Numerično reševanje nelinearnih enačb

FMF seminar za učitelje matematike

Jan Grošelj

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

21. januar 2023

Bisekcija

Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki je v robovih intervala nasprotno predznačena: $f(a)f(b) < 0$.

Bisekcija

Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki je v robovih intervala nasprotno predznačena: $f(a)f(b) < 0$.

Naj bo $d = b - a$ in naj bodo točke x_r, $r = 1, 2, \ldots$, določene po naslednjem postopku, začenši z $r = 1$:

- $d = \frac{1}{2}d$;
- $x_r = a + d$;
- če je $f(a)f(x_r) > 0$, naj bo $a = x_r$;
- povečaj r za 1 in se vrni na prvi korak.

Bisekcija

Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki je v robovih intervala nasprotno predznačena: $f(a)f(b) < 0$.

Naj bo $d = b - a$ in naj bodo točke x_r, $r = 1, 2, \ldots$, določene po naslednjem postopku, začenši z $r = 1$:

- $d = \frac{1}{2}d$;
- $x_r = a + d$;
- če je $f(a)f(x_r) > 0$, naj bo $a = x_r$;
- povečaj r za 1 in se vrni na prvi korak.

Potem je $|x_r - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^r}$, kjer je $\alpha \in (a, b)$ ničla funkcije f.

Posledično:

- $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$,
- za $\varepsilon \in (0, b - a]$ je $|x_r - \alpha| \leq \varepsilon$, če je $r \geq \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})$.

Navadna iteracija

Naj bo g realna funkcija.

- Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ negibna točka funkcije g: $g(\alpha) = \alpha$.
- Naj bo g na intervalu $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ za nek $\delta > 0$ skrčitev: obstaja konstanta $m \in [0,1)$, da za vsaki točki $x, y \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ velja $|g(x) - g(y)| \leq m|x - y|$.

Potem za vsak $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ zaporedje s členi

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r = 0, 1, \ldots,$$

konvergira k α, to je $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$.

Navadna iteracija

Naj bo g realna funkcija.

- Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ negibna točka funkcije g: $g(\alpha) = \alpha$.
- Naj bo g na intervalu $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ za nek $\delta > 0$ skrčitev: obstaja konstanta $m \in [0, 1)$, da za vsaki točki $x, y \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ velja $|g(x) - g(y)| \leq m\,|x - y|$.

Potem za vsak $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ zaporedje s členi

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r = 0, 1, \ldots,$$

konvergira k α, to je $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$.

Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ veljata oceni:

- $|x_r - \alpha| \leq m^r\,|x_0 - \alpha|$,
- $|x_{r+1} - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}\,|x_{r+1} - x_r|$.

Tangentna metoda

Naj bo f odvedljiva funkcija v točki x. Potem obstaja funkcija h, da velja

$$f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + h(\alpha)(\alpha - x)$$

in $\lim_{\alpha \to x} h(\alpha) = 0$.

Če je α ničla funkcije f, za x blizu α velja

$$\alpha \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

in nadejamo se, da lahko α izračunamo z iteracijsko funkcijo $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Tangentna metoda

Naj bo f odvedljiva funkcija v točki x. Potem obstaja funkcija h, da velja

$$f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + h(\alpha)(\alpha - x)$$

in $\lim_{\alpha \to x} h(\alpha) = 0$.

Če je α ničla funkcije f, za x blizu α velja

$$\alpha \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

in nadejamo se, da lahko α izračunamo z iteracijsko funkcijo $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Če je funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva in je α enostavna ničla funkcije f, potem obstaja okolica I točke α in konstanta C, da za vsak $x_0 \in I$ za približke $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$, velja

$$|x_{r+1} - \alpha| \leq C \, |x_r - \alpha|^2 .$$

Sekantna metoda

Za odvod funkcije f v točki x_r velja

$$f'(x_r) \approx \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}},$$

zato se, podobno kot pri tangentni metodi, nadejamo, da lahko ničlo funkcije f izračunamo z iteracijo

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Analiza konvergence sekantne metode je bolj zapletena kot pri tangentni metodi, saj temelji na dveh prejšnjih približkih.