Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja in nekatere znane enakosti

Marko Kandić

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

marko.kandic@fmf.uni-lj.si

5. junij 2021

- Uvodni primeri

- Uvodni primeri

- Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja

- Uvodni primeri
- Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja
- Nekatere znane enakosti

- Uvodni primeri
- Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja
- Nekatere znane enakosti
- Rezultati o deljivosti Fibonaccijevih števil

Problem stopnišča

Problem stopnišča

Naj bo n naravno število. Na vhodu v hišo je natanko n stopnic. Zanima nas, na koliko načinov lahko pridemo do vhodnih vrat, če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici.

Problem stopnišča

Naj bo n naravno število. Na vhodu v hišo je natanko n stopnic. Zanima nas, na koliko načinov lahko pridemo do vhodnih vrat, če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici.

Naj bo a_n število načinov, na katere lahko pridemo do vhodnih vrat.

Problem stopnišča

Naj bo n naravno število. Na vhodu v hišo je natanko n stopnic. Zanima nas, na koliko načinov lahko pridemo do vhodnih vrat, če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici.

Naj bo a_n število načinov, na katere lahko pridemo do vhodnih vrat.

Problem

Določi število a_n za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Problem stopnišča

Naj bo n naravno število. Na vhodu v hišo je natanko n stopnic. Zanima nas, na koliko načinov lahko pridemo do vhodnih vrat, če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici.

Naj bo a_n število načinov, na katere lahko pridemo do vhodnih vrat.

Problem

Določi število a_n za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Trditev

Velja $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in

Problem stopnišča

Naj bo n naravno število. Na vhodu v hišo je natanko n stopnic. Zanima nas, na koliko načinov lahko pridemo do vhodnih vrat, če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici.

Naj bo a_n število načinov, na katere lahko pridemo do vhodnih vrat.

Problem

Določi število a_n za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Trditev

Velja $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{za } n \geq 3.$$

Vpeljava Fibonaccijevega zaporedja

Definicija

Zaporedje $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podano z rekurzivno zvezo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n \geq 3$ in z začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, je *Fibonaccijevo zaporedje*.

Vpeljava Fibonaccijevega zaporedja

Definicija

Zaporedje $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podano z rekurzivno zvezo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n \geq 3$ in z začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, je *Fibonaccijevo zaporedje*.

V zgornjem zgledu je $a_n = F_{n+1}$.

Vpeljava Fibonaccijevega zaporedja

Definicija

Zaporedje $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podano z rekurzivno zvezo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n \geq 3$ in z začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, je *Fibonaccijevo zaporedje*.

V zgornjem zgledu je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Tvorimo besede dolžine n, sestavljene le iz znakov 0 in 1, pri čemer ne smeta zaporedoma nastopati dve enici. Naj bo a_n število vseh možnih besed dolžine n.

Vpeljava Fibonaccijevega zaporedja

Definicija

Zaporedje $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podano z rekurzivno zvezo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n \geq 3$ in z začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, je *Fibonaccijevo zaporedje*.

V zgornjem zgledu je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Tvorimo besede dolžine n, sestavljene le iz znakov 0 in 1, pri čemer ne smeta zaporedoma nastopati dve enici. Naj bo a_n število vseh možnih besed dolžine n. Ker se vsaka beseda začne z bodisi 0 bodisi 1, a_n zadošča rekurzivni zvezi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Ker je $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$, je $a_n = F_{n+2}$.

Primer

Šahovnico velikosti $2 \times n$ želimo pokriti z dominami velikosti 1×2. Naj bo a_n število možnih pokritij.

Primer

Šahovnico velikosti $2 \times n$ želimo pokriti z dominami velikosti 1×2. Naj bo a_n število možnih pokritij. Ker lahko polje $(1,1)$ pokrijemo z vodoravno ali navpično domino, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Šahovnico velikosti $2 \times n$ želimo pokriti z dominami velikosti 1×2. Naj bo a_n število možnih pokritij. Ker lahko polje $(1, 1)$ pokrijemo z vodoravno ali navpično domino, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Poiščimo število vseh podmnožic množice $A_n = \{1, \ldots, n\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih števil. Naj bo a_n število vseh ustreznih podmnožic.

Primer

Šahovnico velikosti $2 \times n$ želimo pokriti z dominami velikosti 1×2. Naj bo a_n število možnih pokritij. Ker lahko polje $(1,1)$ pokrijemo z vodoravno ali navpično domino, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Poiščimo število vseh podmnožic množice $A_n = \{1, \ldots, n\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih števil. Naj bo a_n število vseh ustreznih podmnožic. Ker vsaka množica bodisi vsebuje n bodisi ga ne vsebuje, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$, je $a_n = F_{n+2}$.

Primer

Šahovnico velikosti $2 \times n$ želimo pokriti z dominami velikosti 1×2. Naj bo a_n število možnih pokritij. Ker lahko polje $(1,1)$ pokrijemo z vodoravno ali navpično domino, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, je $a_n = F_{n+1}$.

Primer

Poiščimo število vseh podmnožic množice $A_n = \{1, \ldots, n\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih števil. Naj bo a_n število vseh ustreznih podmnožic. Ker vsaka množica bodisi vsebuje n bodisi ga ne vsebuje, za $n \geq 3$ velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$, je $a_n = F_{n+2}$.

Zgornje probleme rešimo tako, da izračunamo F_n za dani $n \in \mathbb{N}$.

Zgled

Če v rekurzivno zvezo vstavimo $n = 3$, dobimo $F_3 = F_1 + F_2 = 2$. Na podoben način lahko izračunamo $F_4 = F_2 + F_3 = 3$.

Zgled

Če v rekurzivno zvezo vstavimo $n = 3$, dobimo $F_3 = F_1 + F_2 = 2$. Na podoben način lahko izračunamo $F_4 = F_2 + F_3 = 3$.
S ponavljanjem zgornjega računa za $n = 5, \dots, 12$ izračunamo še člene $F_5, \dots, F_{12}$.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Zgled

Če v rekurzivno zvezo vstavimo $n = 3$, dobimo $F_3 = F_1 + F_2 = 2$. Na podoben način lahko izračunamo $F_4 = F_2 + F_3 = 3$.
S ponavljanjem zgornjega računa za $n = 5, \ldots, 12$ izračunamo še člene $F_5, \ldots, F_{12}$.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Zgled

V stanovanjskem objektu je med zaporednima nadstropjema 16 stopnic. Če se na vsakem koraku lahko povzpnemo za eno ali dve stopnici, lahko med zaporednima nadstropjema pridemo na $a_{16} = F_{17} = 1597$ načinov.

Uganka

Matematik Aleš je kolegi matematiku Gregorju zastavil naslednjo uganko. V stanovanjskem bloku, kjer živim, je med vsakima nadstropjema 16 stopnic. Na vsakem koraku se povzpnem za eno ali dve stopnici. Število vseh možnosti, da pridem od vhoda v blok do svojega stanovanja je med 10^9 in 10^{12}. Na katerem nadstropju živim?

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.
- Na zgoraj opisani način se lahko povzpne na $a_{16m} = F_{16m+1}$ načinov.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.
- Na zgoraj opisani način se lahko povzpne na $a_{16m} = F_{16m+1}$ načinov.
- Rešujemo neenačbo $10^9 \leq F_{16m+1} \leq 10^{12}$.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.
- Na zgoraj opisani način se lahko povzpne na $a_{16m} = F_{16m+1}$ načinov.
- Rešujemo neenačbo $10^9 \leq F_{16m+1} \leq 10^{12}$.
- S programom Mathematica izračunamo $m = 3$.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.
- Na zgoraj opisani način se lahko povzpne na $a_{16m} = F_{16m+1}$ načinov.
- Rešujemo neenačbo $10^9 \leq F_{16m+1} \leq 10^{12}$.
- S programom Mathematica izračunamo $m = 3$.
- **Zanimivost:** Sistem neenačb $10^9 \leq a_n \leq 10^{12}$ ima za rešitev množico $\{44, \ldots, 58\}$.

Rešitev uganke

- Naj Aleš živi na m-tem nadstropju.
- Do svojih vrat ima $16m$ stopnic.
- Na zgoraj opisani način se lahko povzpne na $a_{16m} = F_{16m+1}$ načinov.
- Rešujemo neenačbo $10^9 \leq F_{16m+1} \leq 10^{12}$.
- S programom Mathematica izračunamo $m = 3$.
- **Zanimivost:** Sistem neenačb $10^9 \leq a_n \leq 10^{12}$ ima za rešitev množico $\{44, \ldots, 58\}$.

Vprašanje

Kako določimo F_n brez zaporedne uporabe rekurzivne zveze?

Trditev

Splošni člen F_n Fibonaccijevega zaporedja je enak

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Trditev

Splošni člen F_n Fibonaccijevega zaporedja je enak

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Trditev lahko dokažemo z zelo dolgočasno indukcijo ali z reševanjem rekurzivne enačbe.

Trditev

Splošni člen F_n Fibonaccijevega zaporedja je enak

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Trditev lahko dokažemo z zelo dolgočasno indukcijo ali z reševanjem rekurzivne enačbe.

Ocena splošnega člena

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\left| F_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n \right| < \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

Vrnitev k uganki

Za velike n je torej $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$.

Vrnitev k uganki

Za velike n je torej $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$. Nastavimo neenačbi

$$10^9 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{16m+1} \leq 10^{12}$$

Vrnitev k uganki

Za velike n je torej $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$. Nastavimo neenačbi

$$10^9 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{16m+1} \leq 10^{12}$$

in približno izračunamo

$$44.737 \leq 16m + 1 \leq 59.0919,$$

kar je ekvivalentno $m = 3$.

Fibonaccijeva matrika

Z linearno algebro določimo splošni člen Fibonaccijevega zaporedja.

Fibonaccijeva matrika

Z linearno algebro določimo splošni člen Fibonaccijevega zaporedja. Vpeljimo $F_0 = 0$ in **Fibonaccijevo matriko**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fibonaccijeva matrika

Z linearno algebro določimo splošni člen Fibonaccijevega zaporedja. Vpeljimo $F_0 = 0$ in **Fibonaccijevo matriko**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če zaporedoma izračunamo nekaj potenc matrike A, dobimo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

Fibonaccijeva matrika

Z linearno algebro določimo splošni člen Fibonaccijevega zaporedja. Vpeljimo $F_0 = 0$ in **Fibonaccijevo matriko**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če zaporedoma izračunamo nekaj potenc matrike A, dobimo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

kar zelo spominja na zaporedne člene Fibonaccijevega zaporedja $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

Trditev

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Trditev

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Potrebno je izračunati matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Trditev

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Potrebno je izračunati matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Matrično potenco izračunamo z diagonalizacijo matrike A.

Trditev

Za vsako naravno število n velja

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Trditev

Za vsako naravno število n velja

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dokaz

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \star & \star \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \star \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Cassinijeva enakost

Za vsako naravno število n velja

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Cassinijeva enakost

Za vsako naravno število n velja

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Dokaz

Pomagali si bomo z enakostjo

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Cassinijeva enakost

Za vsako naravno število n velja

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Dokaz

Pomagali si bomo z enakostjo

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ker za poljubni kvadratni matriki C in D iste velikosti velja $\det(CD) = \det C \det D$, iz zgornje zveze dobimo

$$(-1)^n = (\det A)^n = \det A^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Iz zadnje enakosti takoj dobimo iskano zvezo.

Izrek

Za vsaki naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ veljajo naslednje enakosti.

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Izrek

Za vsaki naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ veljajo naslednje enakosti.

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Srednja enakost se imenuje **Honsbergerjeva enakost**.

Izrek

Za vsaki naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ veljajo naslednje enakosti.

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Srednja enakost se imenuje **Honsbergerjeva enakost**.

Lucasovi enakosti

Za vsako naravno število n velja

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \qquad \text{in} \qquad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$

D'Ocagneova enakost

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

D'Ocagneova enakost

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Cassinijeva enakost je posebni primer še ene d'Ocagneove enakosti.

D'Ocagneova enakost

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Cassinijeva enakost je posebni primer še ene d'Ocagneove enakosti.

D'Ocagneova enakost

Za naravni števili $m \geq n$ velja

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}.$$

D'Ocagneova enakost

Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Cassinijeva enakost je posebni primer še ene d'Ocagneove enakosti.

D'Ocagneova enakost

Za naravni števili $m \geq n$ velja

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}.$$

Dokaže se tako, da vstavimo $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ in poračunamo.

Vprašanje

Katera Fibonaccijeva števila imajo skupni delitelj?

Vprašanje

Katera Fibonaccijeva števila imajo skupni delitelj?

Hiter odgovor

Zaporedni Fibonaccijevi števili sta si vedno tuji.

Vprašanje

Katera Fibonaccijeva števila imajo skupni delitelj?

Hiter odgovor

Zaporedni Fibonaccijevi števili sta si vedno tuji.

Iz Cassinijeve enakosti

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

opazimo, da sta zaporedni Fibonaccijevi števili vedno tuji.

Vprašanje

Katera Fibonaccijeva števila imajo skupni delitelj?

Hiter odgovor

Zaporedni Fibonaccijevi števili sta si vedno tuji.

Iz Cassinijeve enakosti

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

opazimo, da sta zaporedni Fibonaccijevi števili vedno tuji.

Trditev

Velja $F_m \mid F_n$ natanko takrat, ko $m \mid n$.

Vprašanje

Katera Fibonaccijeva števila imajo skupni delitelj?

Hiter odgovor

Zaporedni Fibonaccijevi števili sta si vedno tuji.

Iz Cassinijeve enakosti

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

opazimo, da sta zaporedni Fibonaccijevi števili vedno tuji.

Trditev

Velja $F_m \mid F_n$ natanko takrat, ko $m \mid n$.

Na pametni način bomo uporabili Honsbergerjevo enakost

$$F_{r+s} = F_{r-1}F_s + F_rF_{s+1}.$$

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Trditev

Za naravni števili m in n velja

$$D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}.$$

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Trditev

Za naravni števili m in n velja

$$D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}.$$

Izrek

Množica praštevil je neskončna.

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Trditev

Za naravni števili m in n velja

$$D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}.$$

Izrek

Množica praštevil je neskončna.

Evklidov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila.

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Trditev

Za naravni števili m in n velja

$$D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}.$$

Izrek

Množica praštevil je neskončna.

Evklidov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj je $n := p_1 \cdots p_k + 1$ število, ki ni deljivo z nobenim od navedenih praštevil.

Naj bo $D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b.

Trditev

Za naravni števili m in n velja

$$D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}.$$

Izrek

Množica praštevil je neskončna.

Evklidov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj je $n := p_1 \cdots p_k + 1$ število, ki ni deljivo z nobenim od navedenih praštevil. Zato ima praštevilski delitelj, različen od $p_1, \ldots, p_k$, kar je protislovje.

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj.

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Kje je napaka?

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Kje je napaka?

Tudi 2 je praštevilo in velja $F_2 = 1$.

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Kje je napaka?

Tudi 2 je praštevilo in velja $F_2 = 1$.

Popravljeni Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja.

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Kje je napaka?
Tudi 2 je praštevilo in velja $F_2 = 1$.

Popravljeni Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja. Ker je $F_2 = 1$, ima vsako Fibonaccijevo število največ dva praštevilska delitelja.

Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja in vsako med njimi ima natanko en praštevilski delitelj. To ni možno, sa velja

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Kje je napaka?

Tudi 2 je praštevilo in velja $F_2 = 1$.

Popravljeni Wunderlichov dokaz

Recimo, da so $p_1, \ldots, p_k$ vsa praštevila. Tedaj so Fibonaccijeva števila $F_{p_1}, \ldots, F_{p_k}$ tuja. Ker je $F_2 = 1$, ima vsako Fibonaccijevo število največ dva praštevilska delitelja. To ni možno, saj je

$$F_{37} = 24157817 = 73 \cdot 149 \cdot 2221.$$

Število, ki je hkrati Fibonaccijevo in praštevilo, se imenuje **Fibonaccijevo praštevilo**. Mathematica je preverila v 106 sekundah, da je F_{104911} praštevilo. Število F_{104911} ima 21925 števk in je po vrsti 34. Fibonaccijevo praštevilo. Vredno je omeniti, da je trenutno znanih 51 Fibonaccijevih praštevil, največje med njimi pa je $F_{3340367}$, ki ima 698096 števk.

Število, ki je hkrati Fibonaccijevo in praštevilo, se imenuje **Fibonaccijevo praštevilo**. Mathematica je preverila v 106 sekundah, da je F_{104911} praštevilo. Število F_{104911} ima 21925 števk in je po vrsti 34. Fibonaccijevo praštevilo. Vredno je omeniti, da je trenutno znanih 51 Fibonaccijevih praštevil, največje med njimi pa je $F_{3340367}$, ki ima 698096 števk.

Dokaz enakosti $D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}$

Uporabili bomo

Število, ki je hkrati Fibonaccijevo in praštevilo, se imenuje **Fibonaccijevo praštevilo**. Mathematica je preverila v 106 sekundah, da je F_{104911} praštevilo. Število F_{104911} ima 21925 števk in je po vrsti 34. Fibonaccijevo praštevilo. Vredno je omeniti, da je trenutno znanih 51 Fibonaccijevih praštevil, največje med njimi pa je $F_{3340367}$, ki ima 698096 števk.

Dokaz enakosti $D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}$

Uporabili bomo

- Evklidov algoritem

Število, ki je hkrati Fibonaccijevo in praštevilo, se imenuje **Fibonaccijevo praštevilo**. Mathematica je preverila v 106 sekundah, da je F_{104911} praštevilo. Število F_{104911} ima 21925 števk in je po vrsti 34. Fibonaccijevo praštevilo. Vredno je omeniti, da je trenutno znanih 51 Fibonaccijevih praštevil, največje med njimi pa je $F_{3340367}$, ki ima 698096 števk.

Dokaz enakosti $D(F_m, F_n) = F_{D(m,n)}$

Uporabili bomo

- Evklidov algoritem
- Za $n = mq + r$, kjer je $q \in \mathbb{N}$ in $0 \leq r < m$, velja

$$D(F_n, F_m) = D(F_m, F_r).$$

Weinsteinov “izrek” (1966)

Vsaka podmnožica moči $n+1$ podmnožice $\{F_1, \ldots, F_{2n}\}$ vsebuje taki dve Fibonaccijevi števili, da je eden med njima deljiv z drugim.

Weinsteinov "izrek" (1966)

Vsaka podmnožica moči $n+1$ podmnožice $\{F_1, \ldots, F_{2n}\}$ vsebuje taki dve Fibonaccijevi števili, da je eden med njima deljiv z drugim.

Erdösov izrek

V poljubni podmnožici $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ množice $\{1, \ldots, 2n\}$ obstajata taki števili $a < b$, da a deli b.

Weinsteinov “izrek” (1966)

Vsaka podmnožica moči $n+1$ podmnožice $\{F_1, \dots, F_{2n}\}$ vsebuje taki dve Fibonaccijevi števili, da je eden med njima deljiv z drugim.

Erdösov izrek

V poljubni podmnožici $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ množice $\{1, \dots, 2n\}$ obstajata taki števili $a < b$, da a deli b.

Dokaz Weinsteinovega izreka

Izberimo podmnožico $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_{n+1}}\}$ množice $\{F_1, \dots, F_{2n}\}$. Po Erdösovem izreku obstajata taki števili i_k in i_j, da i_k deli i_j. Ker je

$$D(F_{i_k}, F_{i_j}) = F_{D(i_k, i_j)} = F_{i_k},$$

Fibonaccijevo število F_{i_k} deli Fibonaccijevo število F_{i_j}.

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$,
$(1, 1)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$,
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F_n', F_{n+1}'),$$

kjer je F_n' ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$,
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$,
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$,
$(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,8)$, $(8,2)$, $(2,10)$, $(10,1)$, $(1,0)$,

Še vec o deljivosti Fibonaccijevih števil

Izrek

Za vsako praštevilo p obstaja tako Fibonaccijevo število F_n, da p deli F_n.

Ideja dokaza

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ si ogledamo par

$$(F'_n, F'_{n+1}),$$

kjer je F'_n ostanek števila F_n pri deljenju s p.
Za lažjo predstavo si oglejmo primer $p = 11$. Zaporedoma dobimo
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$,
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 10)$, $(10, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1), \dots$

Nadaljevanje

- Zaporedje začne s členom $(1, 1)$.

Nadaljevanje

- Zaporedje začne s členom $(1,1)$.
- Ker je vseh možnih členov tega zaporedja p^2, se nek par (a,b) ponovi.

Nadaljevanje

- Zaporedje začne s členom $(1, 1)$.
- Ker je vseh možnih členov tega zaporedja p^2, se nek par (a, b) ponovi.
- Obstaja cikel z začetkom $(1, 1)$.

Nadaljevanje

- Zaporedje začne s členom $(1, 1)$.
- Ker je vseh možnih členov tega zaporedja p^2, se nek par (a, b) ponovi.
- Obstaja cikel z začetkom $(1, 1)$.
- V ciklu obstaja par $(F'_n, F'_{n+1}) = (0, 1)$.

Nadaljevanje

- Zaporedje začne s členom $(1, 1)$.
- Ker je vseh možnih členov tega zaporedja p^2, se nek par (a, b) ponovi.
- Obstaja cikel z začetkom $(1, 1)$.
- V ciklu obstaja par $(F'_n, F'_{n+1}) = (0, 1)$.

Izrek

Velja

$$F_{p-\left(\frac{p}{5}\right)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Število

$$\left(\frac{a}{q}\right) \equiv a^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q},$$

ki je definirano za liho praštevilo q, se imenuje **Legendreov simbol**.

Število

$$\left(\frac{a}{q}\right) \equiv a^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q},$$

ki je definirano za liho praštevilo q, se imenuje **Legendreov simbol**.V našem primeru dobimo

$$\left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 0 & : \quad p \equiv 0 \pmod{5} \\ 1 & : \quad p \equiv \pm 1 \pmod{5} \\ -1 & : \quad p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Število

$$\left(\frac{a}{q}\right) \equiv a^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q},$$

ki je definirano za liho praštevilo q, se imenuje **Legendreov simbol**.V našem primeru dobimo

$$\left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 0 & : \quad p \equiv 0 \pmod{5} \\ 1 & : \quad p \equiv \pm 1 \pmod{5} \\ -1 & : \quad p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Če je $p = 31$, potem je $\left(\frac{31}{5}\right) = 1$ in zato 31 deli

$$F_{30} = 832040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61.$$

Hvala za vašo pozornost!