Uporabne krivulje

Marjeta Knez

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Seminar za učitelje matematike

Ljubljana, 31. januar 2020

Potek predavanj

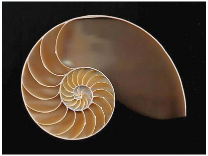
- Uvod
- Parametrično podane krivulje
- Bézierjeve krivulje
- Zlepki

1. Uvod

Uvod: Kje srečamo krivulje?

Zanimanje za krivulje sega v davno zgodovino, še preden so bile obravnavane matematično. Srečamo jih v likovni umetnosti, v naravi ...



Uvod: matematičen opis krivulj

Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Uvod: matematičen opis krivulj

Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Kako matematično opisati povsem splošne krivulje?

Uvod: matematičen opis krivulj

Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Kako matematično opisati povsem splošne krivulje?

$\Longrightarrow$ **Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (CAGD)**

Uvod: matematičen opis krivulj

Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Kako matematično opisati povsem splošne krivulje?

$\Longrightarrow$ **Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (CAGD)**

- V poznih 50. letih se je z razvojem tehnologije in računalnikov pojavila potreba po čimbolj natančnem in enostavnem prenosu oblik in idej od oblikovalcev do proizvodnje.
- Glavni pobudniki: avtomobilska, letalska, ladijska industrija.

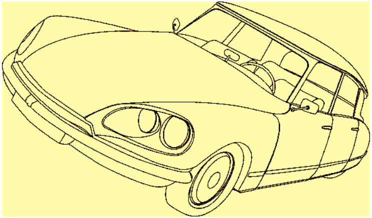
Uvod: matematičen opis krivulj

Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Kako matematično opisati povsem splošne krivulje?

$\Longrightarrow$ **Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (CAGD)**

- V poznih 50. letih se je z razvojem tehnologije in računalnikov pojavila potreba po čimbolj natančnem in enostavnem prenosu oblik in idej od oblikovalcev do proizvodnje.
- Glavni pobudniki: avtomobilska, letalska, ladijska industrija.



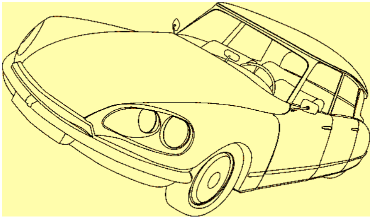
Uvod: matematičen opis krivulj

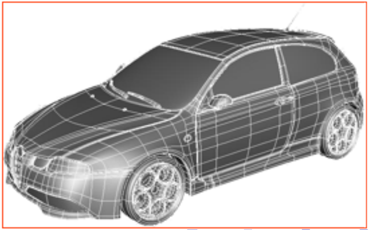
Grafično je krivulje enostavno kreirati.

Kako matematično opisati povsem splošne krivulje?

$\Longrightarrow$ **Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (CAGD)**

- V poznih 50. letih se je z razvojem tehnologije in računalnikov pojavila potreba po čimbolj natančnem in enostavnem prenosu oblik in idej od oblikovalcev do proizvodnje.
- Glavni pobudniki: avtomobilska, letalska, ladijska industrija.





Uvod: CAGD, CAD, CAM

- **CAGD - Computer Aided Geometric Design**

  Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje je znanstveno področje, ki se ukvarja z matematičnimi/numeričnimi metodami za opis različnih geometrijskih oblik za uporabo v računalniški grafiki, numerični aproksimaciji, robotiki, pri vizualizaciji podatkov, itd.

Uvod: CAGD, CAD, CAM

- **CAGD - Computer Aided Geometric Design**

  Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje je znanstveno področje, ki se ukvarja z matematičnimi/numeričnimi metodami za opis različnih geometrijskih oblik za uporabo v računalniški grafiki, numerični aproksimaciji, robotiki, pri vizualizaciji podatkov, itd.

- **CAD - Computer Aided Design**

  Računalniško podprto načrtovanje. Programska oprema CAD se uporablja za načrtovanje oz. dizajniranje ter za izdelavo podatkovnih baz potrebnih za proizvodnjo.

Uvod: CAGD, CAD, CAM

- **CAGD - Computer Aided Geometric Design**

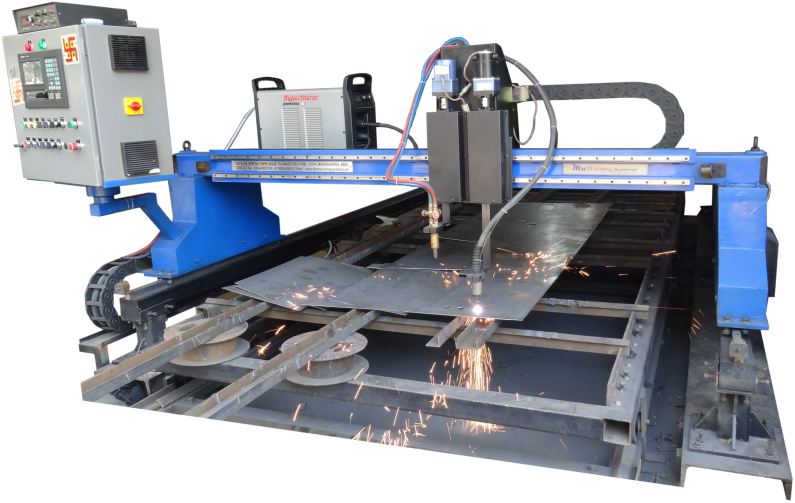
  Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje je znanstveno področje, ki se ukvarja z matematičnimi/numeričnimi metodami za opis različnih geometrijskih oblik za uporabo v računalniški grafiki, numerični aproksimaciji, robotiki, pri vizualizaciji podatkov, itd.

- **CAD - Computer Aided Design**

  Računalniško podprto načrtovanje. Programska oprema CAD se uporablja za načrtovanje oz. dizajniranje ter za izdelavo podatkovnih baz potrebnih za proizvodnjo.

- **CAM - Computer Aided Manufacturing**

  Računalniško podprta proizvodnja je uporaba računalnikov za nadzor proizvodnega procesa, posebej za nadzor strojev, orodij in robotov v tovarnah. CAM sistemi producirajo datoteke z ustreznimi zaporedji ukazov za vodenje CNC strojev.


Hypertherm
Mass Cutting Systems

Uvod: zgodovina CAGD

- Osnovni objekti v CAGD so parametrično podane krivulje in ploskve.
- **Paul de Casteljau** (1930) in **Pierre Bézier** (1910-1999)

Uvod: zgodovina CAGD

- Osnovni objekti v CAGD so parametrično podane krivulje in ploskve.
- **Paul de Casteljau** (1930) in **Pierre Bézier** (1910-1999)

Uvod: zgodovina CAGD

- Osnovni objekti v CAGD so parametrično podane krivulje in ploskve.
- **Paul de Casteljau** (1930) in **Pierre Bézier** (1910-1999)

2. Parametrično podane krivulje

Kaj je krivulja?

Krivulja je množica točk, ki jo lahko podamo na tri načine:

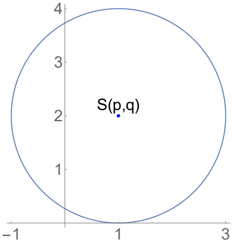
- implicitno
- eksplicitno
- parametrično

Kaj je krivulja?

Krivulja je množica točk, ki jo lahko podamo na tri načine:

- implicitno
- eksplicitno
- parametrično

krožnica:

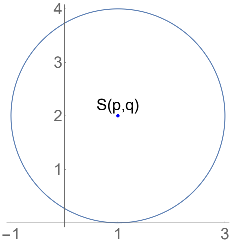


Kaj je krivulja?

Krivulja je množica točk, ki jo lahko podamo na tri načine:

- implicitno
- eksplicitno
- parametrično

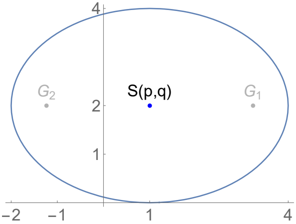
krožnica:



$$\text{krožnica} = \left\{(x, y);\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\right\}$$

Implicitno podane ravninske krivulje

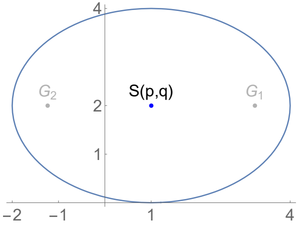
elipsa:



$$\left\{(x,y);\ \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1\right\}$$

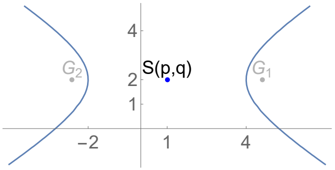
Implicitno podane ravninske krivulje

elipsa:



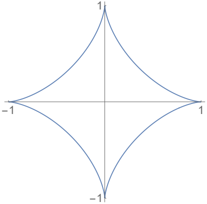
$$\left\{(x,y);\ \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1\right\}$$

hiperbola:

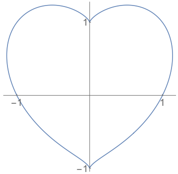


$$\left\{(x,y);\ \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1\right\}$$

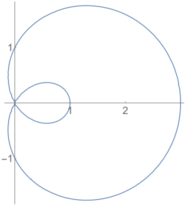
Še nekaj primerov...



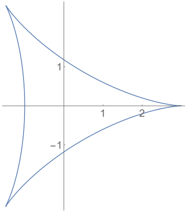
$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



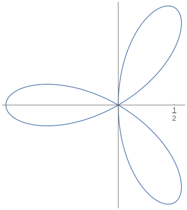
$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$



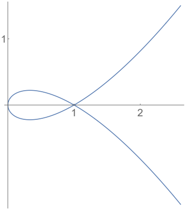
$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$



$(x^2+y^2+12x+9)^2 = 4(2x+3)^3$



$(x^2+y^2)(x^2+y^2+x) = 4xy^2$



$3y^2 = x(x-1)^2$

Eksplicitno podane krivulje: graf funkcije

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Graf funkcije je krivulja

$$\mathrm{graf} = \{(x, y);\ y = f(x),\ x \in [a, b]\}$$

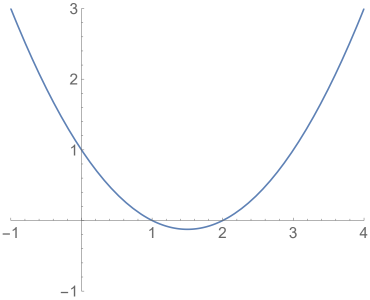
Eksplicitno podane krivulje: graf funkcije

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Graf funkcije je krivulja

$$\mathrm{graf} = \{(x, y);\ y = f(x),\ x \in [a, b]\}$$

Primer:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$



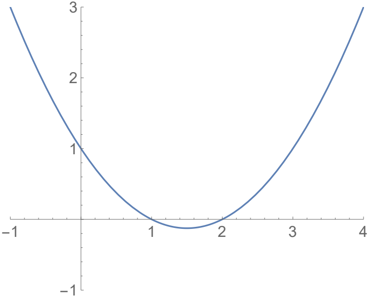
Eksplicitno podane krivulje: graf funkcije

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Graf funkcije je krivulja

$$\mathrm{graf} = \{(x, y);\ y = f(x),\ x \in [a, b]\}$$

Primer:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$



$$\mathrm{graf} = \{(x, f(x));\ x \in [-1, 4]\}$$

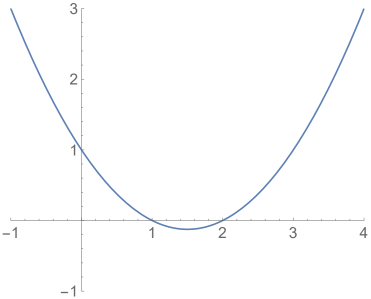
Eksplicitno podane krivulje: graf funkcije

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Graf funkcije je krivulja

$$\mathrm{graf} = \{(x, y);\ y = f(x),\ x \in [a, b]\}$$

Primer:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$



$$\mathrm{graf} = \{(t, f(t));\ t \in [-1, 4]\}$$

Parametrično podane krivulje

Izberemo dve funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Parametrično podana krivulja:

$$\{(x, y);\ \ x = f(t),\ y = g(t),\ t \in [a, b]\}.$$

Parametrično podane krivulje

Izberemo dve funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Parametrično podana krivulja:

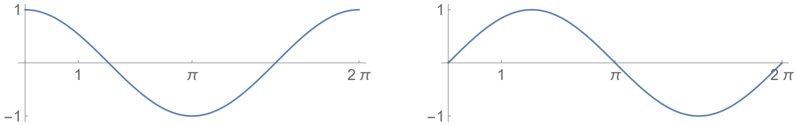
$$\big\{(x, y);\ \ x = f(t),\ y = g(t),\ t \in [a, b]\big\}.$$

$\boldsymbol{p} = (f, g)$ imenujemo parametrizacija krivulje,

$$\text{krivulja} = \{\boldsymbol{p}(t);\ t \in [a, b]\}$$

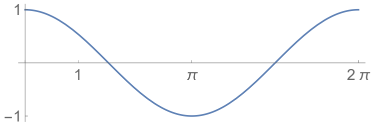
Primer

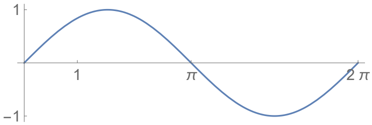
Izberemo funkciji $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:



Primer

Izberemo funkciji $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:

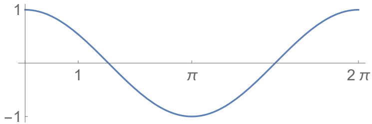


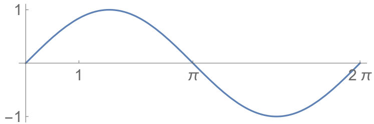


Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, je?

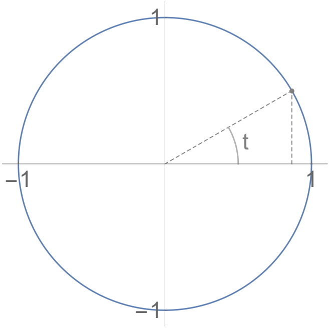
Primer

Izberemo funkciji $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:



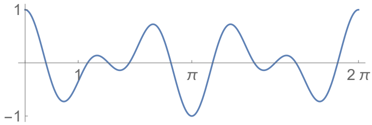


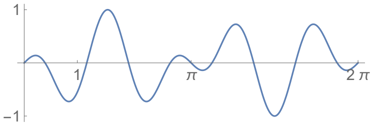
Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, je?



Primer

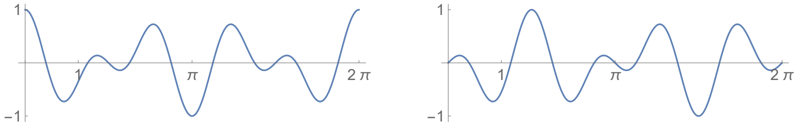
Izberemo funkciji $f(t) = \cos(4t)\cos(t)$, $g(t) = \cos(4t)\sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:





Primer

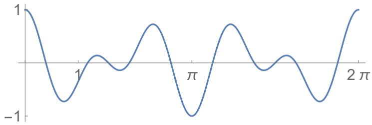
Izberemo funkciji $f(t) = \cos(4t)\cos(t)$, $g(t) = \cos(4t)\sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:

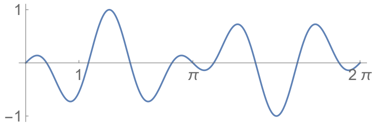


Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t))$:

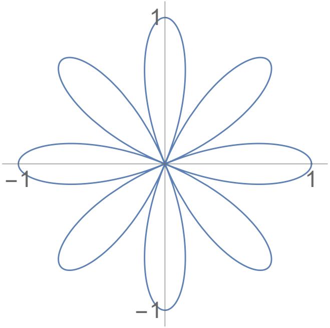
Primer

Izberemo funkciji $f(t) = \cos(4t)\cos(t)$, $g(t) = \cos(4t)\sin(t)$ na $[0, 2\pi]$:



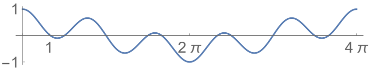


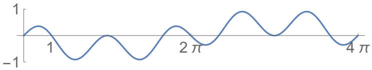
Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t))$:



Primer

Izberemo funkciji $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\cos(t)$, $g(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin(t)$ na $[0, 4\pi]$:





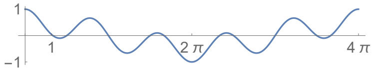
Primer

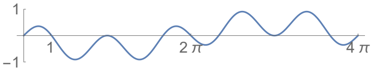
Izberemo funkciji $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\cos(t)$, $g(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin(t)$ na $[0, 4\pi]$:

Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t))$:

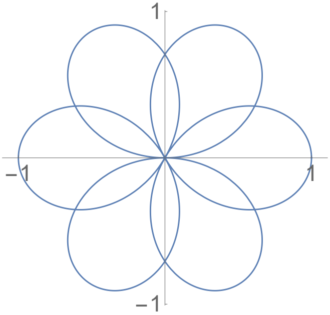
Primer

Izberemo funkciji $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\cos(t)$, $g(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin(t)$ na $[0, 4\pi]$:





Krivulja, ki jo določa parametrizacija $\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t))$:



Polinomske parametrične krivulje

Primer: $f(t) = 1 + 12t^2 - 10t^3, \quad g(t) = 1 + 3t - 3t^2 - t^3, \quad t \in [0, 1]$

Polinomske parametrične krivulje

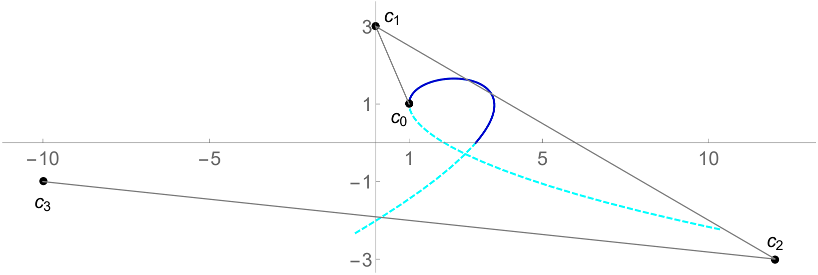
Primer: $f(t) = 1 + 12t^2 - 10t^3, \quad g(t) = 1 + 3t - 3t^2 - t^3, \quad t \in [0,1]$

$$\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t)) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0} + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3$$

Polinomske parametrične krivulje

Primer: $f(t) = 1 + 12t^2 - 10t^3, \quad g(t) = 1 + 3t - 3t^2 - t^3, \quad t \in [0,1]$

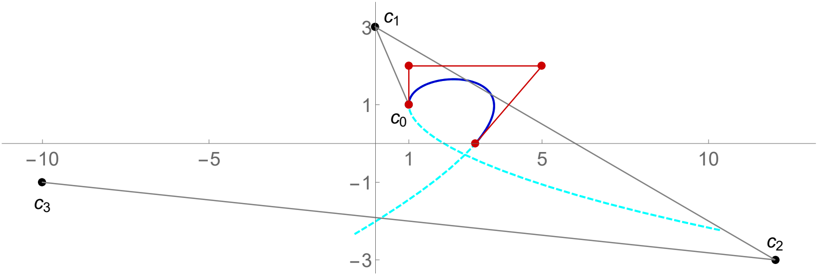
$$\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t)) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0} + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3$$



Polinomske parametrične krivulje

Primer: $f(t) = 1 + 12t^2 - 10t^3, \quad g(t) = 1 + 3t - 3t^2 - t^3, \quad t \in [0, 1]$

$$\boldsymbol{p}(t) = (f(t), g(t)) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0} + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3$$



3. Bézierjeve krivulje

Bézierjeve krivulje

- Bézierjeve krivulje = polinomske parametrične krivulje
- $\mathbb{P}_n$ = prostor polinomov stopnje $\leq n$

Bézierjeve krivulje

- Bézierjeve krivulje = polinomske parametrične krivulje
- $\mathbb{P}_n$ = prostor polinomov stopnje $\leq n$
- Namesto standardne baze $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ bomo uporabili druge 'bazne' polinome.

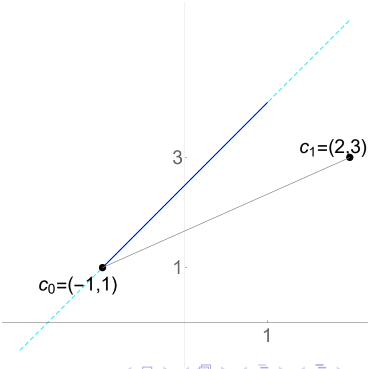
Bézierjeve krivulje

- Bézierjeve krivulje = polinomske parametrične krivulje
- $\mathbb{P}_n$ = prostor polinomov stopnje $\leq n$
- Namesto standardne baze $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ bomo uporabili druge 'bazne' polinome.

Primer $n = 1$:

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{c}_0 1 + \boldsymbol{c}_1 t,$$

$$t \in [0, 1]$$



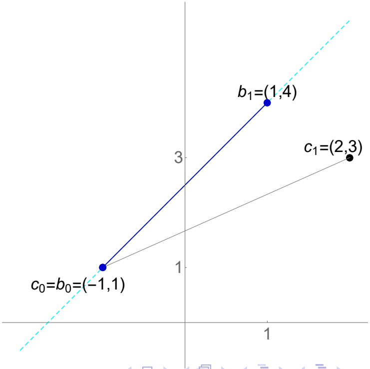
Bézierjeve krivulje

- Bézierjeve krivulje = polinomske parametrične krivulje
- $\mathbb{P}_n$ = prostor polinomov stopnje $\leq n$
- Namesto standardne baze $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ bomo uporabili druge 'bazne' polinome.

Primer $n = 1$**:**

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t,$$

$$t \in [0, 1]$$



Linearna Bernsteinova bazna polinoma

- Naj bo
$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t, \quad t = [0,1].$$
Pri izbranem parametru t točka $\boldsymbol{p}(t)$ razdeli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1-t$.

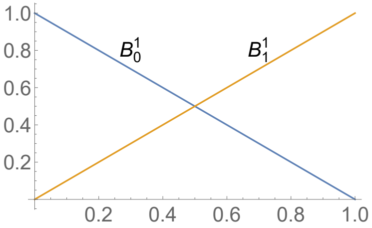
Linearna Bernsteinova bazna polinoma

- Naj bo
$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t, \quad t = [0,1].$$
Pri izbranem parametru t točka $\boldsymbol{p}(t)$ razdeli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1-t$.

Definiramo

$$B_0^1(t) = 1-t,$$
$$B_1^1(t) = t.$$

Imenujemo ju **Bernsteinova bazna polinoma** stopnje 1.



Linearna Bernsteinova bazna polinoma

- Naj bo

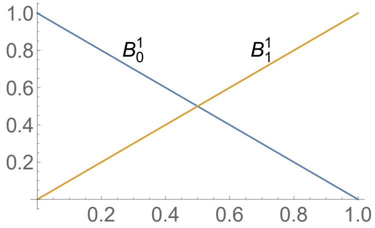
$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t, \quad t = [0,1].$$

Pri izbranem parametru t točka $\boldsymbol{p}(t)$ razdeli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1-t$.

Definiramo

$$B_0^1(t) = 1-t,$$
$$B_1^1(t) = t.$$

Imenujemo ju **Bernsteinova bazna polinoma** stopnje 1.



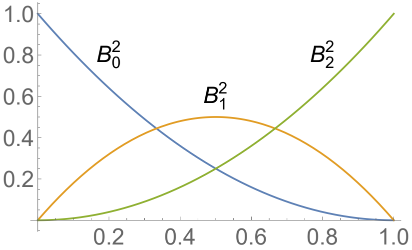
- Velja:

$$\mathbb{P}_1 = \mathrm{Lin}\left\{B_0^1, B_1^1\right\}.$$

Kvadratični Bernsteinovi bazni polinomi

Definiramo:

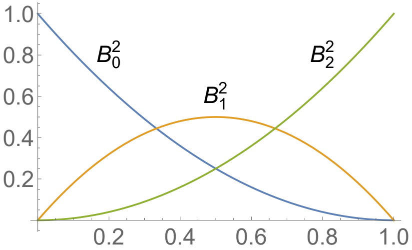
$$B_0^2(t) = (1-t)^2,$$
$$B_1^2(t) = 2t(1-t),$$
$$B_2^2(t) = t^2.$$



Kvadratični Bernsteinovi bazni polinomi

Definiramo:

$$B_0^2(t) = (1-t)^2,$$
$$B_1^2(t) = 2t(1-t),$$
$$B_2^2(t) = t^2.$$

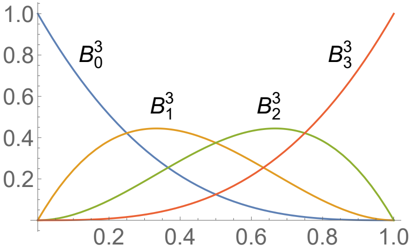


$$1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t)$$
$$t = \frac{1}{2}B_1^2(t) + B_2^2(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}_2 = \mathrm{Lin}\left\{B_0^2, B_1^2, B_2^2\right\}$$
$$t^2 = B_2^2(t)$$

Kubični Bernsteinovi bazni polinomi

Definiramo:

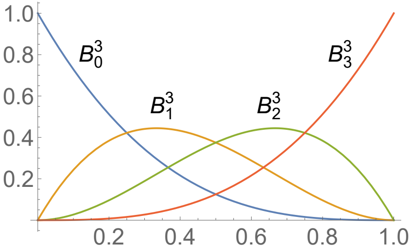
$$B_0^3(t) = (1-t)^3,$$
$$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2,$$
$$B_2^3(t) = 3t^2(1-t),$$
$$B_3^3(t) = t^3.$$



Kubični Bernsteinovi bazni polinomi

Definiramo:

$$
\begin{aligned}
B_0^3(t) &= (1-t)^3,\\
B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2,\\
B_2^3(t) &= 3t^2(1-t),\\
B_3^3(t) &= t^3.
\end{aligned}
$$

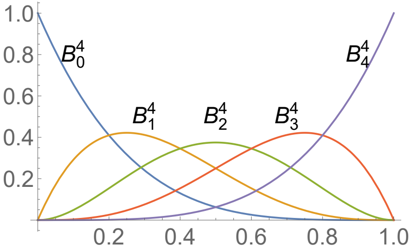


$$
\begin{aligned}
1 &= B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)\\
t &= \frac{1}{3}B_1^3(t) + \frac{2}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)\\
t^2 &= \frac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)\\
t^3 &= B_3^3(t)
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}_3 = \mathrm{Lin}\left\{B_0^3, B_1^3, B_2^3, B_3^3\right\}
$$

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje 4

Definiramo:

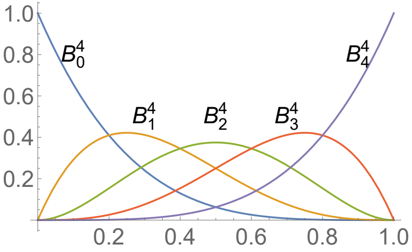
$$
\begin{aligned}
B_0^4(t) &= (1-t)^4, \\
B_1^4(t) &= 4t(1-t)^3, \\
B_2^4(t) &= 6t^2(1-t)^2, \\
B_3^4(t) &= 4t^3(1-t), \\
B_4^4(t) &= t^4.
\end{aligned}
$$



Bernsteinovi bazni polinomi stopnje 4

Definiramo:

$$B_0^4(t) = (1-t)^4,$$
$$B_1^4(t) = 4t(1-t)^3,$$
$$B_2^4(t) = 6t^2(1-t)^2,$$
$$B_3^4(t) = 4t^3(1-t),$$
$$B_4^4(t) = t^4.$$



$$1 = B_0^4(t) + B_1^4(t) + B_2^4(t) + B_3^4(t) + B_4^4(t)$$
$$t = \frac{1}{4}B_1^4(t) + \frac{1}{2}B_2^4(t) + \frac{3}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)$$
$$t^2 = \frac{1}{6}B_2^4(t) + \frac{1}{2}B_3^4(t) + B_4^4(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}_4 = \mathrm{Lin}\left\{B_0^4, \dots, B_4^4\right\}$$
$$t^3 = \frac{1}{4}B_3^4(t) + B_4^4(t)$$
$$t^4 = B_4^4(t)$$

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n

Definiramo:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n

Definiramo:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lastnosti:

- $B_i^n(t) \geq 0$ za $t \in [0, 1]$

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n

Definiramo:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lastnosti:

- $B_i^n(t) \geq 0$ za $t \in [0, 1]$
- $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n

Definiramo:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Lastnosti:

- $B_i^n(t) \geq 0$ za $t \in [0, 1]$
- $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- $\mathbb{P}_n = \mathrm{Lin}\{B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n\}$.

Bézierjeva krivulja

Definicija

Naj bodo $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ dane točke v $\mathbb{R}^d$. Parametrično podana krivulja $\{\boldsymbol{p}(t); t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^d$,

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0 B_0^n(t) + \boldsymbol{b}_1 B_1^n(t) + \boldsymbol{b}_2 B_2^n(t) + \cdots + \boldsymbol{b}_n B_n^n(t),$$

se imenuje Bézierjeva krivulja.

Točke $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ imenujemo kontrolne točke.

Če jih povežemo z daljicami, dobimo kontrolni poligon.

Primer od prej:

$$\boldsymbol{p}(t) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0}1 + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3, \quad t \in [0,1]$$

Primer od prej:

$$\boldsymbol{p}(t) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0}1 + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3, \quad t \in [0,1]$$

Zapišemo v bazi Bernsteinovih baznih polinomov:

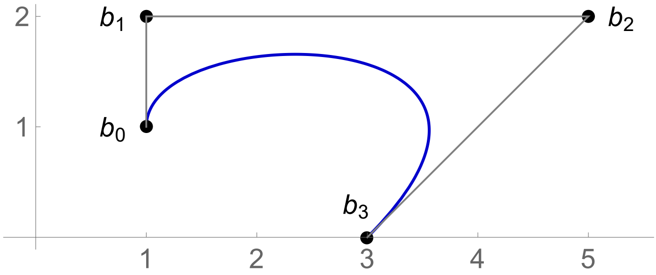
$$\boldsymbol{p}(t) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{b}_0} B_0^3(t) + \underbrace{(1,2)}_{\boldsymbol{b}_1} B_1^3(t) + \underbrace{(5,2)}_{\boldsymbol{b}_2} B_2^3(t) + \underbrace{(3,0)}_{\boldsymbol{b}_3} B_3^3(t)$$

Primer od prej:

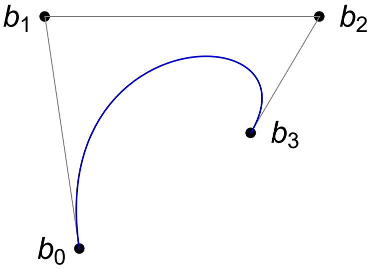
$$\boldsymbol{p}(t) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{c}_0}1 + \underbrace{(0,3)}_{\boldsymbol{c}_1}t + \underbrace{(12,-3)}_{\boldsymbol{c}_2}t^2 + \underbrace{(-10,-1)}_{\boldsymbol{c}_3}t^3, \quad t \in [0,1]$$

Zapišemo v bazi Bernsteinovih baznih polinomov:

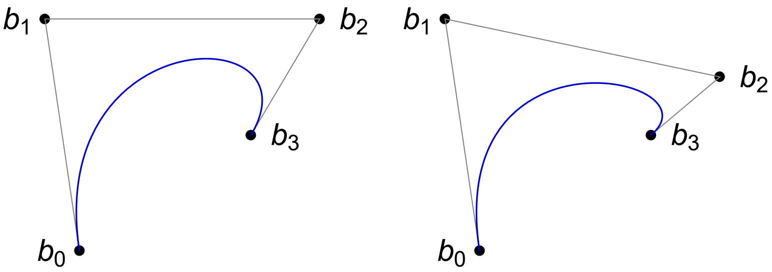
$$\boldsymbol{p}(t) = \underbrace{(1,1)}_{\boldsymbol{b}_0} B_0^3(t) + \underbrace{(1,2)}_{\boldsymbol{b}_1} B_1^3(t) + \underbrace{(5,2)}_{\boldsymbol{b}_2} B_2^3(t) + \underbrace{(3,0)}_{\boldsymbol{b}_3} B_3^3(t)$$



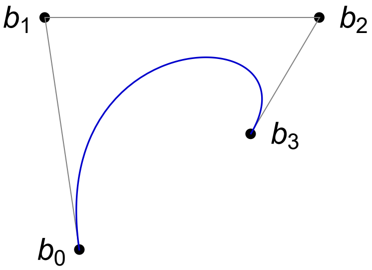
Kontrolne točke določajo obliko krivulje:

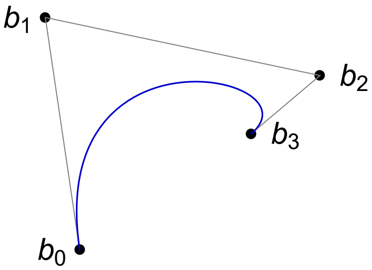


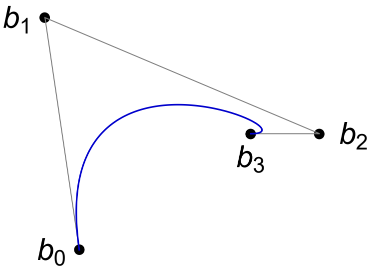
Kontrolne točke določajo obliko krivulje:



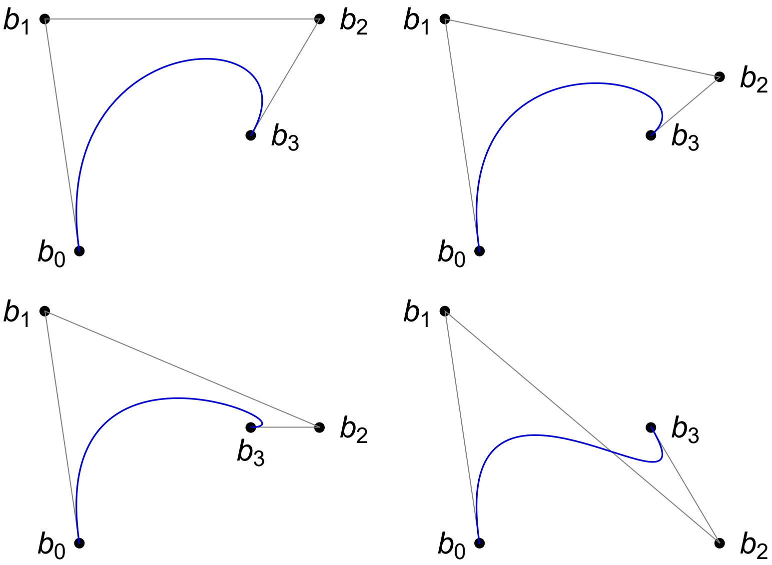
Kontrolne točke določajo obliko krivulje:





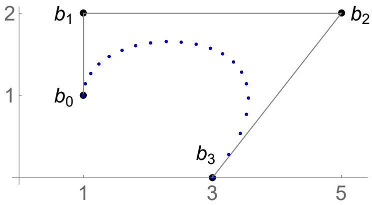


Kontrolne točke določajo obliko krivulje:

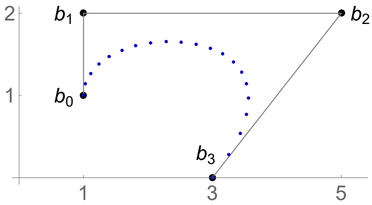


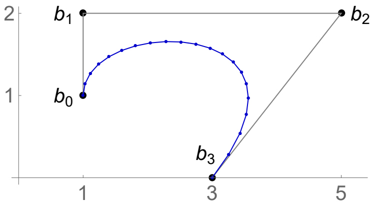
Izris krivulje

Izris krivulje

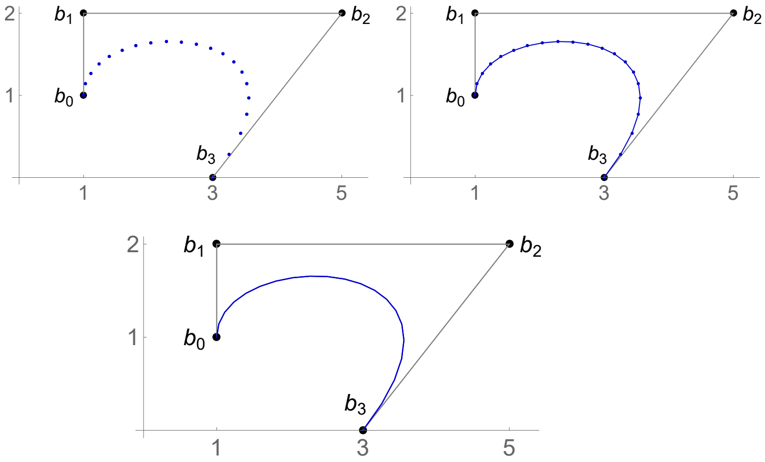


Izris krivulje

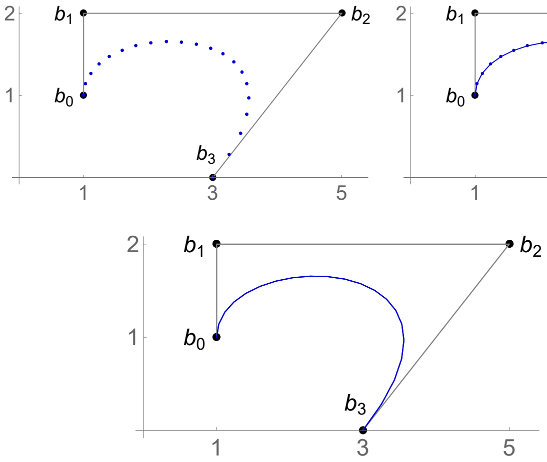




Izris krivulje



Izris krivulje



Kako izračunati točko na Bézierjevi krivulji za izbran parameter $t \in [0, 1]$?

4. de Casteljaujev algoritem

de Casteljaujev algoritem

Naj bo

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1].$$

de Casteljaujev algoritem

Naj bo

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

$\underline{n = 1:}$ $\quad \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1 - t) + \boldsymbol{b}_1 t.$

Točka $\boldsymbol{p}(t)$ deli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1 - t$

de Casteljaujev algoritem

Naj bo

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1].$$

$\underline{n = 1:}$ $\quad \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t.$

Točka $\boldsymbol{p}(t)$ deli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1 - t$

$\underline{n = 2:}$ $\quad \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{b}_1 2t(1-t) + \boldsymbol{b}_2 t^2$

de Casteljaujev algoritem

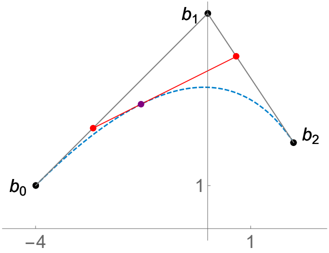
Naj bo

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1].$$

$\underline{n = 1:}$ $\quad \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t) + \boldsymbol{b}_1 t.$

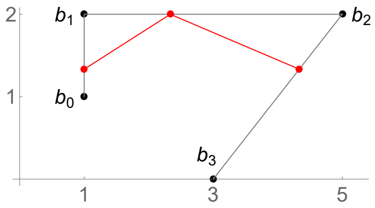
Točka $\boldsymbol{p}(t)$ deli daljico med $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_1$ v razmerju $t : 1 - t$

$\underline{n = 2:}$ $\quad \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{b}_1 2t(1-t) + \boldsymbol{b}_2 t^2$



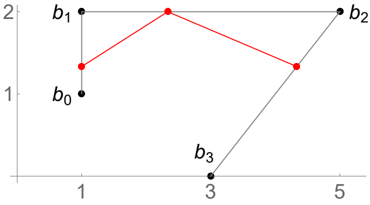
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

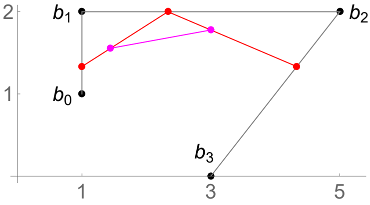
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{3}$:



de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

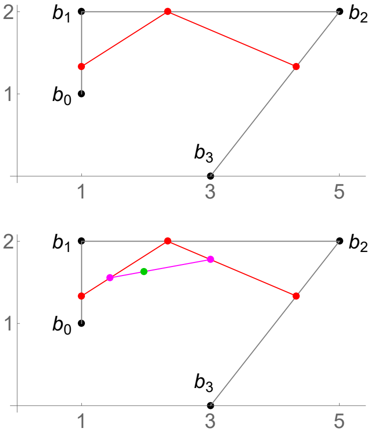
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{3}$:





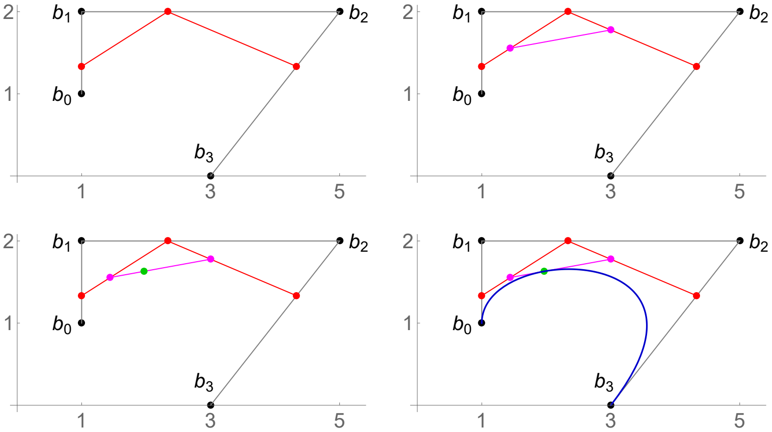
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{3}$:



de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

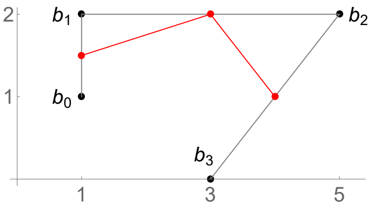
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{3}$:



Daljice delimo v razmerju $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$

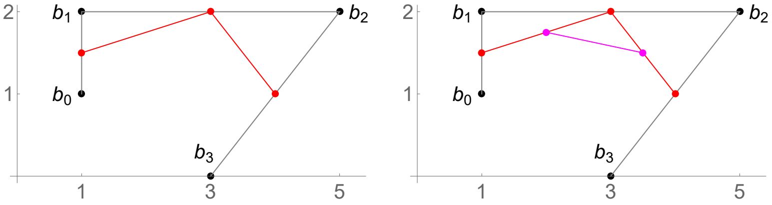
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{2}$:



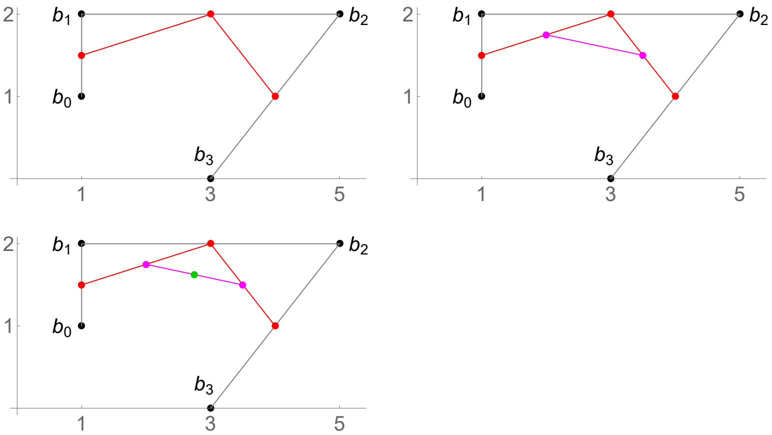
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{2}$:



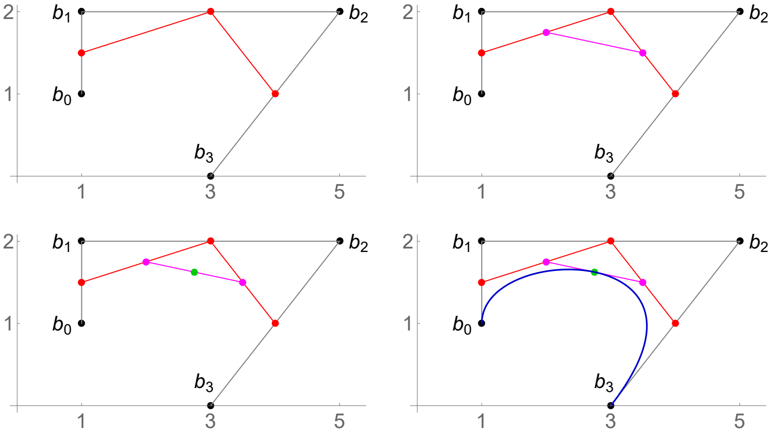
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{2}$:



de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

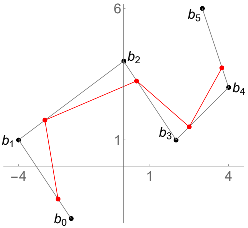
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{2}$:



Daljice delimo v razmerju $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

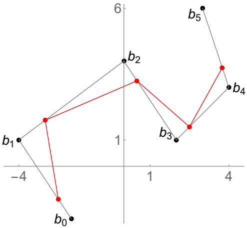
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

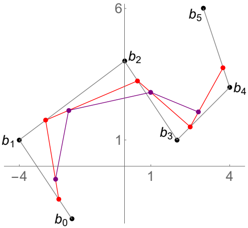
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

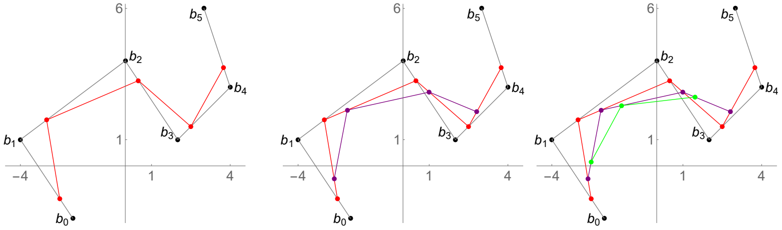
Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:





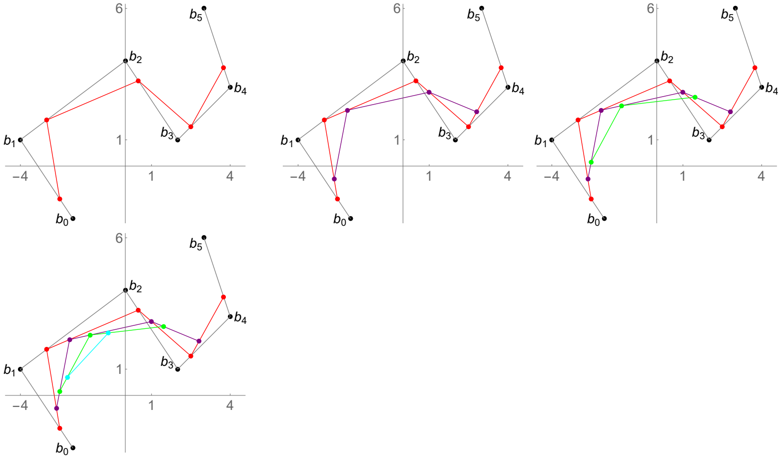
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



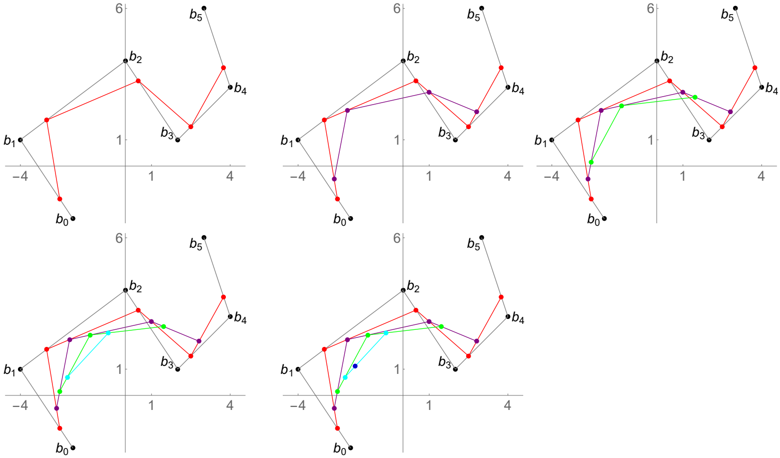
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



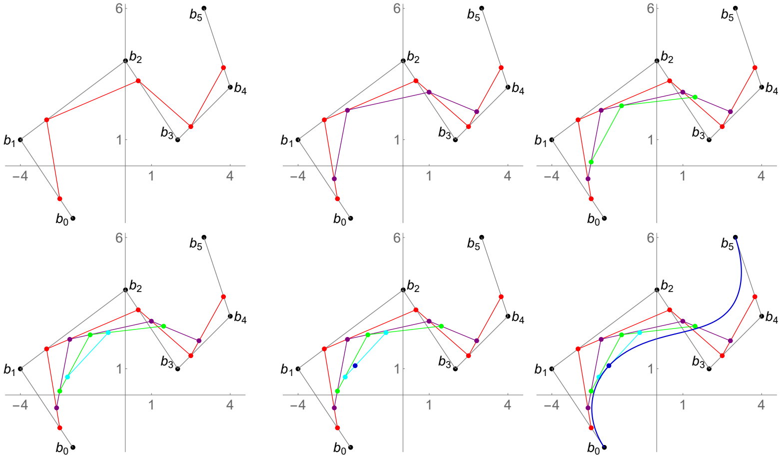
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



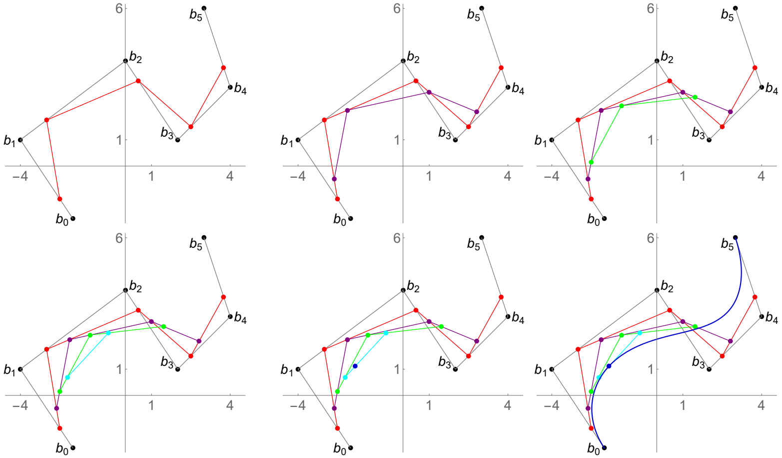
de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



de Casteljaujev algoritem - geometrijsko

Izračun točke na krivulji pri parametru $t = \frac{1}{4}$:



Daljice delimo v razmerju $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$

Algoritem: de Casteljau

`Vhodni podatki:` kontrolne točke $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$
parameter t

`for` $i = 0, 1, \ldots, n$

  $\boldsymbol{b}_i^0 = \boldsymbol{b}_i$

`end for`

`for` $r = 1, \ldots, n$

  `for` $i = 0, \ldots, n - r$

    $\boldsymbol{b}_i^r = (1 - t)\boldsymbol{b}_i^{r-1} + t\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}$

  `end for`

`end for`

`Izhod:` $\boldsymbol{b}_0^n$

Odvod Bézierjeve krivulje

Odvod Bézierjeve krivulje

Odvod Bézierjeve krivulje:

$$\boldsymbol{p}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{b}_{i+1} - \boldsymbol{b}_i) B_i^{n-1}(t).$$

Odvod Bézierjeve krivulje v krajiščih:

$$\boldsymbol{p}'(0) = n(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \quad \boldsymbol{p}'(1) = n(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1}).$$

Odvod Bézierjeve krivulje

Odvod Bézierjeve krivulje:

$$\boldsymbol{p}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{b}_{i+1} - \boldsymbol{b}_i) B_i^{n-1}(t).$$

Odvod Bézierjeve krivulje v krajiščih:

$$\boldsymbol{p}'(0) = n(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \quad \boldsymbol{p}'(1) = n(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1}).$$

Odvod Bézierjeve krivulje pri parametru t lahko izračunamo iz de Casteljaujeve sheme:

$$\boldsymbol{p}'(t) = n \left(\boldsymbol{b}_1^{n-1}(t) - \boldsymbol{b}_0^{n-1}(t) \right).$$

Reparametrizirana Bézierjeva krivulja

Reparametrizirana Bézierjeva krivulja:

$$\boldsymbol{q}(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n \left(\frac{u-a}{b-a} \right), \quad u \in [a, b].$$

Reparametrizirana Bézierjeva krivulja

Reparametrizirana Bézierjeva krivulja:

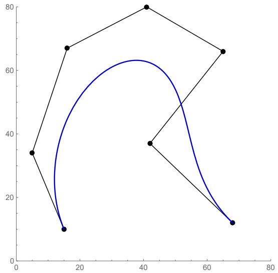
$$\boldsymbol{q}(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right), \quad u \in [a, b].$$

Odvod reparametrizirane Bézierjeve krivulje v krajiščih:

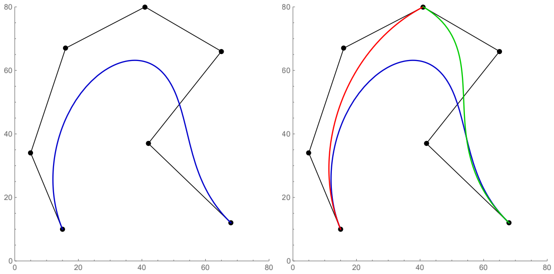
$$\boldsymbol{q}'(a) = \frac{n}{b-a}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \quad \boldsymbol{q}'(b) = \frac{n}{b-a}(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1}).$$

5. Sestavljene Bézierjeve krivulje - zlepki

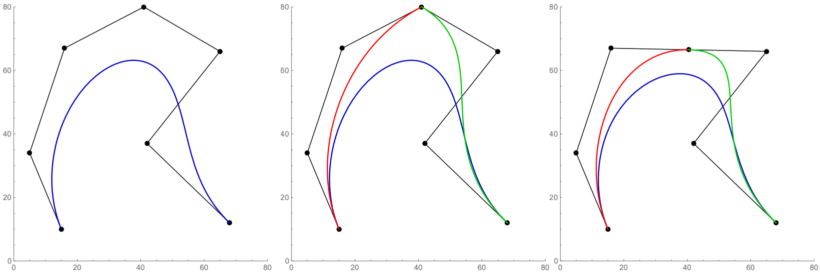
Sestavljene Bézierjeve krivulje



Sestavljene Bézierjeve krivulje



Sestavljene Bézierjeve krivulje



Sestavljene Bézierjeve krivulje

Interval parametrov $[a, b]$ razdelimo na m delov:

$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{m-1} < t_m = b.$$

Sestavljene Bézierjeve krivulje

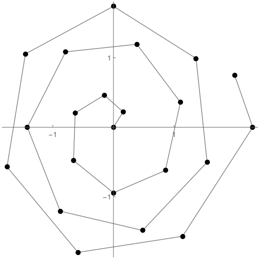
Interval parametrov $[a, b]$ razdelimo na m delov:

$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{m-1} < t_m = b.$$

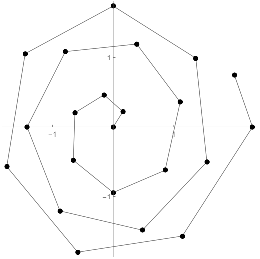
Zlepek iz Bézierjevih krivulj stopnje n je podan s parametrizacijo $\boldsymbol{s} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$,

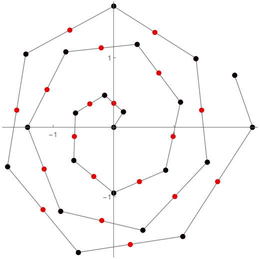
$$\boldsymbol{s}(u) = \begin{cases} \boldsymbol{p}_1(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c}_i^{(1)} B_i^n \left(\frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right), & u \in [a, u_1) \\ \boldsymbol{p}_2(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c}_i^{(2)} B_i^n \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right), & u \in [u_1, u_2) \\ \vdots & \\ \boldsymbol{p}_m(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c}_i^{(m)} B_i^n \left(\frac{u - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}} \right), & u \in [u_{m-1}, u_m] \end{cases}$$

C^1 kvadratični zlepek

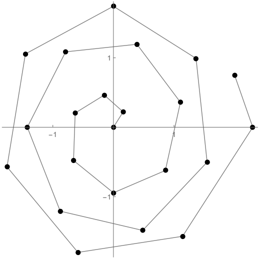


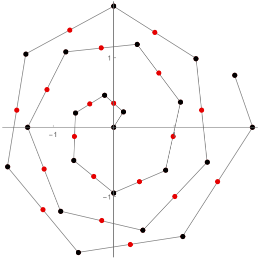
C^1 kvadratični zlepek

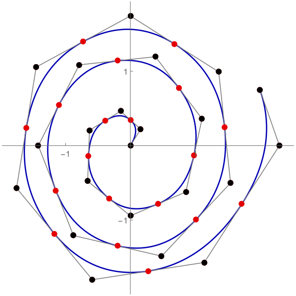




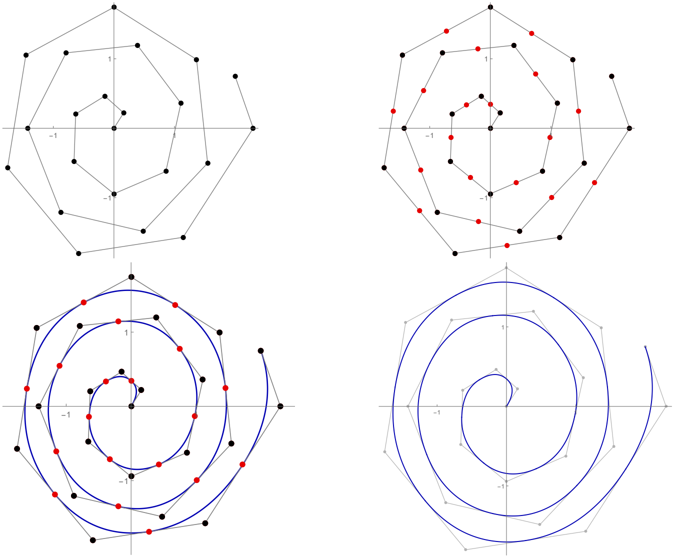
C^1 kvadratični zlepek



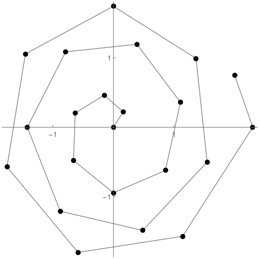




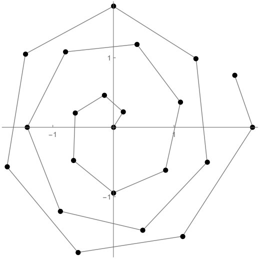
C^1 kvadratični zlepek

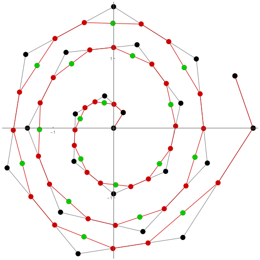


C^2 kubični zlepek

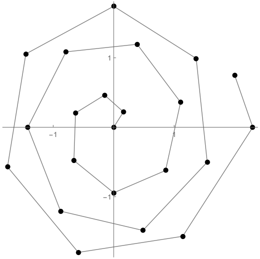


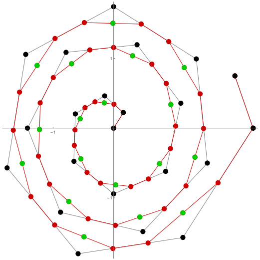
C^2 kubični zlepek

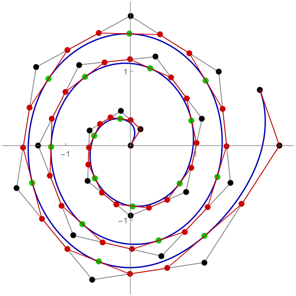




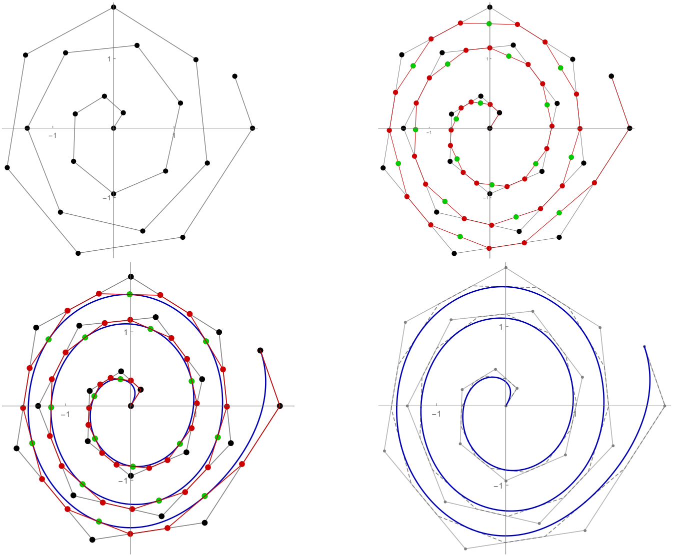
C^2 kubični zlepek

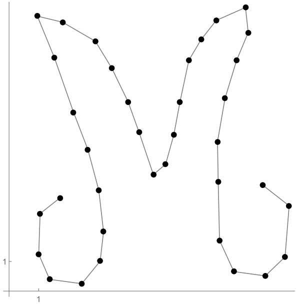


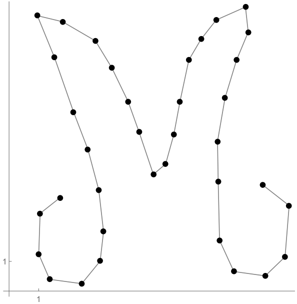


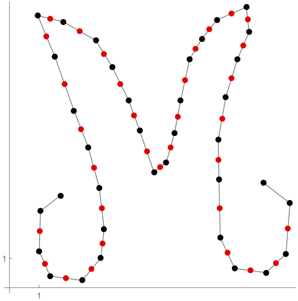


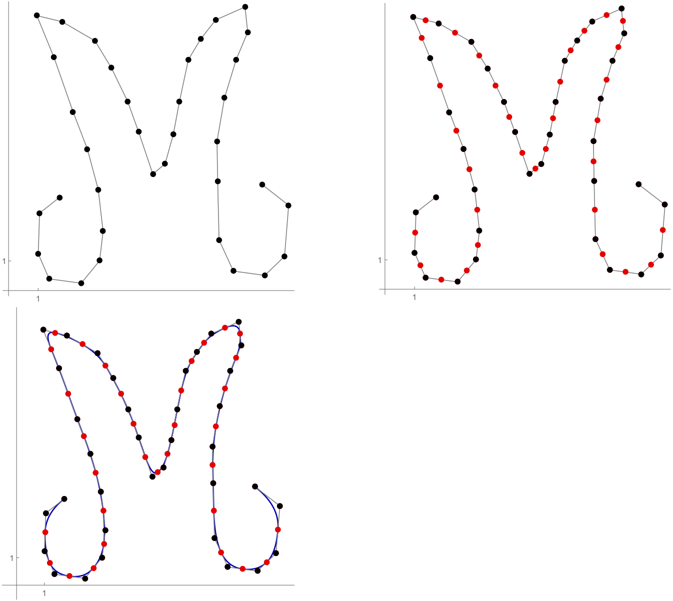
C^2 kubični zlepek

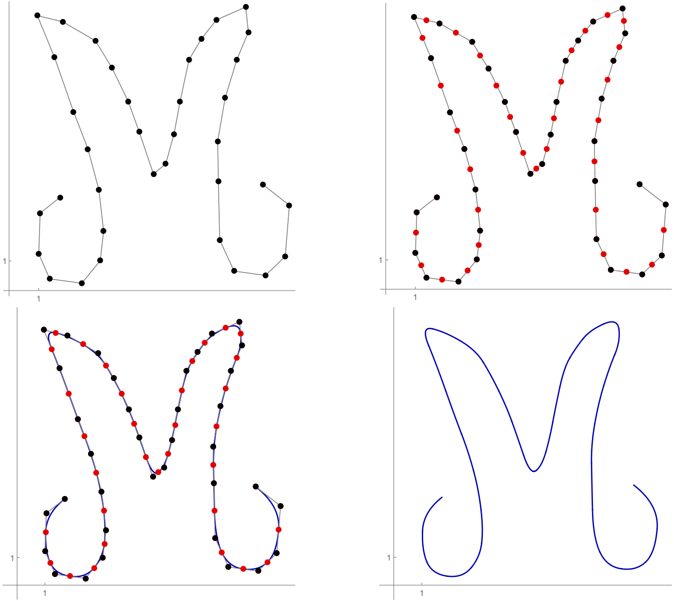



1
1


1
1


1
1


1
1
1
1
1
1


1
1
1
1
1
1
1
1

Hvala za pozornost!