(Skoraj) vse o eksponentni porazdelitvi, in (vsaj) nekaj o njenih sorodnicah

Gregor Šega, 26. 9. 2020

Sledijo zapiski s predavanja. S črno so naknadno dodane opombe.

Če komu pride prav, je priložen tudi zvezek v Mathematici (z nekaj iznajdljivosti ga lahko odprete tudi brez licenčne verzije Mathematice).

Poleg tega so tu še povezave, ki smo si jih ogledali:

- Projekt generatorja slučajnih števil, https://hackaday.io/project/4628-nuclear-random-number-generator
- Mali Geigerjev števec za 30 evrov (s poštnino vred), recimo https://www.aliexpress.com/item/4000229395987.html?spm=a2g0o.search0303.0.0.4cb2c590PbcQuj&algo_pvid=3dcafd0d-6639-4ed8-bbad-b1b250a92c0f&algo_expid=3dcafd0d-6639-4ed8-bbad-b1b250a92c0f-12&btsid=0bb0623916010357930233421e2e3b&ws_ab_test=searchweb0_0,searchweb201602_,searchweb201603_
- Mali izvor radioaktivnega sevanja (primer), https://en.wikipedia.org/wiki/Fiesta_(dinnerware)
- Meritev radioaktivnosti radioaktivno rdeče posodice, https://www.youtube.com/watch?v=XrSlEnDNbDw
- Dodatek: ali ste včlanjeni v Alumni klub? https://alumniul.online

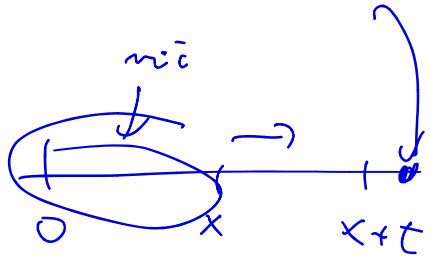
Vprašanje je bilo o tehnični izvedbi: tablica je bila iPad (dobite že za 320 evrov), svinčnik (ni potrebno original, kitajski so po 15 evrov), prenosnik z Windows priklopljen na projektor.
Aplikacija za pisanje na tablico: GoodNotes, https://www.goodnotes.com/, 10 evrov. Aplikacija na Windowsih za zrcaljenje iPadovega zaslona: 5KPlayer, https://www.5kplayer.com/, brezplačna (potrebuje registracijo).

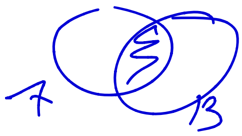
Vesel bom tako vprašanj kot poročil o opravljenih projektih. Pošta: gregor.sega@fmf.uni-lj.si

Eksponentna porazdelitev

Lastnost: brez spomina $P(X>x+t \mid X>x) = P(X>t)$

$$= \frac{P(X>x+t,\ X>x)}{P(X>x)} = \frac{P(X>x+t)}{P(X>x)}$$





Definiramo: $g(x) = P(X>x)$

lepa rešitev je

$$g(x+t) = g(t)\cdot g(x) \Rightarrow g(x) = e^{cx} = P(X>x)$$

$$\Rightarrow P(X>x) = e^{-\lambda x}$$

Porazdelitvena funkcija $F_X(x) = P(X\leq x) = 1-e^{-\lambda x}$

Verjetnostna gostota $f_X(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda x}$, $x>0$, pri $\lambda>0 \Rightarrow Exp(\lambda)$

Radioaktivni razpad urana

10^{18} atomov urana ← recimo, da imamo toliko. Koliko radioaktivnih razpadov je to?

$$\frac{\frac{1}{2}10^{18}}{700.000000} \simeq 10^{9} \text{ - leta}$$

↑ razpolovna doba, v letih

$3\cdot 10^{6}$ v dnevu

120 000 v uri

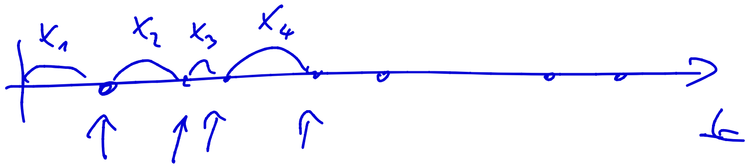
2 000 v min

30 v sekundi.

→ Filmček: okoli 4000 v minuti!

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \exp(\lambda)$

Eksponentna porazdelitev morda ni tisto, kar želimo.



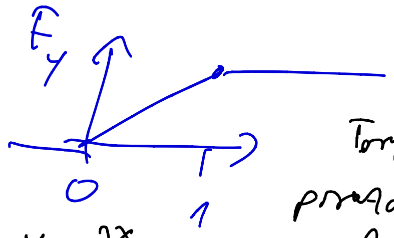
Ideja: $Y = e^{-\lambda X}$. Torej?

$$P(Y \le x) = P(e^{-\lambda X} \le x) = P\left(X \ge \frac{\ln x}{-\lambda}\right) =$$

$0 \le x \le 1$

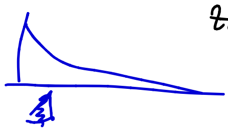
$$= e^{-\lambda \cdot \frac{\ln x}{-\lambda}} = x.$$

Tu vidimo, zakaj vzamemo $Y = e^{-\lambda X}$



Torej je Y porazdeljena enakomerno $[0,1]$.

$X \sim \exp(\lambda)$



$$\int_0^\infty x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x \cdot e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

povprečje

Problem: ne poznamo vrednosti λ!

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X} \approx \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda \stackrel{\text{ni!}}{=} \frac{1}{\bar{X}}$$

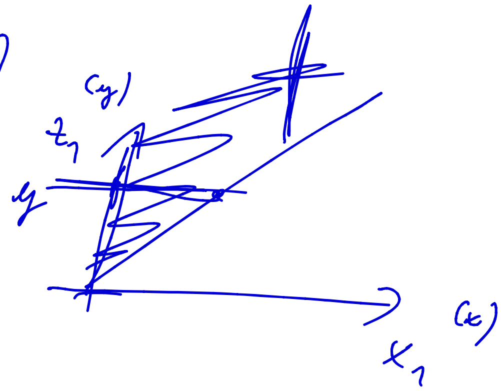
Torej: $Y_i = e^{-\frac{X_i}{\bar{X}}}$; tako iz vzorca exp. dobimo vzorec „skoraj enakomernih".

Kaj, če želimo 0/1?

$X_1, X_2, \dots$ $\qquad$ $Z_1, Z_2, \dots$

$X_i \sim \exp(\lambda_1)$ $\qquad$ $Z_i \sim \exp(\lambda_2)$

$$P(X_1 < Z_1) = \int_0^\infty \int_0^y \dots \,dx\,dy$$



$$= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,dy\,dx =$$

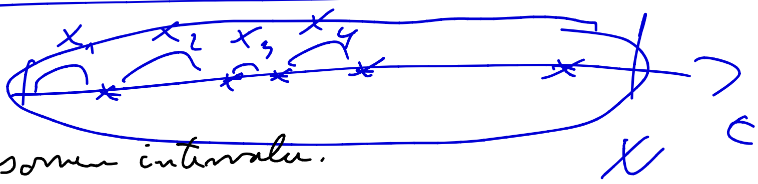
$$= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left[-e^{-\lambda_2 y}\right]_x^\infty dx =$$

$$= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\underbrace{\int_0^\infty (\lambda_1+\lambda_2)\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1}{2}, \quad \text{če } \lambda_1 = \lambda_2$$

$\Rightarrow X_i$ in Z_i zajemamo iz istega vira, recimo alternirajoče.

Še ena reč, število dogodkov v časovnem intervalu.



Število dogodkov? $= N$

$$P(N=n) = P(N \geq n) - P(N \geq n+1)$$

$$P(N \geq n) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x)$$

$$P(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X_1 + X_2 \leq x) = \int_0^x f_{X_1}(t)\cdot P(X_2 \leq x-t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\left(1 - e^{-\lambda(x-t)}\right)dt =$$

$$= \int_0^x \left(\lambda e^{-\lambda t} - \lambda\cdot e^{-\lambda x}\right)dt =$$

$$\left[-e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda x}\cdot t\right]_0^x = -e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}\cdot x + 1$$

$$f_{X_1+X_2}(x) = \cancel{\lambda e^{-\lambda x}} - \cancel{\lambda e^{-\lambda x}} + \underline{\lambda^2 x e^{-\lambda x}}$$

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x) \overset{\text{D.N.}}{=} \ldots = \frac{\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}}{2}$$

$$f_{X_1+\ldots+X_n}(x) \overset{\text{D.N., ind.}}{=} \ldots = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\underset{\Gamma(n)}{(n-1)!}} e^{-\lambda x}, \quad \text{Erlang. porazd.}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \Gamma(n) \quad , \text{za polj. } \lambda, n$$

$$P(N \geq n) = P(X_1 + \dots + X_n \leq x) =$$

$$= \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$P(N = n) = \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\, dt - \int_0^x \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} e^{-\lambda t}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ 1\times \text{ per partes}}}{=} \dots \text{ D.N.}$$

$$= \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \sim Po(\lambda x)$$

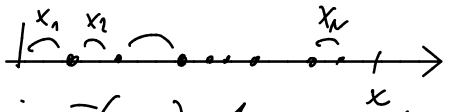
Razmišljanje: št. dogodkov bi moralo biti porazdeljeno binomsko! No, skoraj.

$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

, kjer je n število atomov (če gledamo jedrski razpad).

Ampak p je zelo majhen. V limiti ($p \to 0$, $n \to \infty$ in $p \cdot n \to \lambda$) gre to ravno proti Poissonovi porazdelitvi (d.n.).

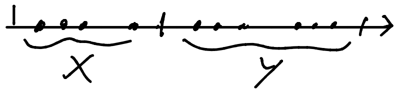
Posledice. • $N \sim Po(\lambda x)$ je št. dogodkov na intervalu $[0, x]$.



Ker je $E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$, je število dogodkov (v povprečju) enako $\frac{x}{1/\lambda} = \lambda x$. Torej je $E(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{zloraba oznak!}}}{Po(\lambda)}) = \lambda$.

- $X \sim Po(\lambda)$, $Y \sim Po(\mu)$, neodvisni $\Rightarrow X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$

  Jasno: vsota št. dogodkov na dveh intervalih je število dogodkov na uniji intervalov:

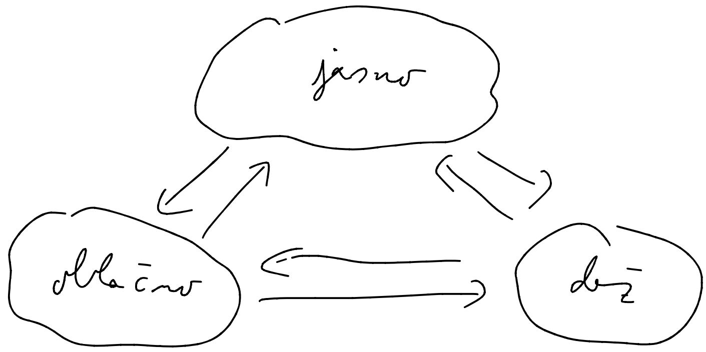


- Isto (aditivnost) torej velja tudi za binomsko.

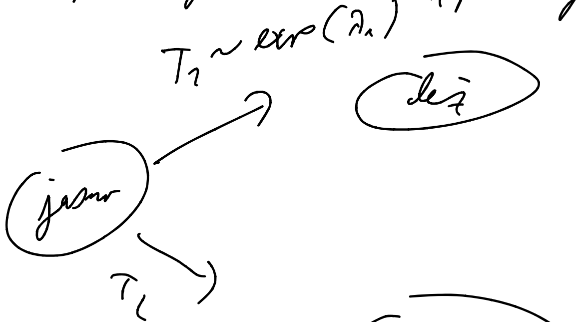
Še ena stran o Markovskih verigah. To so le zaporedja slučajnih spremenljivk, ki so brez spomina. Torej: če je $X_t = i$ (M.v. v času t je v stanju i), bo $X_{t+s} = j$, če bo v (majhnem) času s „preskočila" iz i v j.

Imamo dva „impulza", eden prestavi i v j in drugi i v k. Oba se zgodita po exp(?) času, neodvisno. Tako se v resnici izvede tisti, ki pride prej.

Primer: vreme!



Ha! Recimo, da je vreme „pozabljivo". ← Razmislite o tem! Verjetno ni, ali pač?



Kar se prej zgodi, se pač izvede

Čas „bivanja" v jasno: $exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

skoka v dež: $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

v oblačno: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Im še ena misel o vrstah (na pošti, banki, ...)

Model: vrsta na pošti: 

- pozabljivo: OK
- lahko en odide ali en pride
- prihajajo exp(?), ker so neodvisni in si ne zapomnijo, kdaj je prišel prejšnji
- odhajajo tudi pozabljivo, torej eksponentno (recimo, da se kar naenkrat spomni in najde še eno položnico / pismo / …).