(Linearne) diferenčne enačbe in geometrijsko zaporedje

Metode:

- Ugani in dokaži z indukcijo
- Karakteristične enačbe
- Matrike
- Rodovne funkcije

1. **Ugani formulo in jo dokaži z indukcijo**:

   (a) Zaporedje $a_1, a_2, ..$ je podano z $a_1 = 1$ in $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+4a_n^2}}$ za $n \geq 1$. Izračunaj tak najmanjši k, da je $a_k < 10^{-2}$.

   (b) $a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1}$, $a_0 = 2$ in $a_1 = 7$

   (c) $a_{n+1} = -a_n + 6a_{n-1}$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 5$

2. **Karakteristična enačba**

   Kot vidimo je lahko ugibanje precej neuspešno. Ali obstaja recept za reševanje takih (linearnih) enačb? Odgovor je pritrdilen. Odgovor je podan v izreku:

   Izrek: Naj bo $a_{n+1} = ba_n + ca_{n-1}$, pri čemer sta vrednosti a_1 in a_2 podani. Ndalje, naj bosta x_1 in x_2 rešitvi naslednje (karakteristične) enačbe

   $$x^2 - bx - c = 0$$

   Potem je splošna rešitev te enačbe podana z

   - $a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ če je $x_1 \neq x_2$ (torej, če je $D \neq 0$) in
   - $a_n = x_1^n(\alpha n + \beta)$ če je $x_1 = x_2$ (torej, če je $D = 0$)

   Dokaz tega izreka lahko naredimo s pomočjo vektorskih prostorov, vendar ga tukaj izpuščam. Lahko pa ga naredimo s pomočjo matrik, kot bomo naredili na konkretnem primeru v naslednji točki. Tukaj si raje poglejmo kako bi **srednješolcu** razložili zakaj ta metoda deluje. Spet to naredimo kar na konkretnem primeru.

   Naj bo $a_1 = 1$ in $a_2 = 7$, za $n \geq 3$ pa je $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$

   <u>1. korak</u>

   Zapišimo

   $$a_{n+1} - 4a_n = 3(a_n - 4a_{n-1})$$

   in postavimo $b_n = a_n - 4a_{n-1}$ ter dobimo

   $$b_{n+1} = 3b_n$$

torej je b_n **geometrijsko** zaporedje z $b_2 = 3$ in $b_1 = 1$. Torej je $b_n = 3^{n-1}$ oziroma

$$\boxed{a_{n+1} - 4a_n = 3^n}$$

<u>2. korak</u>

Spet opazimo

$$a_{n+1} - 3a_n = 4(a_n - 3a_{n-1})$$

in pišimo $c_n = a_n - 3a_{n-1}$ pa dobimo

$$c_{n+1} = 4c_n$$

torej je sedaj c_n **geometrijsko** zaporedje z $c_2 = 4$ in $c_1 = 1$. Torej je $c_n = 4^{n-1}$ oziroma

$$\boxed{a_{n+1} - 3a_n = 4^n}$$

<u>3. korak</u>

Če enačbi v okvirčkih odštejemo dobimo

$$\boxed{a_n = 4^n - 3^n}$$

Opomba: Z malce spretnosti lahko to metodo uporabimo tudi na ulomljeno linearnih diferenčnih enačbah kot je naprimer:

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 4}{4a_n + 5}$$

za $n \geq 1$ in $a_1 = 2$. Naredimo nastavek $a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ pa dobimo

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{5b_n + 4c_n}{4b_n + 5c_n}$$

in tvegamo s pretpostavko

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5b_n + 4c_n \\ c_{n+1} &= 4b_n + 5c_n \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo c_n in vstavimo v drugo enačbo, dobimo linearno diferenčno enačbo ...

3. **Matrično reševanje**

Vse kar smo povedali v prejšnji točki, bi lahko naredili tudi z matrikami. Poglejmo si kar na primeru. Naj bo $a_1 = 2$ in $a_2 = 1$ ter

$$a_{n+1} = -a_n + 6a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Dano forulo lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Če označimo

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dobimo enačbo

$$v_{n+1} = Qv_n$$

ki nas spet spominja na **geometrijsko** zaporedje. Očitno je

$$v_n = Q^n v_0$$

pri čemer je

$$v_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ker je potence matrik v splošnem naporno računati, izračunamo Jordanovo matriko za Q. Karakteristični polinom za Q je

$$p(\lambda) = \det(Q - \lambda \cdot I) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

Torej ima Q lastni vrednosti 2 in -3 in je torej

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Če je P prehodna matrika za Q je torej

$$v_n = PJ^nP^{-1}v_0$$

od koder dobimo, da je, za neki števili α in β:

$$a_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$$

4. **Rodovne funkcije**

LDE lahko rešujemo tudi s formalnimi vrstami. Tu lahko lepo ponovimo metodo parcialnih ulomkov in neskončne **geometrijske** vrste. Poglejmo si kako delo kar na primeru. Zaporedje je podano z $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in za $n \geq 0$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (*)$$

Naj bo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Pomnožimo $(*)$ z x^{n+2}:

$$a_{n+2}x^{n+2} = a_{n+1}x^{n+2} + 2a_nx^{n+2}$$

in seš"tejmo ko n preteče od 0 do ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+2}$$

Sedaj imamo:

$$f(x) - a_0 - a_1 x = x(f(x) - a_0) + 2x^2 f(x)$$

oziroma:

$$f(x) - 1 - x = x(f(x) - 1) + 2x^2 f(x)$$

in izrazimo f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 - x - 2x^2} \\
&= \frac{1}{(1-2x)(1+x)} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{2}{3} \cdot (1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + ...) + \frac{1}{3} \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + ...)
\end{aligned}$$

Če primerjamo sedaj n-ti člen v začetni in dobljeni formuli, vidmo da je

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$