Od realnih do kompleksnih funkcij

Darja Govekar Leban

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FMF seminar za učitelje
9. september 2022

Realne funkcije realne spremenljivke

- Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Realna funkcija na D je preslikava

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$

$$f : x \to f(x),$$

ki vsakemu elementu iz $\mathcal{D}$ priredi natanko določeno število $f(x)$. $\mathcal{D}$ je domena ali definicijsko območje funkcije f, x pa imenujemo neodvisna spremenljivka. Množico $\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$ imenujemo zaloga vrednosti funkcije f.

- Funkcija f je določena, če sta znani njeno definicijsko območje in funkcijski predpis.

- Funkcija f je določena, če sta znani njeno definicijsko območje in funkcijski predpis.
- Dve funkciji f, g sta torej enaki, če velja:

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$$

in

$$f(x) = g(x) \text{ za } vsak\ x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g.$$

Zveznost

- f je zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$ natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{x \to a, x \in \mathcal{D}} f(x)$ in je

$$\lim_{x \to a, x \in \mathcal{D}} f(x) = f(a).$$

Zveznost

- f je zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$ natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{x \to a, x \in \mathcal{D}} f(x)$ in je
$$\lim_{x \to a, x \in \mathcal{D}} f(x) = f(a).$$
- f je zvezna na $\mathcal{D}$, če je zvezna v vsaki točki $a \in \mathcal{D}$.

Odvod v notranji točki intervala

- Naj bo f definirana na $(a-r, a+r)$ za nek $r > 0$. Če limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

obstaja, paravimo, da je f odvedljiva v točki a in

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

odvod funkcije f v točki a.

Odvod v notranji točki intervala

- Naj bo f definirana na $(a-r, a+r)$ za nek $r>0$. Če limita

  $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  obstaja, paravimo, da je f odvedljiva v točki a in

  $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  odvod funkcije f v točki a.
- Vrednost $f'(a)$ je naklonski kot tangente na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$. Enačba tangente je

  $$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

- Včasih uporabljamo pisavo

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kjer je $h = x - a$ sprememba argumenta x glede na točko a.

- Če je f odvedljiva v točki a, velja

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o_a(h).$$

Pri tem velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{o_a(h)}{h} = 0.$$

- Če je f odvedljiva v točki a, velja

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o_a(h).$$

  Pri tem velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{o_a(h)}{h} = 0.$$

- To pomeni, da je funkcijo $h \to f(a+h) - f(a)$ pri majhnih h mogoče dobro aproksimirati z linearno funkcijo $h \to f'(a)h$, tj.

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h.$$

Odvod v krajišču intervala

Naj bo f definirana na $\mathcal{D} = [c, d]$.

- Funkcija f je odvedljiva v levem krajišču $a = c$, če je v točki a odvedljiva z desne, kar pomeni, da obstaja

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Odvod v krajišču intervala

Naj bo f definirana na $\mathcal{D} = [c, d]$.

- Funkcija f je odvedljiva v levem krajišču $a = c$, če je v točki a odvedljiva z desne, kar pomeni, da obstaja

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- Funkcija f je odvedljiva v desnem krajišču $a = d$, če je v točki a odvedljiva z leve, kar pomeni, da obstaja

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Odvod v krajišču intervala

Naj bo f definirana na $\mathcal{D} = [c, d]$.

- Funkcija f je odvedljiva v levem krajišču $a = c$, če je v točki a odvedljiva z desne, kar pomeni, da obstaja

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Funkcija f je odvedljiva v desnem krajišču $a = d$, če je v točki a odvedljiva z leve, kar pomeni, da obstaja

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

f je odvedljiva na $[c, d]$, če je odvedljiva v vsaki notranji točki, v levem krajišču je odvedljiva z desne ter v desnem krajišču je odvedljiva z leve.

Vektorske funkcije

- Naj bo $\mathcal{I}$ interval. Preslikavo

$$\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

imenujemo vektorska funkcija. Spremenljivko $t \in \mathcal{I}$ imenujemo parameter. Množico $\{\gamma(t); t \in \mathcal{I}\}$ imenujemo tir vektorske funkcije γ.

Vektorske funkcije

- Naj bo $\mathcal{I}$ interval. Preslikavo

$$\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

  imenujemo vektorska funkcija. Spremenljivko $t \in \mathcal{I}$ imenujemo parameter. Množico $\{\gamma(t); t \in \mathcal{I}\}$ imenujemo tir vektorske funkcije γ.
- Pravimo, da sta $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, $t \in \mathcal{I}$, parametrični enačbi krivulje.

- Tir vektorske funkcije

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma : \theta \to \gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

je enotska krožnica, kot θ je parameter.

- Tir vektorske funkcije
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma : \theta \to \gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$
je enotska krožnica, kot θ je parameter.
- Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Graf funkcije f je množica $\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)), x \in [a, b]\}$. Graf $\mathcal{G}(f)$ je tir vektorske funkcije
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$$
$$x \to \gamma(x) = (x, f(x)),$$
Parameter je spremenljivka x.

Zveznost vektorske funkcije

- γ je zvezna v točki $a \in \mathcal{I}$ natanko tedaj, ko obstaja limita $\lim\limits_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t)$ in je

$$\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t) = \gamma(a).$$

Zveznost vektorske funkcije

- γ je zvezna v točki $a \in \mathcal{I}$ natanko tedaj, ko obstaja limita $\lim\limits_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t)$ in je
$$\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t) = \gamma(a).$$
- $\lim\limits_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t)$ obstaja natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim\limits_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_1(t)$ in $\lim\limits_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_2(t)$ in
$$\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t) = \left(\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_1(t), \lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_2(t) \right)$$

Zveznost vektorske funkcije

- γ je zvezna v točki $a \in \mathcal{I}$ natanko tedaj, ko obstaja limita $\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t)$ in je

$$\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t) = \gamma(a).$$

- $\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t)$ obstaja natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_1(t)$ in $\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_2(t)$ in

$$\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma(t) = \left(\lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_1(t), \lim_{t \to a, t \in \mathcal{I}} \gamma_2(t) \right)$$

- γ je zvezna v točki $a \in \mathcal{I}$ natanko tedaj, ko sta obe komponenti γ_1 in γ_2 zvezni v točki a.

Odvod vektorske funkcije

- Naj bo $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija in $t_0 \in \mathcal{I}$ notranja točka. Če limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

obstaja, pravimo, da je γ odvedljiva v točki t_0 in jo imenujemo odvod vektorske funkcije f v točki t_0.

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

Odvod vektorske funkcije

- Naj bo $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija in $t_0 \in \mathcal{I}$ notranja točka. Če limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

obstaja, pravimo, da je γ odvedljiva v točki t_0 in jo imenujemo odvod vektorske funkcije f v točki t_0.

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

- Opomba: $\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} = \frac{1}{h}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))$ je vektor.

Odvod vektorske funkcije

- Naj bo $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija in $t_0 \in \mathcal{I}$ notranja točka. Če limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

obstaja, pravimo, da je γ odvedljiva v točki t_0 in jo imenujemo odvod vektorske funkcije f v točki t_0.

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

- Opomba: $\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} = \frac{1}{h}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))$ je vektor.

- Vektorska funkcija γ je odvedljiva v točki t_0 natanko tedaj, ko sta odvedljivi obe njeni koordinatni funckiji γ_1 in γ_2 Tedaj je

$$\dot{\gamma}(t_0) = (\dot{\gamma_1}(t_0), \dot{\gamma_2}(t_0)).$$

Aproksimacija vektorske funkcije

- Naj bo vektorska funkcija $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva v točki $t_0 \in \mathcal{I}$. Tedaj lahko zapišemo

$$\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)h + \mathrm{o(h)},$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o(h)}}{h} = 0.$$

Aproksimacija vektorske funkcije

- Naj bo vektorska funkcija $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva v točki $t_0 \in \mathcal{I}$. Tedaj lahko zapišemo

$$\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)h + \mathrm{o(h)},$$

  kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o(h)}}{h} = 0.$$

- To pa pomeni, da je mogoče vektorsko funkcijo

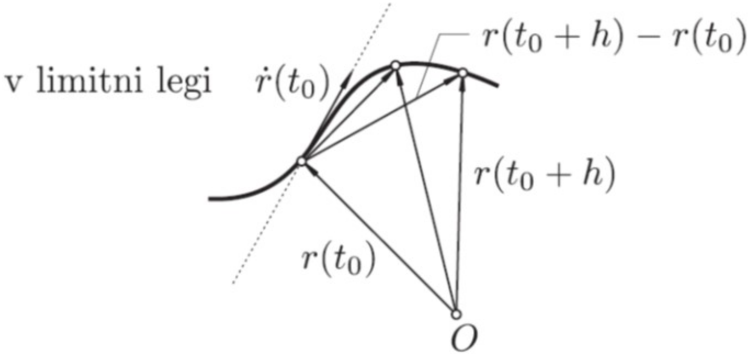
$$h \to \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$$

  pri majhnih h dobro aproksimirati z linearno vektorsko funkcijo $h \to \dot{\gamma}(t_0)h$ t. j.

$$\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx \dot{\gamma}(t_0)h.$$

Aproksimacija vektorske funkcije

- Naj bo vektorska funkcija $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva v točki $t_0 \in \mathcal{I}$. Tedaj lahko zapišemo
$$\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)h + \mathrm{o(h)},$$
kjer je
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{o(h)}}{h} = 0.$$
- To pa pomeni, da je mogoče vektorsko funkcijo
$$h \to \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$$
pri majhnih h dobro aproksimirati z linearno vektorsko funkcijo $h \to \dot{\gamma}(t_0)h$ t. j.
$$\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx \dot{\gamma}(t_0)h.$$
- Dobro ”aproksimabilnost¨ vektorske funkcije z linearno vektorsko funkcijo imenujemo diferenciabilnost, linearno preslikavo $h \to \dot{\gamma}(a)h$ pa diferencial funkcije γ v točki a.


$r(t_0 + h) - r(t_0)$
v limitni legi
$\dot{r}(t_0)$
$r(t_0 + h)$
$r(t_0)$
O

- Če je t_0 krajišče intervala $\mathcal{I}$, definiramo levi oz. desni odvod vektorske funkcije v t_0 (t.j. povsod v definiciji odvoda limito nadomestimo z desno oziroma levo limito.)

- Če je t_0 krajišče intervala $\mathcal{I}$, definiramo levi oz. desni odvod vektorske funkcije v t_0 (t.j. povsod v definiciji odvoda limito nadomestimo z desno oziroma levo limito.)
- Vektorska funkcija je odvedljiva na $\mathcal{I}$, če je odvedljiva v vsaki točki intervala $\mathcal{I}$.

Kdaj je tir vektorske funkcije gladka krivulja?

- Tir vektorkse funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je gladka krivulja, če velja
  1. γ je odvedljiva na(a, b), v krajišču a ima desni odvod in v krajišču b ima levi odvod,
  2. odvod $\dot{\gamma}$ je zvezna funkcija na $[a, b]$.
  3. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ za vse $t \in [a, b]$.
  4. če je krivulja sklenjena (t. j. $\gamma(a) = \gamma(b)$), se desni odvod v točki a in levi odvod v točki b ujemata.

Kdaj je tir vektorske funkcije gladka krivulja?

- Tir vektorkse funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je gladka krivulja, če velja
  1. γ je odvedljiva na(a, b), v krajišču a ima desni odvod in v krajišču b ima levi odvod,
  2. odvod $\dot{\gamma}$ je zvezna funkcija na $[a, b]$.
  3. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ za vse $t \in [a, b]$.
  4. če je krivulja sklenjena (t. j. $\gamma(a) = \gamma(b)$), se desni odvod v točki a in levi odvod v točki b ujemata.
- Gladek lok je gladka krivulja, kjer je dodatno γ injektivna na $[a, b]$

Kdaj je tir vektorske funkcije gladka krivulja?

- Tir vektorkse funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je gladka krivulja, če velja
  1. γ je odvedljiva na(a, b), v krajišču a ima desni odvod in v krajišču b ima levi odvod,
  2. odvod $\dot{\gamma}$ je zvezna funkcija na $[a, b]$.
  3. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ za vse $t \in [a, b]$.
  4. če je krivulja sklenjena (t. j. $\gamma(a) = \gamma(b)$), se desni odvod v točki a in levi odvod v točki b ujemata.
- Gladek lok je gladka krivulja, kjer je dodatno γ injektivna na $[a, b]$
- Enostavno sklenjena gladka krivulja je gladka sklenjena krivulja, kjer je γ injektivna na (a, b).

- Naj bo Γ gladka krivulja v ravnini in naj bo γ njena parametrizacija. Funkcija $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ je zvezna, če je zvezna funkcija $\varphi(\gamma(t))$, $t \in \mathcal{I}$. Funkcija $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ je odvedljiva na Γ, če je odvedljiva funkcija $\varphi(\gamma(t))$, $t \in \mathcal{I}$. V primeru, ko je Γ gladka sklenjena krivulja, zahtevamo še dodatno, da se v krajiščih ujemajo vrednosti funkcije in odvodov.
- Ta definicija ni odvisna od izbire parametrizacije krivulje Γ.

Zveznost

Naj bo Ω odprta množica v ravnini in naj bo $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

- Funkcija f je zvezna v točki $a \in \overline{\Omega}$ natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y)$ in je

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = f(a_1,a_2) = f(a).$$

Zveznost

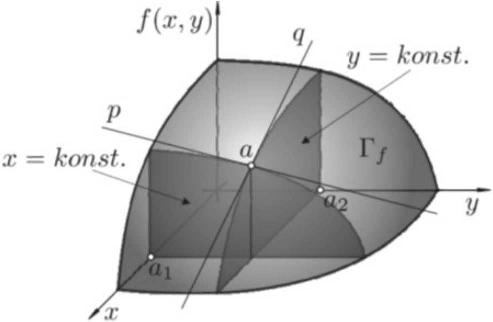
Naj bo Ω odprta množica v ravnini in naj bo $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

- Funkcija f je zvezna v točki $a \in \overline{\Omega}$ natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2),(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y)$ in je
$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = f(a_1,a_2) = f(a).$$
- Funkcija f je zvezna na Ω (oz. $\overline{\Omega}$), če je zvezna v vsaki točki $a \in \Omega$ (oz. $a \in \overline{\Omega}$).

Parcialni odvod in aproksimacija

Parcialni odvodi funkcije f v točki $a = (a_1, a_2) \in \Omega$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ je odvod funkcije $x \to f(x, a_2)$ v točki a_1
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ je odvod funkcije $y \to f(a_1, y)$ v točki a_2.



Naklonski koeficient premice p je $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, naklonski koeficient premice q pa je $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

- Podobno definiramo tudi parcialne odvode višjih redov.
- Privzemimo, da je f razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a, kar pomeni, da so funkcija f in parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni v okolici točke a. Pišimo $a = (a_1, a_2)$ in $h = (h_1, h_2)$
- Velja

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \mathrm{o(h)},$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o(h)}}{|h|} = 0.$$

- Podobno definiramo tudi parcialne odvode višjih redov.
- Privzemimo, da je f razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a, kar pomeni, da so funkcija f in parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni v okolici točke a. Pišimo $a = (a_1, a_2)$ in $h = (h_1, h_2)$
- Velja

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \mathrm{o(h)},$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o(h)}}{|h|} = 0.$$

Torej je mogoče pri majhnih h funkcijo $f(a+h) - f(a)$ dobro aproksimirati z linearno preslikavo

$$h = (h_1, h_2) \to \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2.$$

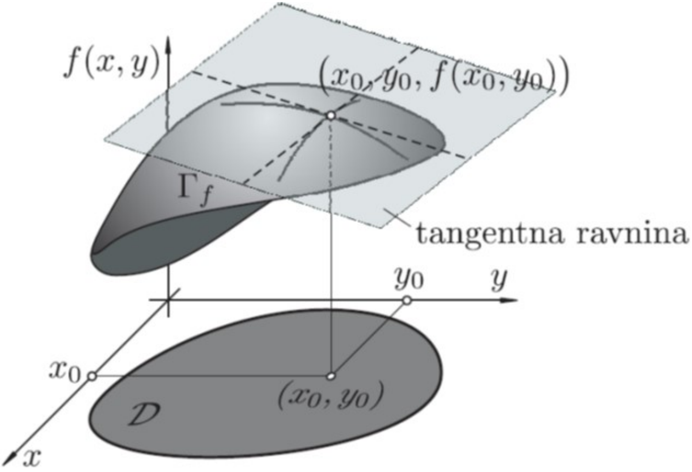
- Če pišemo $x = a_1 + h_1$, $y = a_2 + h_2$, velja

$$f(x,y) \approx f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y,$$

- kar pomeni, da v okolici točke $(a, f(a))$ graf funkcije f aproksimiramo s tangentno ravnino

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y.$$

$a = (x_0, y_0)$



$f(x,y)$
$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
Γ_f
tangentna ravnina
y_0
y
x_0
(x_0, y_0)
$\mathcal{D}$
x

Nekaj oznak

- V ravnini kompleksno število $z = x + \mathrm{i}y$ ponazorimo s točko (x, y).
- Število $z \neq 0$ lahko zapišemo tudi v polarnem zapisu

$$z = |z| \left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right),$$

  število θ imenujemo argument kompleksnega števila z in pišemo $\arg(z) = \theta$. Določeno je do celega mnogokratnika 2π natančno. Ponavadi ga izberemo iz intervala $[0, 2\pi)$.
-

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

$$b\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}, \quad b\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

$$\overline{\Delta}(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\} \quad \overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}.$$

Kompleksne preslikave kot preslikave $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ odprta množica.

- Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pišimo $z = x + \mathrm{i}y$ in $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, kjer sta x, y realni števili in u, v realni funkciji. Tedaj f predstavlja preslikavo F,
- $$z = x+iy = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{F}{\mapsto} \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = u(x,y)+iv(x,y) = f(z).$$

Zveznost

Funkcija f oziroma preslikava F je zvezna v točki $a = (a_1, a_2) \in \overline{\Omega}$, če sta v točki a zvezni funkciji $u(x, y)$ in $v(x, y)$. Funkcija je zvezna na Ω oziroma $\overline{\Omega}$, če je zvezna v vsaki točki $a \in \Omega$ oziroma $a \in \overline{\Omega}$.

Diferenciabilnost v realnem smislu

- Naj bo f razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a, kar pomeni, da so vsi parcialni odvodi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ in $\frac{\partial v}{\partial y}$ zvezni v okolici točke $a = (a_1, a_2)$. Pišimo $h = (h_1, h_2)$. Potem v okolici točke $a = (a_1, a_2)$ velja
-
$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a)h + \mathrm{o_a(h_1, h_2)},$$
kjer $\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o_a(h_1,h_2)}}{|h|} = 0$.

Diferenciabilnost v realnem smislu

- Naj bo f razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a, kar pomeni, da so vsi parcialni odvodi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ in $\frac{\partial v}{\partial y}$ zvezni v okolici točke $a = (a_1, a_2)$. Pišimo $h = (h_1, h_2)$. Potem v okolici točke $a = (a_1, a_2)$ velja
- $$F(a+h) = F(a) + (DF)(a)h + \mathrm{o_a(h_1, h_2)},$$

  kjer $\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o_a(h_1,h_2)}}{|h|} = 0$.

- Pri tem je
$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix}$$
diferencial funkcije F v točki a .
- Diferencial $(DF)(a)$ je realno linearna preslikava, ni pa nujno kompleksno linearna preslikava.

- Pri tem je
$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix}$$
diferencial funkcije F v točki a .
- Diferencial $(DF)(a)$ je realno linearna preslikava, ni pa nujno kompleksno linearna preslikava.

$$(DF)(a)h = (DF)(a)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(a)h_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(a)h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z}(a)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h},$$

kjer je

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) - \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

- Lahko zapišemo

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + \mathrm{o_a(h)},$$

kjer $\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{o_a(h)}}{|h|} = 0$ in kjer je

$$(Df)(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h},$$

- Lahko zapišemo

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + \mathrm{o_a}(\mathrm{h}),$$

kjer $\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{o_a}(\mathrm{h})}{|h|} = 0$ in kjer je

$$(Df)(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h},$$

- $(Df)(a)$ je realno linearna preslikava. $(Df)(a)$ je kompleskno linearna preslikava natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$$

.

Holomrofne funkcije

Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija

- Naj bo $a \in \Omega$ in naj obstaja

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

  Tedaj to limito imenujemo odvod funkcije f v točki a. Označimo jo z $f'(a)$. Torej

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a).$$

Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija

- Naj bo $a \in \Omega$ in naj obstaja

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Tedaj to limito imenujemo odvod funkcije f v točki a. Označimo jo z $f'(a)$. Torej

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a).$$

- Pišimo

$$\eta(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a),$$

tedaj je

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \eta(z)(z - a),$$

kjer $\eta(z) \to 0$ pri $z \to a$.

- Oziroma,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(z)h,$$

kjer $\eta(z) \to 0$ pri $h \to a$. Diferencial $(Df)(a) : h \to f'(a)h$ je kompleksno linearna preslikava.

- Oziroma,
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(z)h,$$
kjer $\eta(z) \to 0$ pri $h \to a$. Diferencial $(Df)(a) : h \to f'(a)h$ je kompleksno linearna preslikava.
- Če $f'(a)$ obstaja za vsak $a \in \Omega$, imenujemo funkcijo f holomorfno funkcijo (ali analitično funkcijo) na Ω.

- Oziroma,
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(z)h,$$
kjer $\eta(z) \to 0$ pri $h \to a$. Diferencial $(Df)(a) : h \to f'(a)h$ je kompleksno linearna preslikava.
- Če $f'(a)$ obstaja za vsak $a \in \Omega$, imenujemo funkcijo f holomorfno funkcijo (ali analitično funkcijo) na Ω.
- Holomorfnost je odvedljivost v kompleksnem smislu.

Odvedljivost v kompleksnem smislu in Cauchy-Riemanove enačbe

Naj bo funkcija f holomorfna na odprti množici Ω. Če pišemo

$$f = u + iv, \quad \text{t.j.} \quad \mathrm{f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)},$$

kjer je $z = x + \mathrm{iy}$, imata funkciji u in v zvezne parcialne odvode prvega reda na Ω in veljajo Cauchy Riemannove enačbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

povsod na Ω oziroma, ekvivalentno

diferencial $\mathsf{D(f)}$ je kompleksno linearna preslikava na $\mathbb{C}$.

Če je f v kompleksnem smislu odvedljiva v točki a, je zvezna v točki a. Torej holomorne funkcije so zvezne funkcije. Nadalje, holomorfne funkcije so neskončnokrat odvedljive na Ω in odvodi $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, so zvezne funkcije na Ω. Torej, odvodi $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ so holomorfne funkcije na Ω.

- Bijektivna holomorfna funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ ima holomorfen inverz.

- Bijektivna holomorfna funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ ima holomorfen inverz.
- Ali velja analog tudi za realne funkcije realne spremenljivke?

- Bijektivna holomorfna funkcija $f : \Omega \to \Omega'$ ima holomorfen inverz.
- Ali velja analog tudi za realne funkcije realne spremenljivke?
- Odgovor: Ne. Npr. $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je bijektivna odvedljiva funkcija. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ni odvedljiva v točki 0.

Primeri holomorfnih funkcij

- $f(z) \equiv c$ je holomorfna na $\mathbb{C}$. $f(z) = z$ je holomorfna na $\mathbb{C}$ in $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{z+h-z}{z} = 1$.
- Polinomi v $\mathbb{C}$ so holomorfni povsod na $\mathbb{C}$.
- Kvocienti polinomov (racionalne funkcije) so holomorfni povsod na $\mathbb{C}$, razen tam, kjer ima imenovalec ničlo, npr. $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Opis holomorfnosti s pomočjo razvoja v potenčno vrsto

- Pravimo, da je v okolici točke $a \in \Omega$ mogoče f razviti v potenčno vrsto, če obstajajo $r > 0$ in $c_0, c_1, c_2, , ,$ (seveda odvisni od a), da je

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \Delta(a,r),$$

  t.j. ta vrsta konvergira na $\Delta(a,r)$ in njena vsota je za vsak $z \in \Delta(a,r)$ enaka $f(z)$. Tedaj je f v kompleksnem smislu odvedljiva na $\Delta(a,r)$

in velja

- $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_k (z-a)^{n-1}, \quad z \in \Delta(a,r),$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in \Delta(a,r),$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

in velja

- $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_k(z-a)^{n-1}, \quad z \in \Delta(a,r),$$
  $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-1}, \quad z \in \Delta(a,r),$$
  $$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Velja tudi obratno: Naj bo $a \in \Omega$ in f holomrfna na Ω. Tedaj je mogoče f v okolici a razviti v konvergentno potenčno vrsto. Ta vrsta zagotovo konvergira na največjem krogu $\Delta(a,r)$ vsebovanem v območju Ω in povsod na $\Delta(a,r)$ je njena vsota $f(z)$.

Primeri vrst definiranih s potenčno vrsto

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots ,$$

ki konvergirajo povsod na $\mathbb{C}$.

- $f(z) = e^z = e^x e^{\mathrm{iy}} = e^x\left(cosy + \mathrm{i}\sin \mathrm{y}\right).$
  $|e^z| = e^{\mathrm{Rez}} = e^x \neq 0.$
  $e^{z+2k\pi \mathrm{i}} = e^z$, $e^{2k\pi \mathrm{i}} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$,
  e^z ni injektivna funkcija na $\mathbb{C}$.
  e^z je injektivna npr. na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
  $(e^z)' = e^z$.

- $f(z) = e^z = e^x e^{\mathrm{iy}} = e^x\left(cosy + \mathrm{i}\sin \mathrm{y}\right).$
  $|e^z| = e^{\mathrm{Rez}} = e^x \neq 0.$
  $e^{z+2k\pi\mathrm{i}} = e^z,\ e^{2k\pi\mathrm{i}} = 1,\ k \in \mathbb{Z},$
  e^z ni injektivna funkcija na $\mathbb{C}$.
  e^z je injektivna npr. na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
  $(e^z)' = e^z$.
- Funkcija logaritem: $\log z$

$$e^{\log z} = z,$$

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg \mathrm{z} + \mathrm{i2k}\pi,$$

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

  Glavna veja logaritma je

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \quad \arg z \in (0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

- $f(z) = e^z = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x\,(cosy + \mathrm{i}\sin \mathrm{y})$.
  $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z} = e^x \neq 0$.
  $e^{z+2k\pi \mathrm{i}} = e^z$, $e^{2k\pi\mathrm{i}} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$,
  e^z ni injektivna funkcija na $\mathbb{C}$.
  e^z je injektivna npr. na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
  $(e^z)' = e^z$.
- Funkcija logaritem: $\log z$

$$e^{\log z} = z,$$

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg \mathrm{z} + \mathrm{i}2\mathrm{k}\pi,$$

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

  Glavna veja logaritma je

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \quad \arg z \in (0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

- Glavna veja logaritma $\log z$ in e^z sta druga drugi inverzni funkciji na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Ne, npr. $f(x) = \sin x$ je neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in omejena.

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Ne, npr. $f(x) = \sin x$ je neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in omejena.
- Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ injektivna holomorfna funkcija. Potem je $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in \Omega$.

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Ne, npr. $f(x) = \sin x$ je neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in omejena.
- Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ injektivna holomorfna funkcija. Potem je $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in \Omega$.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Ne, npr. $f(x) = \sin x$ je neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in omejena.
- Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ injektivna holomorfna funkcija. Potem je $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in \Omega$.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Odgovorx: Ne, $f(x) = x^3$ je injektivna funkcija na $\mathbb{R}$, toda $f'(0) = 0$.

- Funkcija, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ in je omejena, je konstantna.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Ne, npr. $f(x) = \sin x$ je neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in omejena.
- Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ injektivna holomorfna funkcija. Potem je $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in \Omega$.
- Ali obstaja analog za realne funkcije?
- Odgovorx: Ne, $f(x) = x^3$ je injektivna funkcija na $\mathbb{R}$, toda $f'(0) = 0$.
- Naj bo $f : \Omega \to \Omega'$ holomorfna funkcija in naj bo $f'(a) \neq 0$. Potem je f injektivna na neki okolici točke a.

- Holomorna funkcija, ki ni enaka konstanti, odprte množice preslika v odprte množice. Torej nekonstantna holomorfna funkcija je odprta preslikava.

- Holomorna funkcija, ki ni enaka konstanti, odprte množice preslika v odprte množice. Torej nekonstantna holomorfna funkcija je odprta preslikava.
- Vprašanje: Ali lahko podobno trdimo tudi za realne funkcije ene realne sprmenljivke?

- Holomorna funkcija, ki ni enaka konstanti, odprte množice preslika v odprte množice. Torej nekonstantna holomorfna funkcija je odprta preslikava.
- Vprašanje: Ali lahko podobno trdimo tudi za realne funkcije ene realne sprmenljivke?
- Odgovor:Ne, $f(x) = x^2$ realno os (odprto množico) preslika v $[0, \infty)$, torej ni odprta.

- Holomorna funkcija, ki ni enaka konstanti, odprte množice preslika v odprte množice. Torej nekonstantna holomorfna funkcija je odprta preslikava.
- Vprašanje: Ali lahko podobno trdimo tudi za realne funkcije ene realne sprmenljivke?
- Odgovor:Ne, $f(x) = x^2$ realno os (odprto množico) preslika v $[0, \infty)$, torej ni odprta.
- Holomorfno funkcijo $f : \Omega \to \Omega'$, ki je bijektivna imenujemo biholomorfna funkcija (ali konformna) funkcija.

Kaj je konformnost?

- Naj bosta z_1,z_2 neničelni komplkesni števili, ki ju predstavimo kot vektorja. Orientiran kot med njima je število θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ za katerega velja

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{|z_2||z_1|},$$

oziroma

$$\theta = \arg z_2 - \arg z_1 .$$

Kaj je konformnost?

- Naj bosta z_1,z_2 neničelni komplkesni števili, ki ju predstavimo kot vektorja. Orientiran kot med njima je število θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ za katerega velja

$$e^{i\theta} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{|z_2||z_1|},$$

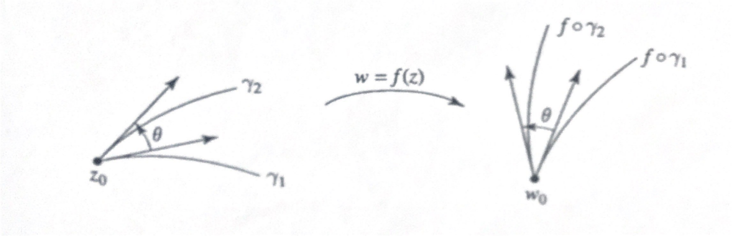
oziroma

$$\theta = \arg z_2 - \arg z_1.$$

- Naj bosta $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ gladki krivulji, ki se sekata v točki a. Kot med njima je orientiran kot med njunima tangentama v točki a.

Naj bo $f = u + \mathrm{iv} : \Omega \to \mathbb{C}$. Naj bo f injektivna in razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a. Funkcija f je **konformna** v točki a, če v točki a ohranja orientirane kote, kar pomeni:

- če imamo dve gladki krivulji $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ skozi točko a, katerih tangenti oklepata kot φ, potem imata sliki $f(\mathcal{L}_1)$ in $f(\mathcal{L}_2)$ v točki $f(a)$ neničelni tangenti, ki oklepata isti kot φ in smisel vrtenja se ohranja.


$w = f(z)$
γ_2
γ_1
θ
z_0
$f \circ \gamma_2$
$f \circ \gamma_1$
θ
w_0

Velja: Naj bo $f = u + \mathrm{iv} : \Omega \to \mathbb{C}$. Naj bo f razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a.

- Naj bo $(DF)(a) \neq 0$ (gledano kot preslikava iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$) Če je f konformna v točki a, potem $f'(a)$ obstaja v točki a in velja $f'(a) \neq 0$.

- Holomorfna preslikava, katere odvod je od nič različen, je torej konformna preslikava.

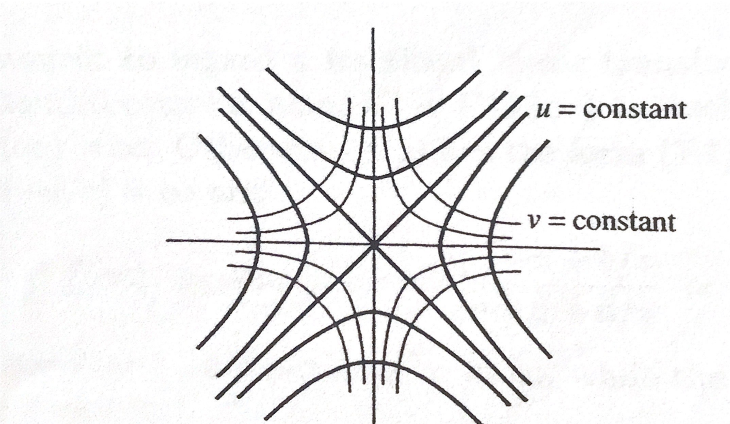
- Holomorfna preslikava, katere odvod je od nič različen, je torej konformna preslikava.
- Naj bo f injektivna homorfna preslikava na Ω. Potem je f konformna preslikava, saj je zaradi injektivnosti odvod povsod različen od nič.

- Holomorfna preslikava, katere odvod je od nič različen, je torej konformna preslikava.
- Naj bo f injektivna homorfna preslikava na Ω. Potem je f konformna preslikava, saj je zaradi injektivnosti odvod povsod različen od nič.
- Injektivne holomorfne preslikave preslikajo ortogonalne krivulje v ortogonalne krivulje in ortogonalne družine krivulj v otrogonalne družine.

- Holomorfna preslikava, katere odvod je od nič različen, je torej konformna preslikava.
- Naj bo f injektivna homorfna preslikava na Ω. Potem je f konformna preslikava, saj je zaradi injektivnosti odvod povsod različen od nič.
- Injektivne holomorfne preslikave preslikajo ortogonalne krivulje v ortogonalne krivulje in ortogonalne družine krivulj v otrogonalne družine.

- Naj bo $f = u + \mathrm{iv} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo $z_0 \in \Omega$ in naj bo $f'(z_0) \neq 0$. Tedaj se krivulji $\Gamma_1 = \{z \in \Omega; u(z) = u(z_0)\}$ in $\Gamma_2 = \{z \in \Omega; v(z) = v(z_0)\}$ sekata v točki z_0 ortogonalno.

Npr: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{ixy}$.



Integrali po usmerjeni krivulji v $\mathbb{C}$

Naj bo Γ gladka krivulja in $f = u + \mathrm{i}v$ zvezna kompleksna funkcija na Γ. Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrizacija krivulje Γ. Po krivulji potujemo v smeri naraščajočega parametra.

- Definirajmo

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b u(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{v}(\gamma(\mathrm{t}))\dot{\gamma}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

Opomba: Če smer obrnemo, se integral pomnoži z -1.

Integrali po usmerjeni krivulji v $\mathbb{C}$

Naj bo Γ gladka krivulja in $f = u + \mathrm{i}\mathrm{v}$ zvezna kompleksna funkcija na Γ. Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrizacija krivulje Γ. Po krivulji potujemo v smeri naraščajočega parametra.

- Definirajmo

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b u(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{v}(\gamma(\mathrm{t}))\dot{\gamma}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

  Opomba: Če smer obrnemo, se integral pomnoži z -1.

- Naj bo $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ in $\Gamma = b\Delta(a, r)$.
  $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{it}}$, $t \in [0, 2\pi]$ je parametrizacija krožnice.
  $\dot{\gamma}t) = r\mathrm{i}e^{\mathrm{it}}$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{\mathrm{it}})\mathrm{i}re^{\mathrm{it}}\,\mathrm{dt} = \cdots$$

Primitivna funkcija

Naj bo f holomorfna funkcija na Ω in naj bo $F : \Omega \to \mathbb{C}$.

- Funkcija F je primitivna funkcija funkcije f, če velja $F'(z) = f(z)$ povsod na Ω.

Primitivna funkcija

Naj bo f holomorfna funkcija na Ω in naj bo $F : \Omega \to \mathbb{C}$.

- Funkcija F je primitivna funkcija funkcije f, če velja $F'(z) = f(z)$ povsod na Ω.
- Primitivna funkcija je v kompleksnem smislu odvedljiva, torej holomorfna in zanjo veljajo Cauchy Riemannove enačbe.

Naj ima holomorfna funkcija f primitivno funkcijo F.

- Naj bo Γ gladek lok vsebovan v Ω s parametrizacijo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Tedaj je

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Naj ima holomorfna funkcija f primitivno funkcijo F.

- Naj bo Γ gladek lok vsebovan v Ω s parametrizacijo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Tedaj je

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

- Če je Γ gladka enostavno sklenjena krivulja, vsebovana v Ω, je

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

.

Obstoj primitivne funkcije

Naj bo f holomorfna funkcija na Ω.

- Če je $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, za vsako gladko enostavno sklenjeno krivuljo v Ω, ima f primitivno funkcijo F.

Obstoj primitivne funkcije

Naj bo f holomorfna funkcija na Ω.

- Če je $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, za vsako gladko enostavno sklenjeno krivuljo v Ω, ima f primitivno funkcijo F.
- Pogoj
$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$
za vsako gladko enostavno sklenjeno krivuljo v Ω pomeni, da je integral
$$\int_\lambda f(z)\, dz$$
neodvisen od krivulje λ in je odvisen le od začente in končne točke krivulje λ.

Obstoj primitivne funkcije

Naj bo f holomorfna funkcija na Ω.

- Če je $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, za vsako gladko enostavno sklenjeno krivuljo v Ω, ima f primitivno funkcijo F.
- Pogoj
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$
za vsako gladko enostavno sklenjeno krivuljo v Ω pomeni, da je integral
$$\int_\lambda f(z)\,dz$$
neodvisen od krivulje λ in je odvisen le od začetne in končne točke krivulje λ.
- Naj bo Ω povezana odprta množica in $a \in \Omega$. Primitivno funkcijo
$$F(z) = \int_{\lambda_{a,z}} f(\xi)\,d\xi, \quad z \in \Omega$$
kjer je $\lambda_{a,z} \subset \Omega$ poljuben gladek lok od točke a do točke z.

Primer holomorfne funkcije, ki nima primitivne funkcije

- Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfna na kolobarju $\Delta(0,2) \setminus \overline{\Delta}(0,\frac{1}{2})$.

Primer holomorfne funkcije, ki nima primitivne funkcije

- Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfna na kolobarju $\Delta(0,2) \setminus \overline{\Delta}(0, \frac{1}{2})$.
- Integral funkcije f po krožnici $b\Delta$ ni enak nič.

Primer holomorfne funkcije, ki nima primitivne funkcije

- Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfna na kolobarju $\Delta(0,2) \setminus \overline{\Delta}(0, \frac{1}{2})$.
- Integral funkcije f po krožnici $b\Delta$ ni enak nič.
- Torej $f(z) = \frac{1}{z}$ na kolobarju nima primitivne funkcije.

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b\Delta} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Na $\mathbb{C} \setminus [o, \infty)$ ima funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ primitivno funkcijo $F(z) = \log z$.

Na enostavno povezanem območju Ω ima vsaka holomorfna funkcija f primitivno funkcijo F in za vsak gladek lok $\lambda_{A,B}$ vsebovano v Ω z začetno točko A in končno točko B velja

$$\int_{\lambda_{A,B}} f(z)\,dz = F(B) - F(A).$$

Opis holomorfnosti s Cauchyjevim pogojem

Cauchyjev izrek: Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija na Ω. Funkcija f je holomorfna natanko tedaj, ko je

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $\Gamma \subset \Omega$, za katero je območje, ki ga omejuje vsebovano povsem v množici Ω.

Sprememba argumenta funkcije vzdolž usmerjene krivulje

Naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gladka usmerjena krivulja in $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija.

Sprememba argumenta funkcije vzdolž usmerjene krivulje

Naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gladka usmerjena krivulja in $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija.

- Lahko zapišemo $f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{\mathrm{i}\beta(\mathrm{t})}$, $t \in [a, b]$, kjer je $\beta(t)$ zvezna na $[a, b]$.

Sprememba argumenta funkcije vzdolž usmerjene krivulje

Naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gladka usmerjena krivulja in $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija.

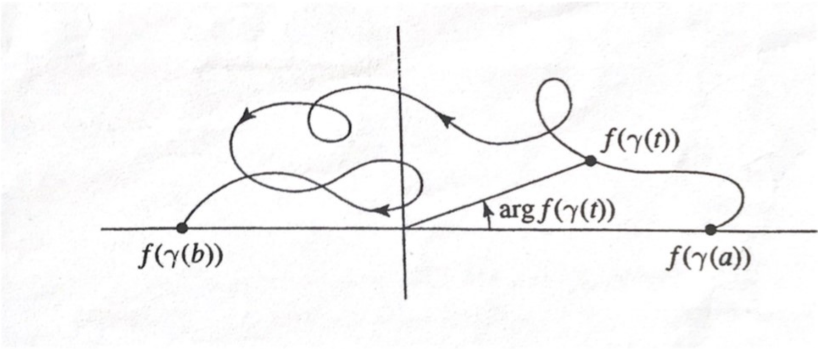
- Lahko zapišemo $f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{\mathrm{i}\beta(\mathrm{t})}$, $t \in [a, b]$, kjer je $\beta(t)$ zvezna na $[a, b]$.
- Funkcjo β imenujemo argument funkcije f, $\beta = \arg f$.

Sprememba argumenta funkcije vzdolž usmerjene krivulje

Naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gladka usmerjena krivulja in $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija.

- Lahko zapišemo $f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{\mathrm{i}\beta(\mathrm{t})}$, $t \in [a, b]$, kjer je $\beta(t)$ zvezna na $[a, b]$.
- Funkcjo β imenujemo argument funkcije f, $\beta = \arg f$.
- Funkcija β ni enolično določena (določena je do mnogokratnika 2π natančno).
- Sprememba argumenta funkcije f vzdolž krivulje Γ je število $\int_\Gamma d \arg(f(z)) = \arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a)) = \beta(b) - \beta(a)$.

$\int_{\Gamma} d\arg(f(z)) = \arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a)) = \pi.$



- Izračunajmo variacijo argumenta funkcije $f(z) = (z-a)^n$ vzdolž krožnice $b\Delta(a, r)$ orientirane v nasprotni smeri ure.

- Izračunajmo variacijo argumenta funkcije $f(z) = (z-a)^n$ vzdolž krožnice $b\Delta(a,r)$ orientirane v nasprotni smeri ure.
- Parametrizirajmo krožnico $b\Delta(a,r)$ na naslednji način: $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{it}}$, $0 \le t \le 2\pi$. Potem $f(\gamma(t)) = r^n e^{\mathrm{int}}$, in $\beta(t) = \arg f(t) = nt$, $0 \le t \le 2\pi$.

- Izračunajmo variacijo argumenta funkcije $f(z) = (z - a)^n$ vzdolž krožnice $b\Delta(a, r)$ orientirane v nasprotni smeri ure.
- Parametrizirajmo krožnico $b\Delta(a, r)$ na naslednji način: $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{it}}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Potem $f(\gamma(t)) = r^n e^{\mathrm{int}}$, in $\beta(t) = \arg f(t) = nt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- Torej $\int_{b\Delta(a,r)} d \arg(f(z)) = \beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi n$.

Princip argumenta

Naj bo f holomorfna na Ω.

- Tedaj za vsak $r > 0$, tak da je $\overline{\Delta}(a, r) \subset \Omega$ velja:

  če je $f \neq 0$ na $b\Delta_{(}a, r)$, potem je $\int_{b\Delta(a,r)} d\arg(f(z)) \geq 0$, K

  kjer je krožnica $b\Delta(a, r)$ orientirana pozitivno.
- Število $\frac{1}{2\pi} \int_{b\Delta(a,r)} d\arg(f(z))$ je enako stevilu ničel funkcije f znotraj kroga $\Delta(a, r)$ štetih z večkratnostjo. Pri tem je krožnica $b\Delta(a, r)$ orientirana pozitivno.

Opis holomorfnosti s spremembo argumenta

Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ razreda $\mathcal{C}^1$.

- Naj velja za vse dovolj majhne $r > 0$, take, da je $\overline{\Delta}(a, r) \subset \Omega$ in za vse c, $d \in \mathbb{C}$ velja

  čim je $(f(z) + cz + d) \neq 0$ na robu $b\Delta_(a, r)$,
  potem je $\int_{b\Delta(a,r)} d\arg(f(z) + cz + d) \geq 0$.

  Krožnice $b\Delta(a, r)$ so orientirane pozitivno. Tedaj je f v kompleksnem smislu odvedljiva v točki a.

Opis hololmorfnosti s Cauchyjevim integralom

Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija razreda $\mathbb{C}^1$.

- Funkcija f je holomorfna natanko tedaj, ko velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \Delta(a,r)$$

  za vse a, $r > 0$ za katere je $\overline{\Delta}(a,r) \subset \mathbb{C}$. Rob $b\Delta(a,r)$ je orientiran pozitivno.

Opis hololmorfnosti s Cauchyjevim integralom

Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija razreda $\mathbb{C}^1$.

- Funkcija f je holomorfna natanko tedaj, ko velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \Delta(a,r)$$

  za vse a, $r > 0$ za katere je $\overline{\Delta}(a,r) \subset \mathbb{C}$. Rob $b\Delta(a,r)$ je orientiran pozitivno.

- Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1}}\, d\xi, \quad z \in \Delta(a,r).$$

Robne vrednosti holomorfnih funkcij

Naj bo Ω odprta množica v ravnini in naj bo rob $b\Omega$ unija končno mnogo enostavno sklenjenih gladkih krivulj. Naj bo $f : b\Omega \to \mathbb{C}$.

- Funkcija f je robna vrednost holomorfne funkcije na Ω, če obstaja funkcija F, ki je holomorfna na Ω in zvezna na $\overline{\Omega}$ in je $F = f$ na $b\Omega$.

Robne vrednosti holomorfnih funkcij

Naj bo Ω odprta množica v ravnini in naj bo rob $b\Omega$ unija končno mnogo enostavno sklenjenih gladkih krivulj. Naj bo $f : b\Omega \to \mathbb{C}$.

- Funkcija f je robna vrednost holomorfne funkcije na Ω, če obstaja funkcija F, ki je holomorfna na Ω in zvezna na $\overline{\Omega}$ in je $F = f$ na $b\Omega$.
- Vprašanje: Kako lahko robne vrednosti holomorfnih funkcij opišemo, kakšnim pogojem mora zadoščati funckija f?

Plemljeve formule

Naj bo Γ gladka enostavno sklenjena krivulja. Označimo z Ω območje, ki ga krivulja Γ omejuje. Krivuljo Γ orientiramo pozitivno, to je, ko potujemo po krivulji v pozitivni smeri, je območje Ω na levi strani.

- Naj bo $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ odvedljiva funkcija in

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

  Cauchyjev integral funkcije f po krivulji Γ. Funkcija $F(z)$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in je v neskončnosti enaka 0.

Plemljeve formule

Naj bo Γ gladka enostavno sklenjena krivulja. Označimo z Ω območje, ki ga krivulja Γ omejuje. Krivuljo Γ orientiramo pozitivno, to je, ko potujemo po krivulji v pozitivni smeri, je območje Ω na levi strani.

- Naj bo $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ odvedljiva funkcija in

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

  Cauchyjev integral funkcije f po krivulji Γ. Funkcija $F(z)$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in je v neskončnosti enaka 0.

- Definirajmo funkciji:

$$F^+(z) = F(z), z \in \Omega,$$

$$F^-(z) = F(z), z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

- Plemljeve formule o skoku: Za vsako točko $z_0 \in \Gamma$ obstajata limiti $F^+(z_0)$ in $F^-(z_0)$ funkcije F^+ oziroma F^-, ko se točka z približuje $z_0 \in \Gamma$ po Ω oziroma po $\mathbb{C} \setminus \Omega$, in zanju velja
$$F^+(z_0) - F^-(z_0) = f(z_0).$$

- Plemljeve formule o skoku: Za vsako točko $z_0 \in \Gamma$ obstajata limiti $F^+(z_0)$ in $F^-(z_0)$ funkcije F^+ oziroma F^-, ko se točka z približuje $z_0 \in \Gamma$ po Ω oziroma po $\mathbb{C} \setminus \Omega$, in zanju velja

$$F^+(z_0) - F^-(z_0) = f(z_0).$$

- Razlika oziroma ¨skok¨ med limitama $F^+(z_0)$ in $F^-(z_0)$ na Γ je enaka natanko vrednosti funkcije f v točki z_0.

- Plemljeve formule o skoku: Za vsako točko $z_0 \in \Gamma$ obstajata limiti $F^+(z_0)$ in $F^-(z_0)$ funkcije F^+ oziroma F^-, ko se točka z približuje $z_0 \in \Gamma$ po Ω oziroma po $\mathbb{C} \setminus \Omega$, in zanju velja

$$F^+(z_0) - F^-(z_0) = f(z_0).$$

- Razlika oziroma ¨skok¨ med limitama $F^+(z_0)$ in $F^-(z_0)$ na Γ je enaka natanko vrednosti funkcije f v točki z_0.
- Funkciji F^+ in F^- se tudi zvezno razširita na $\bar{\Omega}$ oziroma $\mathbb{C} \setminus \Omega$ in

$$F^+ - F^- = f \qquad \text{na}\, \Gamma.$$

Funkcija f je robna vrednost holomorfne funkcije natanko tedaj, ko je $F^- \equiv 0$, t. j. natanko tedaj, ko je

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$$

in tedaj je F^+ holomrfna na Ω, F^+ se zvezno razširi na $\overline{\Omega}$ in $F^+ = f$ na Γ.

- V primeru, ko je funkcija f samo zvezna na Γ, ni nujno, da se F^+ in F^- zvezno razširita na $\overline{\Omega}$ oziroma $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Tedaj velja F^+ se zvezno razširi na $\overline{\Omega}$ natanko takrat, ko se F^- zvezno razširi iz $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ na $\mathbb{C} \setminus \Omega$ in v primeru razširitve velja

$$F^+ - F^- = f \qquad \text{na}\, \Gamma.$$

.

- V primeru, ko je funkcija f samo zvezna na Γ, ni nujno, da se F^+ in F^- zvezno razširita na $\overline{\Omega}$ oziroma $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Tedaj velja F^+ se zvezno razširi na $\overline{\Omega}$ natanko takrat, ko se F^- zvezno razširi iz $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ na $\mathbb{C} \setminus \Omega$ in v primeru razširitve velja

$$F^+ - F^- = f \qquad \mathrm{na}\,\Gamma.$$

.

- Tako tudi v primeru zvezne funkcije f na $b\Omega$ velja: f je robna vrednost holomorfne funkcije na Ω natanko tedaj, ko je

$$F^-(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$$

in F^+ je holomrofna funkcija na Ω, ki se zvezno razširi na $\overline{\Omega}$ in je $F = f$ na $b\Omega$.

Robne vrednosti holomrfnih funkcij in sprememba argumenta

Novejši izrek:

(J. Globevnik, Holomorphic Extendibility and the Argument Principle, Contemoporary Math, vol. 382, 2005)

- Rob $b\Delta$ naj bo orientiran pozitivno. Naj bo $f : b\Delta \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Funkcija f je robna vrednost holomorfne funkcije natanko tedaj, ko za vsak polinom p velja

  če je $(f + P) \neq 0$ na $b\Delta$,
  potem je $\int_{b\Delta} d \arg(f(z) + p(z)) \geq 0$.

HVALA ZA POZORNOST