgovori, in sicer v odvisnosti od načina, kako kroglice izbiramo. Torej nimamo več opravka z determinizmom, pač pa je *ključ* za razumevanje našega problema vpeljava na*ključ*nosti (in posledično še *verjetnosti*). V nadaljevanju bomo pokazali, da ob naključnem izbiranju kroglic na koncu *skoraj gotovo* (torej z verjetnostjo 1) v 2. posodi ne ostane nobena:

Izrek 1.3. $P(\mu(B_\infty) = 0) = 1$.

Dokaz. V trenutku, ko jih izberemo za prenos v 2. posodo, kroglice oštevilčimo. Torej privzamemo, da vanjo zaporedoma mečemo kroglice $K_1, K_2, \ldots$

Definirajmo množice (dogodke!)

$$\begin{aligned} M &= \{\text{po neskončno mnogo korakih ne ostane v 2. posodi nobena kroglica}\} \\ M_n &= \{\text{po neskončno mnogo korakih kroglice } K_n \text{ ni več v 2. posodi}\} \\ A_{n,j} &= \{j \text{ korakov po tem, ko se pojavi v 2. posodi, je kroglica } K_n \text{ še vedno v njej}\}. \end{aligned}$$

Na primer, če K_n prileti v 2. posodo v okviru m-tega koraka, je $A_{n,1}$ dogodek, da v nadaljevanju tega istega (m-tega) koraka kroglice K_n ne potegnemo iz 2. posode, medtem ko je $A_{n,2}$ dogodek, da je ne potegnemo niti v okviru $(m+1)$-tega koraka, itd.

Ker je

$$M = \{B_\infty = \emptyset\} = \{\mu(B_\infty) = 0\},$$

nas zanima ravno verjetnost, da se zgodi dogodek M, torej $P(M)$.

Velja

$$\begin{aligned} M &= \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \qquad (1.3) \\ M_n^c &= \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n,j}, \end{aligned}$$

kjer D^c označuje *komplement* dogodka D, torej "dogodek, da se D *ne* zgodi".

Ker je očitno $A_{n,j} \supseteq A_{n,j+1}$ za vsaka $n, j \in \mathbb{N}$, je

$$P(M_n^c) = \lim_{j\to\infty} P(A_{n,j}). \qquad (1.4)$$

Pri tem smo uporabili naslednji znani izrek iz teorije mere:

Izrek 1.4. *Če je $(X_l)_{l\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje množic v X (torej $X_l \supset X_{l+1}$ za vsak $l \in \mathbb{N}$) in je $\mu(X_1) < \infty$, tedaj je*

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} X_l\right) = \lim_{l\to\infty} \mu(X_l).$$

Na nivoju $A_{n,j}$ pa znamo verjetnost izračunati *elementarno.* In sicer trdimo, da je

$$P(A_{n,j}) = \frac{k}{k+j}\,, \tag{1.5}$$

kjer je

$$k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

in $[x]$ označuje *celi del* števila $x \in \mathbb{R}$, torej tisto celo število N, za katero je $x \in [N, N+1)$.

Vidimo, da kroglico K_n postavimo v 2. posodo na k-tem koraku. V trenutku, ko v okviru tega koraka postavimo v 2. posodo *obe* kroglici iz 1. posode (a še preden potem eno kroglico odvzamemo), imamo v 2. posodi $k+1$ kroglic. Izmed teh ne želimo edinole, da bi v naslednji potezi (ki ustreza $A_{n,1}$) odvzeli K_n, katerokoli izmed preostalih k kroglic pa smemo izbrati oz. odvzeti. Torej je

$$P(A_{n,1}) = \frac{k}{k+1}\,.$$

Induktivno vidimo, da je

$$P(A_{n,j}) = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{k+j-1}{k+j},$$

kar je zaradi krajšanja ravno (1.5). Sedaj iz (1.4) odtod takoj sledi, da je $P(M_n^c) = 0$, oziroma

$$P(M_n) = 1.$$

Posledično je

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{m} M_k\Big) = 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

ter zaradi (1.3) ter Izreka 1.4 končno še

$$P(M) = P\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{m} M_k\Big) = \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=1}^{m} M_k\Big) = 1. \qquad \square$$

Opomba 1.5. Povzemimo bistvo našega pristopa. Problem oz. objekt, ki smo ga obravnavali, smo "razbijali" na manjše koščke, dokler nismo prišli do stopnje, ko smo zmogli obravnavo ($A_{n,j}$). Potem smo izsledke *analize*, ki smo jo izvedli v tej fazi (1.5), prenesli nazaj na začetni nivo. Tako smo iz enega problema sicer ustvarili več problemov, ki pa so bili vsak zase obvladljivi, prav tako pa smo obvladali mehanizme (izražave s preseki in unijami, limitni izreki za mero oz. verjetnost itd.), ki so nam omogočili "sestaviti" analizirane koščke nazaj v celoto.

2. Riemannov sumacijski izrek

Paradoks, s katerim smo se srečali v prvem delu, spodbuja k razmišljanju v več smereh. Za nas bo, neodvisno od samega paradoksa, zanimiva povezava le-tega s *številskimi vrstami.*

V postopku (**RL**) na vsakem koraku izvajamo *seštevanje in odštevanje.* In sicer vsakič dodamo (prištejemo) dve kroglici, potem pa eno odvzamemo (odštejemo). Paradoks torej lahko poskusimo interpretirati v jeziku vrst na naslednji način:

Če je

$$2 - 1 = 1,$$

kako je potem lahko

$$\sum 2 - \sum 1 = 0?$$

Oziroma, zakaj ne moremo preprosto reči, da je

$$\sum 2 - \sum 1 = \sum (2-1) = \infty? \tag{2.1}$$

Hitro uvidimo, v čem je problem: osnovne računske operacije (kot sta seštevanje in odštevanje) znamo izvajati s *končnimi* količinami, kar pa *neskončni* vsoti $\sum 2$ ter $\sum 1$ nista. Drugače rečeno, $\infty - \infty$ je lahko karkoli oz. sploh ni dobro definirano. To nas po seznanitvi s paradoksom (**RL**) ne preseneča, saj smo videli, da lahko z $\sum 2 - \sum 1$ "dosežemo" katerokoli nenegativno celo število ali pa ∞. Tako se že spet soočimo s problemom, ki nam je doslej že dobro znan: kaj točno predstavlja objekt, s katerim želimo delati (torej neskončna številska vrsta ter razlika dveh vrst)?

2.1. Konvergentne številske vrste.

Imejmo nalogo izračunati naslednjo vsoto:

$$3 + 6 - 11 + 17 - 8.$$

Sistematično se naloge lotimo tako, da izračunamo vsoto prvih dveh členov, si zapišemo (vmesni) rezultat, prištejemo naslednji člen, zabeležimo rezultat, itd:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{3+6}_{9} -11}_{-2} +17}_{15} -8}_{7}.$$

Kaj pa, če želimo sešteti *neskončno mnogo* števil? Kot v primeru s posodami iz prvega poglavja najprej razjasnimo, kaj vprašanje sploh pomeni.

Odgovor ponuja zgornji algoritem o seštevanju *končnega* zaporedja števil. Torej, poskusimo postopoma prištevati po en člen in sproti beležiti vsote, kar nam bo dalo številsko zaporedje. Smiselno se zdi zahtevati, da bo vsota vrste obstajala, če se bo tako skonstruirano zaporedje nekje "ustalilo", oziroma, če konvergiralo. S tem vprašanje konvergence *vrst* prevedemo na (že znano) vprašanje konvergence *zaporedij.*

Definicija 2.1. Imejmo zaporedje realnih števil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo pripadajoče *zaporedje delnih vsot* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s predpisom

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Pravimo da *vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.2}$$

konvergira (oz. je konvergentna), če obstaja (v $\mathbb{R}$)

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

V tem primeru število s imenujemo *vsota vrste* (2.2).

Če vrsta ne konvergira, pravimo, da *divergira* (oz. je konvergentna).

Vemo, da je konvergenca realnih zaporedij ekvivalentna *Cauchyjevemu pogoju*: le-ta za zaporedje $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak par $m, n \geqslant n_0$ velja $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Poenostavljeno rečeno: dovolj pozni členi zaporedja so si lahko poljubno blizu. Prednost Cauchyjevega pogoja je v tem, da lahko konvergentnost zaporedja preverimo ne da bi imeli kandidata za limito.

Hitro vidimo: če sta vrsti $\sum a_k$ ter $\sum b_k$ konvergentni, tedaj sta konvergentni tudi vrsti $\sum(a_k \pm b_k)$ in velja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Konvergenca vrst (oz. odsotnost le-te) je torej tisto, kar stoji na poti enakosti (2.1).

2.2. **Absolutna ter pogojna konvergenca.** V tem razdelku osvežimo pojma, ki sta v obravnavi številskih vrst skoraj neizogibna. Definicijo konvergence vrste nadgradimo na dva načina, in sicer tako, da zahtevamo bodisi:

- konvergentnost *absolutnih vrednosti* členov, bodisi
- konvergentnost ne glede na *vrstni red seštevanja.*

Nadaljujemo z vpeljavo ustreznih opredelitev ter terminologije.

Definicija 2.2. Pravimo da vrsta (2.2) *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{2.3}$$

Ta lastnost je močnejša od same konvergence:

Izrek 2.3. *Absolutna konvergenca implicira (običajno) konvergenco.*

Dokaz. Res, naj bo $(S_n)_n$ zaporedje delnih vsot za (2.3) in $(s_n)_n$ zaporedje delnih vsot za (2.2). Tedaj za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$, kjer zaradi simetrije lahko privzamemo, da $m < n$, velja preprosta ocena

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| = S_n - S_m.$$

Torej, če vrsta (2.3) konvergira, tedaj zaporedje $(S_n)_n$ zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato zaradi zgornje ocene tudi zaporedje $(s_n)_n$ zadošča Cauchyjevemu pogoju, to pa spet pomeni, da konvergira (tudi) vrsta (2.2). $\square$

Obrat zgornjega izreka pa ne velja: pokazali bomo (Izrek 2.7), da je *alternirajoča harmonična vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \tag{2.4}$$

konvergentna, toda ne absolutno.

Torej je absolutna konvergenca *strogo* močnejša lastnost od običajne konvergence.

Kasneje bomo videli, da je absolutna konvergentnost številske vrste ekvivalentna temu, da lahko njene člene seštevamo *v poljubnem vrstnem redu*, ne da bi s tem vplivali na rezultat. Kot že večkrat doslej moramo najprej pojasniti, kaj to zares pomeni.

Bijektivni preslikavi $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pravimo *permutacija* (množice naravnih števil).

Definicija 2.4. Pravimo, da vrsta (2.2) *brezpogojno konvergira*, če za vsako permutacijo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}. \tag{2.5}$$

(Pri tem kot običajno zahtevamo, da vsota vrste leži v $\mathbb{R}$, torej izvzamemo $\pm\infty$.)

Očitno brezpogojna konvergenca že v sami definiciji vključuje konvergenco v običajnem smislu. Hkrati bomo – spet na primeru vrste (2.4), glej Izrek 2.7 – videli, da običajna konvergenca še ni dovolj za brezpogojno konvergenco. Zato je smiselno vpeljati naslednjo definicijo.

Definicija 2.5. Pravimo da vrsta (2.2) *pogojno konvergira*, če konvergira v običajnem smislu, toda ne brezpogojno.

Izrek 2.6. *Naj bo vrsta* (2.2) *absolutno konvergentna. Tedaj je za vsako permutacijo* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tudi vrsta* (2.5) *absolutno konvergentna in ima isto vsoto.*

Dokaz. Naj bo (2.2) absolutno konvergentna vrsta in $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutacija. Označimo s s_n delne vsote vrste $\sum |a_n|$ ter s S_n delne vsote vrste $\sum |a_{\pi(n)}|$. Zaradi absolutne konvergence vrste (2.2) obstaja tak $K > 0$, da je $s_n < K$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Posledično je tudi $S_n < K$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je

$$S_n \leqslant s_{\max\{\pi(1),\dots,\pi(n)\}}.$$

Ker je hkrati zaporedje $(S_n)_n$ naraščajoče, ima limito, ki jo označimo s S. To pomeni, da je vrsta $\sum a_{\pi(n)}$ absolutno konvergentna. Videli smo že, da to pomeni, da je tudi v običajnem smislu konvergentna.

Označimo z V njeno vsoto, v pa naj bo vsota vrste $\sum a_n$. Trdimo, da sta vsoti enaki. Naj bodo V_n ter v_n pripadajoče delne vsote. Tedaj je $V-v = (V-V_n)+(V_n-v_n)+(v_n-v)$ in zato

$$|V - v| \leqslant |V - V_n| + |v - v_n| + |V_n - v_n|. \tag{2.6}$$

Vzemimo $\varepsilon > 0$. Ker $V_n \to V$ in $v_n \to v$, za dovolj pozne $n \in \mathbb{N}$ velja $|V - V_n| < \varepsilon$ ter $|v - v_n| < \varepsilon$. Zaradi absolutne konvergence vrste $\sum a_k$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, za katerega je

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Naj bo sedaj n tak, da je

$$\pi(\{1, 2, \dots, n\}) \supset \{1, 2, \dots, N-1\}. \tag{2.8}$$

V posebnem je seveda $n \geqslant N-1$. Pišimo $A = \{1, \dots, n\}$ ter $B = \pi(A) = \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$. Tedaj je

$$v_n - V_n = \sum_{k\in A} a_k - \sum_{l\in A} a_{\pi(l)} = \sum_{k\in A} a_k - \sum_{k\in B} a_k = \sum_{k\in A\setminus B} a_k - \sum_{k\in B\setminus A} a_k$$

in zato

$$|v_n - V_n| \leqslant \sum_{k \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)} |a_k|.$$

Toda po (2.8) je $\{1, \ldots, N-1\} \subset A \cap B$, zato je $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subset \{N, N+1, \ldots\}$ in posledično z upoštevanjem (2.7) dobimo

$$|V_n - v_n| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Sedaj (2.6) implicira oceno $|V - v| < 3\varepsilon$. Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, sledi $V = v$. □

Izreka 2.6 ter 2.3 skupaj povesta, da absolutna konvergenca implicira brezpogojno in da je vsota vrste neodvisna od vrstnega reda seštevanja. V razdelku 2.5 bomo dokazali, da velja tudi obrat. Natančneje: če je vrsta konvergentna, a ne absolutno, potem je pogojno konvergentna. (Posledično sta brezpogojna ter absolutna konvergenca realnih vrst eno in isto.) Pravzaprav bomo dokazali veliko močnejši rezultat (Izrek 2.8): če vrsta konvergira, a ne absolutno, tedaj ne le da lahko s primernim rearanžiranjem vrstnega reda seštevanja v vsoti dosežemo *dve* različni realni stevili, pač pa lahko dosežemo *vsako* realno število (ali celo dobimo divergentno vrsto).

2.3. **Pogojna konvergentnost alternirajoče harmonične vrste.** Konvergenca vrste (2.4) sledi iz Leibnizovega kriterija, saj gre za alternirajočo vrsto (to pomeni, da so členi vrste izmenično pozitivna oz. negativna števila, torej predznaki členov *alternirajo*), katere členi po absolutni vrednosti monotono padajo proti nič. Lahko celo izračunamo njeno vsoto. Namreč, vemo (ali pa preverimo s pomočjo Taylorjeve formule), da za $x < 1$ velja

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Če vstavimo $x = -1$, sledi, da je vsota vrste (2.4) enaka $\log 2$.

Poskusimo člene vrste sešteti še v naslednjem vrstnem redu:

$$+ \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; - \; -$$

(torej prvi pozitivni člen, nato prva dva negativna, pa spet naslednji pozitivni, potem naslednja dva negativna itd.). Dobimo

$$\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{1/2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{1/6} - \frac{1}{8}\Big) + \Big(\underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{1/10} - \frac{1}{12}\Big) + \ldots,$$

kar je enako

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\Big),$$

oziroma *polovici* alternirajoče harmonične vrste!

2.4. **Divergentnost harmonične vrste.** Spomnimo, da vrsti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

pravimo *harmonična vrsta*. Vrsta *ni* konvergentna, saj zaporedje njenih delnih vsot ne ustreza Cauchyjevemu pogoju. Namreč, za delne vsote

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

velja ocena

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &\geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ sumandov}}. \end{aligned}$$

Torej

$$s_{2n} - s_n \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

zato Cauchyjev pogoj za zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne more biti izpolnjen. S tem smo že dokazali, da vrsta (2.4) ni absolutno konvergentna.

Lahko naredimo tudi oceno s pomočjo integrala, ki pokaže več, in sicer, da s_n raste logaritemsko, torej $s_n \sim \log n$ v smislu dvostranskih ocen. Namreč,

$$\log(n+1) = \log x \Big|_1^{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ta račun lahko minimalno modificiramo in dobimo še *zgornjo* oceno za delne vsote:

$$\log n = \log x \Big|_1^{n} = \int_1^{n} \frac{dx}{x} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1.$$

Oba računa skupaj združimo v oceno

$$\log(n+1) \leqslant s_n \leqslant \log n + 1.$$

Odštejemo $\log n$, upoštevamo pravilo za izračun razlike logaritmov in dobimo

$$\log(1 + 1/n) \leqslant s_n - \log n \leqslant 1.$$

V posebnem je $s_n - \log n \in (0, 1]$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje $(s_n - \log n)_{n\in\mathbb{N}}$ pa ni le, kot smo ravnokar videli, omejeno, pač pa se izkaže, da je celo konvergentno. Označimo z γ njegovo limito. Torej

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Velja $\gamma \approx 0\text{˙}5772$. Konstanti γ pravimo *Euler–Mascheronijeva konstanta*. Čeprav gre za eno klasičnih konstant v matematiki, ki se je prvič pojavila v Eulerjevih spisih pred skoraj 300 leti, je veliko njenih lastnosti še vedno neznanih. Npr. zaenkrat še ni dokazano niti to, ali je γ res iracionalno število.

Izsledke razdelkov 2.4 in 2.3 povzamemo v naslednjem izreku.

Izrek 2.7. *Vrsta* (2.4)*:*

(a) konvergira;
(b) ne konvergira absolutno;
(c) ne konvergira brezpogojno.

Torej pri vrsti (2.4) njena vsota *je* odvisna od vrstnega reda seštevanja. Za konec pokažimo, da je to tipična lastnost vrst, ki so konvergentne, a ne absolutno.

2.5. **Riemannov sumacijski izrek.** Prispeli smo do glavnega cilja tega poglavja.

Izrek 2.8 (Riemann)**.** *Če je vrsta* (2.2) *konvergentna, toda ne absolutno, tedaj za vsak* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *obstaja permutacija* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, za katero je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = x.$$

Prav tako obstaja permutacija σ*, za katero vrsta ima*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

vsoto $+\infty$ *ali* $-\infty$*. Obstaja tudi permutacija, za katero vrsta nima nobene vsote (niti* $\pm\infty$*).*

Dokaz. Začnimo s primerom $\boxed{x \in \mathbb{R}}$. Pokažimo, da lahko s primernim rearanžiranjem členov a_k dosežemo, da se ti členi seštejejo ravno v x.

Iz zaporedja $a = (a_k)_k$ izluščimo zaporedji b, c, ki ju sestavljajo samo pozitivni oz. samo negativni členi zaporedja a. Torej:

$$\begin{aligned} b_k &:= k\text{-ti } \textit{pozitivni} \text{ (ali ničelni) člen v zaporedju } a_1, a_2, a_3, \ldots \\ c_k &:= k\text{-ti } \textit{negativni} \text{ člen v zaporedju } a_1, a_2, a_3, \ldots \end{aligned}$$

Grafično lahko konstrukcijo zaporedij b, c predstavimo takole:

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & & b_3 & & & \\ + & + & & + & & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & \ldots \\ & & - & & - & - & \\ & & c_1 & & c_2 & c_3 & \end{array}$$

Ker vrsta $\sum a_k$ ni absolutno konvergentna, hkrati pa je konvergentna, sledi, da sta zaporedji $(b_k)_k$ ter $(c_k)_k$ divergentni.

Definiramo indeks m_1 z zahtevo, da je

$$\underbrace{\overbrace{b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_1-1}}^{\leqslant x} + b_{m_1}}_{>x}.$$

Obstoj indeksa m_1 sledi iz divergence vsote $\sum b_k$.

Zdaj definiramo še n_1:

$$\underbrace{\overbrace{(b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_1}) + (c_1 + \ldots + c_{n_1-1}}^{\geqslant x} + c_{n_1})}_{<x}.$$

Obstoj indeksa n_1 sledi iz divergence vsote $\sum c_k$. Induktivno definiramo indekse $m_2, m_3, \ldots$ ter $n_2, n_3, \ldots$

Bistvena ugotovitev pri tej konstrukciji je, da razdaljo od x do *vsake* temu vrstnemu redu seštevanja pripadajoče delne vsote lahko ocenimo z $\leqslant |b_{m_k}|$ oz. $\leqslant |c_{n_l}|$, kar gre proti 0, saj zaradi konvergentnosti vrste $\sum a_k$ sledi $a_k \to 0$ za $k \to \infty$.

Zdaj poglejmo primer $\boxed{x = \infty}$. Indekse m_j tokrat definiramo tako, da bo

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_j} > |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_j| + j.$$

Sedaj člene vrste seštevamo v naslednjem vrstnem redu:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_1} + c_1 + b_{m_1+1} + b_{m_1+2} + \ldots + b_{m_2} + c_2 + \ldots$$

Iz konstrukcije je jasno, da so od trenutka, ko se pojavi c_k, vse kasnejše delne vsote te vrste večje od k. To velja za vsak $k \in \mathbb{N}$, zato seštevajoč v tem vrstnem redu kot rezultat dobimo $+\infty$.

Na povsem analogen način bi prišli do vsote $-\infty$.

Ostane še primer, ko $\boxed{\text{vrsta nima vsote}}$. Indekse m_j, n_j tokrat induktivno definiramo tako, da bo

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_j} &> 1 \\ (b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_j}) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n_j}) &< 0. \end{aligned}$$

Sedaj člene vrste seštevamo v naslednjem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} &(b_1 + b_2 + \ldots + b_{m_1}) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n_1}) \\ &\quad + (b_{m_1+1} + b_{m_1+2} + \ldots + b_{m_2}) + (c_{n_1+1} + c_{n_1+2} + \ldots + c_{n_2}) + \ldots \end{aligned}$$

Iz konstrukcije je jasno, da v tem vrstnem redu vrsta ne bo konvergirala nikamor (niti k $+\infty$ ali $-\infty$). □

Kot enostavno posledico imamo:

Posledica 2.9. *Vrsta* (2.2) *je absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je brezpogojno konvergentna.*

Vidimo tudi, da lahko pojem brezpogojne konvergence dopolnimo tako, da v Definiciji 2.4 dodamo naslednje:

Vrsta (2.2) *brezpogojno konvergira*, če za vsako permutacijo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergira vrsta (2.5) <u>in je njena vsota neodvisna od izbire π</u>.

Literatura

[1] H. Heuser: *Unendlichkeiten: Nachrichten aus dem Grand Canyon des Geistes*, Teubner Verlag, 2008.

[2] E. Maor: *To Infinity and Beyond*, Birkhäuser, 1987.

[3] R. Rucker: *Infinity and the Mind*, Princeton University Press, 2005.

[4] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, 1987.

Oliver Dragičević, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Jadranska 21, SI-1000 Ljubljana, Slovenia

E-mail address: oliver.dragicevic@fmf.uni-lj.si