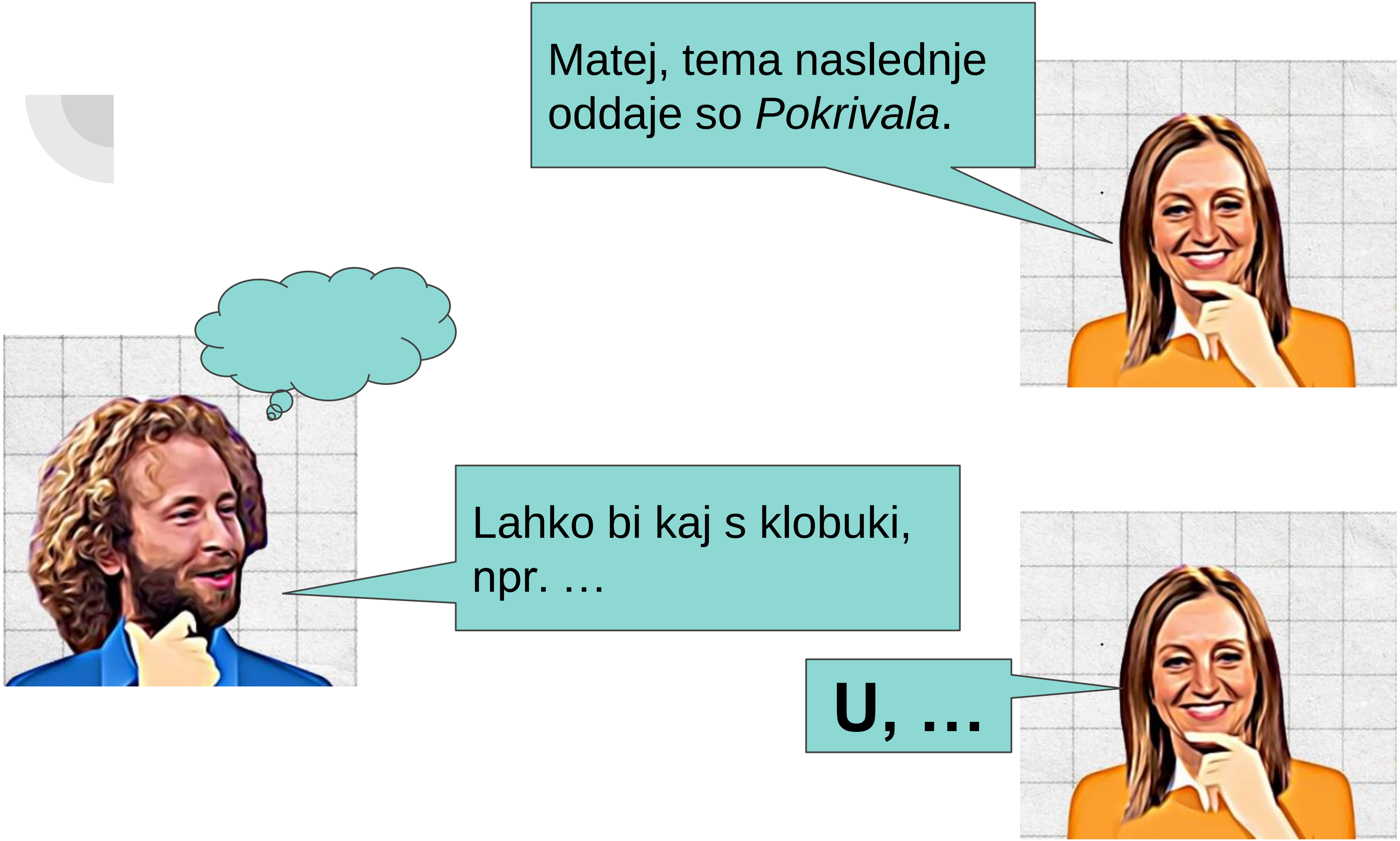
Uganka, ki manjka
(na sporedu)

Matej Petković
Fakulteta za matematiko in fiziko
Institut Jožef Stefan

Ugriznimo znanost

Vsak četrtek na prvem ugriznejo ustvarjalci v novo temo, stalnici v oddaji pa sta

- **MATEMATIČNA UGANKA,**
- FIZIKALNA UGANKA.


Matej, tema naslednje oddaje so *Pokrivala*.
Lahko bi kaj s klobuki, npr. …
U, …

Ločimo štiri primere

U, ... je enak

1. *U, to je že bilo.*
2. *U, to je prelahko.*

3. *U, ta mi je všeč!* → UGRIZNIMO ZNANOST
4. ***U, ta je pa pretežka.*** → ul-fmf/**izpit**

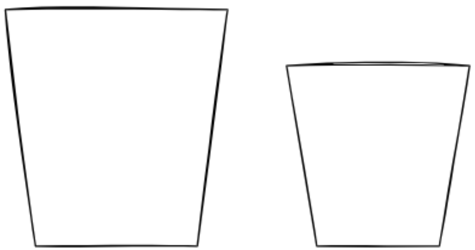
Naloge, ki jih bomo reševali

1. Glažek ni prazen
2. Igra lignja za matematike
3. Klobuki
4. Nemogoče je mogoče: naključno je bolje kot 0
5. Nemogoče je mogoče: ugani svoje število

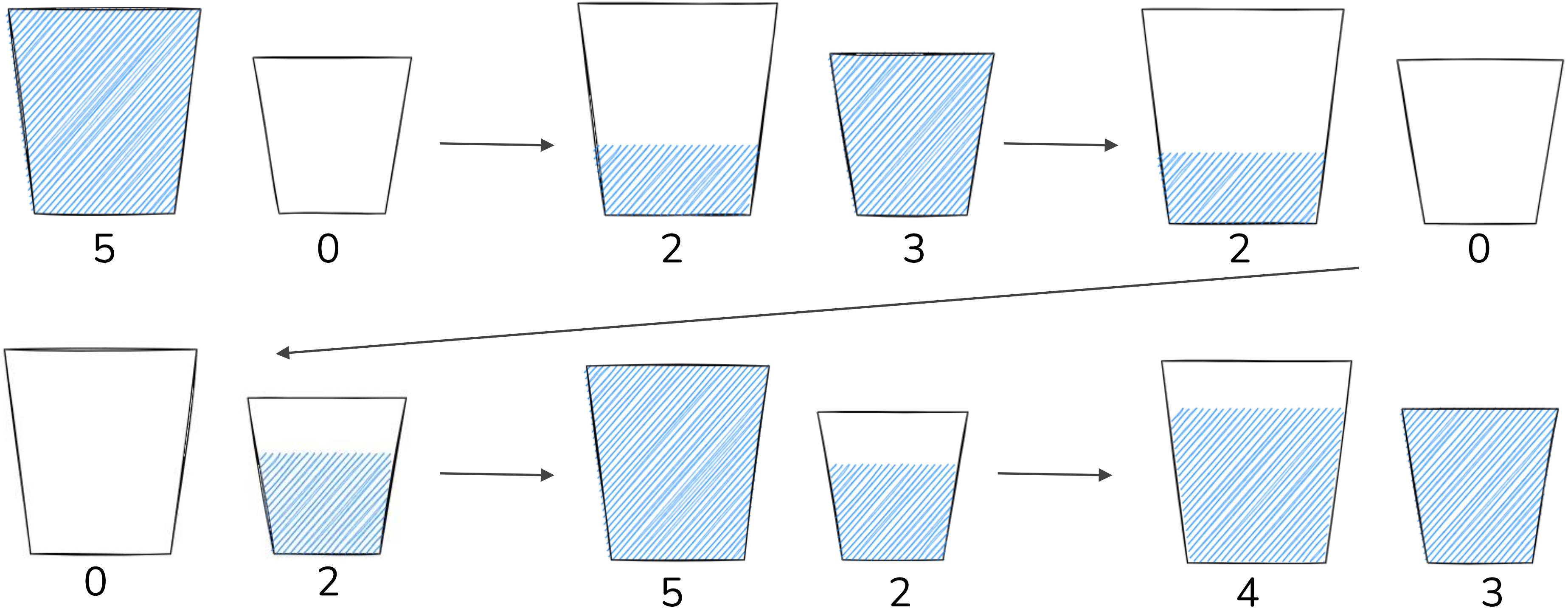
1. Glažek ni prazen [25 točk]

Prelivanje vode

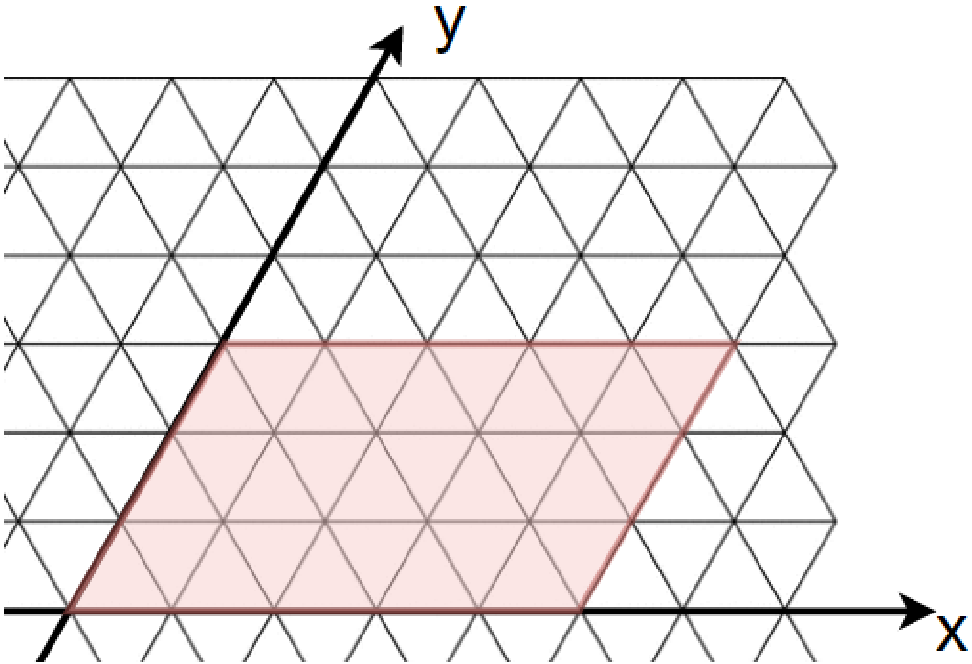
- Imamo dva kozarca s prostorninama 5 l in 3 l.
- Kako s prelivanjem pridemo do štirih litrov?
- Pozor: kozarca nimata oznak, zato mora biti po prelivanju vsaj en od kozarcev poln ali prazen

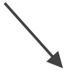


Zelo lahko!



Malo večji kozarci



-  : napolni 1
-  : napolni 2
-  : $1 \to 2$
- odbijamo se po diagramu

Zelo veliki kozarci

- Prostornina prvega je 2^{2023} litrov
- Prostornina drugega je $\prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p<2023}} p$ litrov (produkt praštevil pod 2023)

Ali lahko s prelivanjem v enem od kozarcev dobimo

A. 9 l?
B. 10 l?

Ideja rešitve

A. Dobimo lahko le večkratnike največjega skupnega delitelja prostornin kozarcev (***d* = *D*(V_1, V_2) = 2**).
B. Dobimo lahko VSE večkratnike ***d***.

Rešitev A

- Naj bosta V_1 in V_2 prostornini kozarcev
- Naj bosta a in b trenutni količini vode v kozarcih

1. Na začetku $a = b = 0 = 0 \cdot d$
2. Po prelivanju/odlivanju bosta prostornini vode v kozarcih še vedno večkratnika d

Rešitev A: indukcijski korak

Ločiti moramo naslednje primere:

- Vodo smo odlili iz 1. kozarca (ali iz 2. kozarca)
- Vodo smo prelili v smeri $1 \to 2$ (ali v smeri $2 \to 1$)
    - 1. kozarec smo izpraznili
    - 2. kozarec smo napolnili

Pred operacijo imamo stanje (***a***, ***b***), po njej pa (***a’***, ***b’***)

Rešitev B

- Zapišimo algoritem za prelivanje
- Dokažimo, da bomo z njim dejansko našli vse mogoče večkratnike ***d = 2***, se pravi tudi 10

Rešitev B: algoritem

Upoštevamo, da je 2. kozarec večji.

1. Napolni 2. kozarec
2. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
3. **Dokler** 2. kozarec ni prazen, **ponavljaj:**
    a. Izprazni prvi kozarec
    b. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
4. Pojdi na korak 1

Rešitev B: primer

Denimo, da je $V_1 = 5$ in $V_2 = 12$.

1. Napolni 2. kozarec
2. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
3. **Dokler** 2. kozarec ni prazen, **ponavljaj:**
    a. Izprazni prvi kozarec
    b. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
4. Pojdi na korak 1

Začetno stanje: (0, 0)

(0, 12),
(5, 7),
(0, 7), (5, 2),
(0, 2), (2, 0),

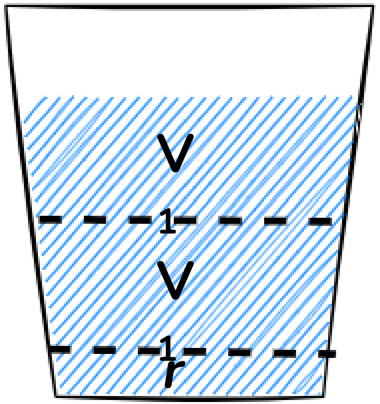
(2, 12),
(5, 9),
(0, 9), (5, 4),
(0, 4), (4, 0),

(4, 12),
...

Rešitev B: primer → splošno

- Količina vode v prvem kozarcu na koraku 1. je
  0, 2, 4, 1, 3,   0,   2 ...
  0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ...
  se pravi dobimo vse mogoče ostanke ***r*** pri deljenju s 5
- Nekje med izvajanjem koraka **3** je količina vode v drugem kozarcu enaka

$$r + k\, V_1,$$



se pravi lahko dobimo (izrek o deljenju) vse mogoče volumne med 0 in V_2.

Rešitev B

Za lažje pisanje se spomnimo kongruenc:

$a \equiv b \pmod{n}$ natanko tedaj, ko imata ***a in b isti ostanek pri deljenju z n.***

$$1 \equiv 6 \equiv -4 \equiv 1 + 5k \pmod{5},$$

kjer je ***k*** celo število.

Rešitev B

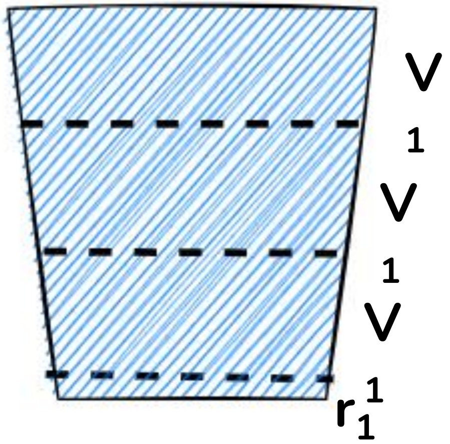
1. Napolni 2. kozarec
2. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
3. **Dokler** 2. kozarec ni prazen:
   a. Izprazni prvi kozarec
   b. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
4. Pojdi na korak 1

Začetno stanje: $(0, 0)$

$(0, V_2)$ $(V_1, V_2 - V_1)$
$(0, V_2 - V_1)$, $(V_1, V_2 - 2V_1)$,
...
$(V_1, V_2 - kV_1)$
...

Po zadnji ponovitvi zanke velja:
$0 \leq V_2 - k_1V_1 < V_1$. Naj bo $r_1 = V_2 - k_1V_1$

Opazimo: $r_1 \equiv V_2 \ (mod\ V_1)$



Rešitev B

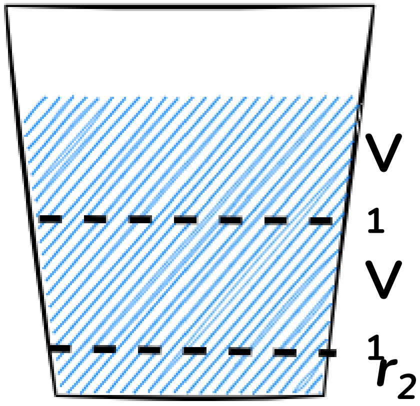
Od prej: $(r_1, 0)$

(r_1, V_2) $(V_1, V_2 - (V_1 - r_1))$
$(0, V_2 + r_1 - V_1)$, $(V_1, V_2 + r_1 - 2V_1)$,
...
$(V_1, V_2 + r_1 - kV_1)$

1. Napolni 2. kozarec
2. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
3. **Dokler** 2. kozarec ni prazen:
   a. Izprazni prvi kozarec
   b. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
4. Pojdi na korak 1

Po zadnji ponovitvi zanke velja: $0 \leq V_2 + r_1 - k_2V_1 < V_1$.
Naj bo $r_2 = V_2 + r_1 - k_2V_1$

Opazimo: $r_2 \equiv V_2 + r_1 \pmod{V_1}$, torej je $r_2 \equiv 2r_1 \pmod{V_1}$



Rešitev B

1. Napolni 2. kozarec
2. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
3. **Dokler** 2. kozarec ni prazen:
   a. Izprazni prvi kozarec
   b. Prelij vodo iz 2. v 1. kozarec
4. Pojdi na korak 1

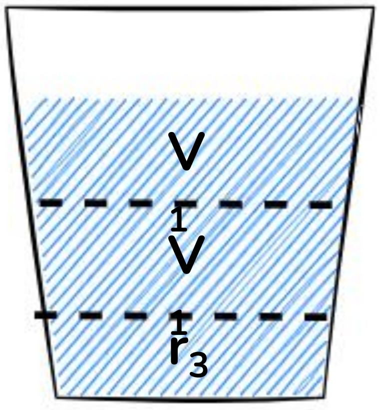
Od prej: $(r_2, 0)$

(r_2, V_2) $(V_1, V_2 - (V_1 - r_2))$

...

Po zadnji ponovitvi zanke velja: $0 \leq V_2 + r_2 - k_3V_1 < V_1$.

Naj bo $r_3 = V_2 + r_2 - k_3V_1$



Opazimo: $r_3 \equiv V_2 + r_2 \ (mod\ V_1)$, *torej je* $r_3 \equiv 3r_1 (mod\ V_1)$

Po n ponovitvah korakov 1-4 dobimo $r_n \equiv n\, r_1 (mod\ V_1)$.

Rešitev B: kateri ostanki

Dobimo lahko vsa možna naravna števila r, za katera velja

$$r \equiv n\, r_1 \pmod{V_1}$$

oz.

$$r = k\, V_1 + n\, r_1$$

kjer je k celo in n naravno število.

Rešitve linearne diofantske enačbe

TRDITEV: *Celoštevilska rešitev za enačbo* ***a x + b y = c*** *obstaja natanko tedaj, ko* ***d = D(a, b) deli c****.*

Dokaz:

⇒ Če je (x, y) rešitev, lahko zapišemo ***d a' x + d b' y = c****, torej* ***d|c****.*

⇐ Rešitev najdemo z Evklidovim algoritmom, kot je pokazano na desni.

$$
\begin{aligned}
12 &= 2 \cdot 5 + 2 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow d = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= 5 - 2 \cdot 2 \\
d &= 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5) \\
d &= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 12 \quad / \cdot m \\
md &= 5 \cdot \underbrace{3m}_{x} + 12 \cdot \underbrace{(-2m)}_{y}
\end{aligned}
$$

Rešitev B

Če je (x_0, y_0) rešitev c = ax + by, potem je rešitev tudi

$\boldsymbol{x = x_0 + bk, y_0 = y0 - bk}$, kjer je $\boldsymbol{k}$ celo število, se pravi je lahko ena od neznank naravno število.

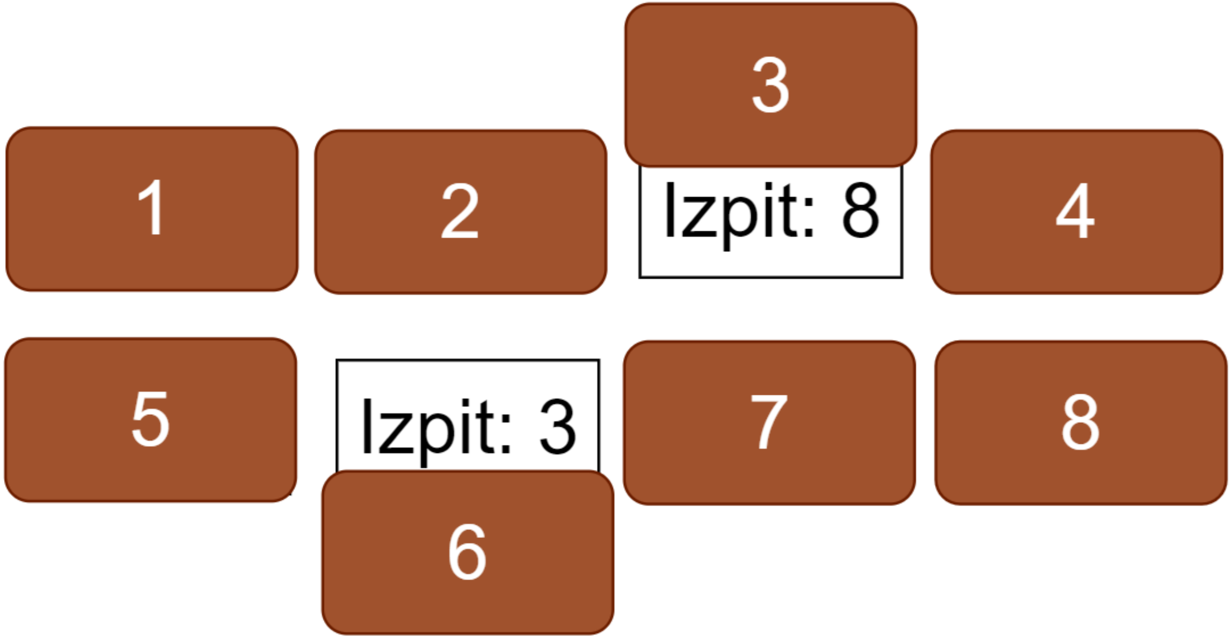
Torej obstaja taka ponovitev ***n*,** po kateri velja

$$\mathbf{10 \equiv n\, r_1\ (mod\ V_1)}$$

Mimogrede: $n = \underbrace{32632\ldots96205}_{609\ \text{mest}}$

2. Igra lignja [25 točk]

Škatle



Najdi svojo škatlo

- 100 študentov piše izpit. Po izpitu bodo ostali v predavalnici, pred njo pa bo profesor postavil 100 škatel, ki imajo na pokrovih vpisne številke pišočih.
- Profesor po izpitu pobere izpite in jih naključno razvrsti v škatle (v vsako enega), nato pa škatle pokrije.
- Študente enega po enega kliče iz predavalnice. Vsak lahko pogleda v polovico škatel in zatem tiho zapusti stavbo. Škatle potem spet pokrijemo.
- Če **vsi** študentje najdejo škatlo s svojim izpitom, so oproščeni ustnega izpita. Sicer ...

Kako naj odpirajo škatle, da bo **verjetnost končnega uspeha vsaj 1%**?

Razmislek

- Naj bodo vpisne številke kar 1, 2, ..., 100 = $\boldsymbol{n}$
- Razpored v škatle določa permutacijo $\boldsymbol{\pi}$: v škatli, ki ima na pokrovu številko $\boldsymbol{i}$, se skriva število $\boldsymbol{\pi(i)}$.

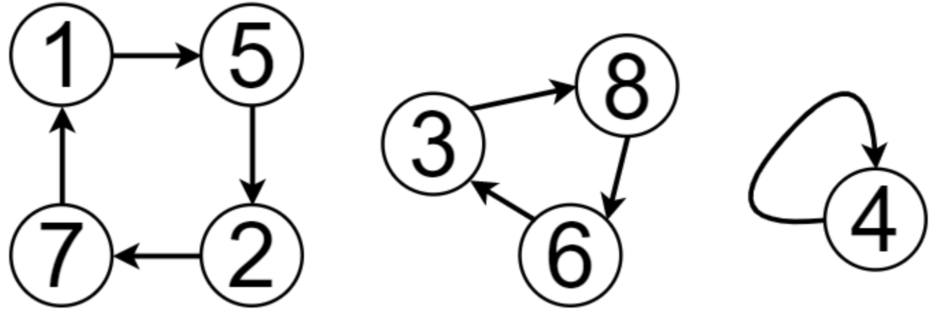
Kakšne taktike sploh obstajajo?

- naključno odpiranje
- po vrsti od leve proti desni
- ???

Rešitev

Študent s številko ***i*** naj začne pri škatli ***i***, nato pa sledi spodnjemu, dokler lahko:

- Odpre trenutno škatlo, kjer zagleda ***j***
- Če ***i = j, juhej!***
- Sicer: premakne naj se do škatle ***j***



Kako dobra je rešitev?

- Vsak študent preiskuje zgolj cikel permutacije, v katerem se nahaja njegovo število
- Vsi bodo uspeli, če permutacija ne vsebuje cikla dolžine več kot ***n / 2***
- P(uspeh) = delež dobrih permutacij = 1 - delež slabih
- Preštejmo slabe, vseh vemo, da je ***n!***

Kako dobra je rešitev?

Naj bo ***k > n / 2***. Cikel dolžine ***k*** je lahko največ en. Poljubno slabo permutacijo lahko zapišemo kot

$$\pi = \underbrace{(\_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_)}_{\text{cikel dolžine } k} \cdot \text{ poljubna permutacija } n - k \text{ elementov}$$

- cikel: izberemo $\binom{n}{k}$ elementov, ki bodo v njem; najmanjšega postavimo na prvo mesto (ker je ***(1 2 3) = (2 3 1)***), ostane nam pa še ***(k - 1)!*** vrstnih redov
- preostale elemente razvrstimo poljubno: ***(n - k)!*** možnosti

Kako dobra je rešitev?

$$\begin{aligned}
\mathrm{SLABE} &= \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!(n-k)! \\
&= \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(k-1)!(n-k)! \\
&= \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{n!}{k} \\
&= n! \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= n!\,(H(n) - H(n/2))
\end{aligned}$$

H(n) je n-to harmonično število
1/1 + 1/2 + … + 1/n,
česar dober približek je ***ln(n).***

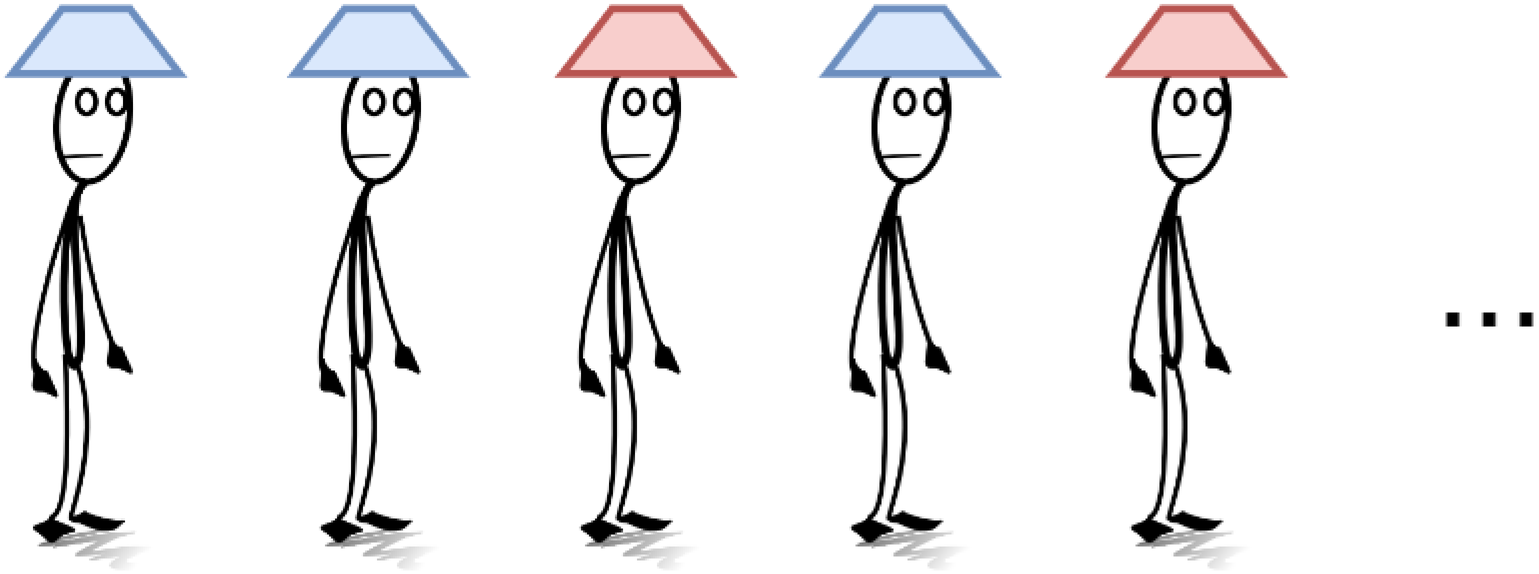
$$\begin{aligned}
P(\mathrm{uspeh}) &= 1 - \frac{\mathrm{SLABE}}{n!} \\
&\doteq 1 - (\ln n - \ln n/2) \\
&= 1 - ln2 \\
&\doteq 0{,}31
\end{aligned}$$

Kako dobra je rešitev?

- $7{,}9 \cdot 10^{-31} \ll 0{,}31$
- Tudi, ko gre $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{\infty}$, se verjetnost uspeha ne spremeni bistveno

3. Klobuki [25 točk]

Klobuki



Klobuki

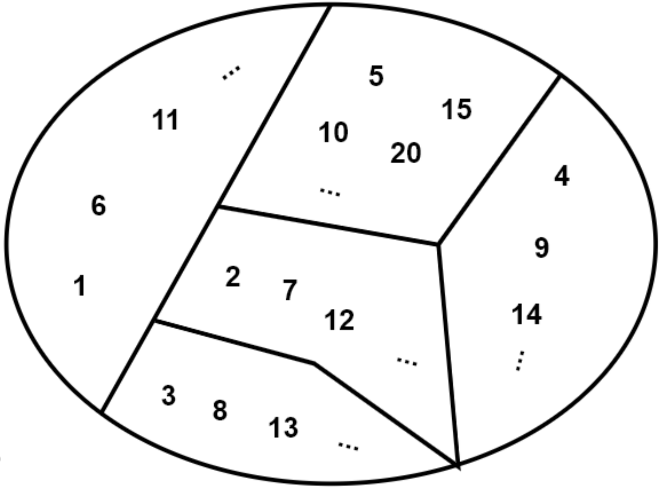
Neskončno na smrt obsojenih zapornikov paznik postavi v ravno vrsto, nato pa vsakemu na glavo povezne rdeč ali moder klobuk.

Nekaj časa lahko v tišini in brez komunikacije ogledujejo klobuke, ki jih vidijo v vrsti **pred sabo**. Nato morajo na paznikov znak hkrati zakričati barvo klobuka, za katero menijo, da ga imajo na lastni glavi.

Če uganejo barvo svojega klobuk, preživijo. Za kakšno taktiko naj se domenijo **dan prej**, da jih bo gotovo umrlo **le končno**?

Predpriprava na rešitev

- spomnimo se ***ekvivalenčnih relacij***
- množico A razbijemo na neprazne podmnožice tako, da imajo elementi vsake podmnožice neko skupno lastnost
- npr: množico $\mathbb{N}$ razdelimo glede na ostanek pri deljenju s 5
- podmnožicam pravimo v tem primeru ***ekvivalenčni razredi***
- če sta elementa ***a, b*** $\in$ ***A*** v istem razredu, to zapišemo kot ***a ~ b***



Predpriprava na rešitev

- vrsto klobukov si predstavljamo kot zaporedje ničel (rdeč klobuk) in enk (moder klobuk)
- zamisliti si moramo pravo ekvivalenčno relacijo na množici dvojiških zaporedij

Rešitev

- Za zaporedji $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ velja $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ natanko tedaj, ko se ujemata od nekega člena naprej
- Množica vseh zaporedij razpade na neskončno razredov $\boldsymbol{A_i}$
- V vsakem razredu $\boldsymbol{A_i}$ si izberemo predstavnika $\boldsymbol{a_i}$
- Ko si zaporniki ogledajo vrsto pred sabo, natanko vedo, v katerem razredu se nahaja zaporedje klobukov in kateri je predstavnik tega razreda: imenujmo ga $\boldsymbol{c}$
- Ko da paznik znak, se vsak zadere barvo, ki pripada ustreznemu členu v $\boldsymbol{c}$.

Rešitev: primer

Pravo zaporedje klobukov je

$$\boldsymbol{a} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

zaporniki pa so si včeraj v razredu vseh zaporedij, ki so od nekje naprej enaka 0 (in je njem tudi ***a***) izbrali predstavnika

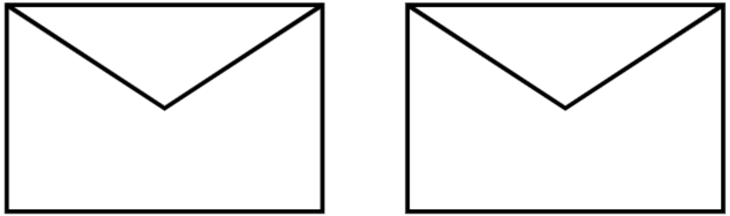
$$\boldsymbol{c} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$

Vsi razen dveh bodo uganili barvo svojega klobuka.

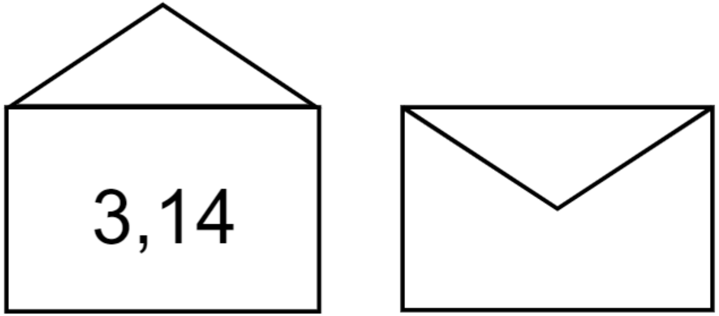
4. Večje ali manjše [25 točk]

Večje ali manjše?

Dve kuverti, v vsaki je število:



Eno od njiju odpremo:



Ali je to večje ali manjše od števil? Ali lahko pravilno odgovoriš **z več kot 50-odstotno** verjetnostjo? Ali lahko z več kot **99-odstotno**?

Rešitev

Očitno

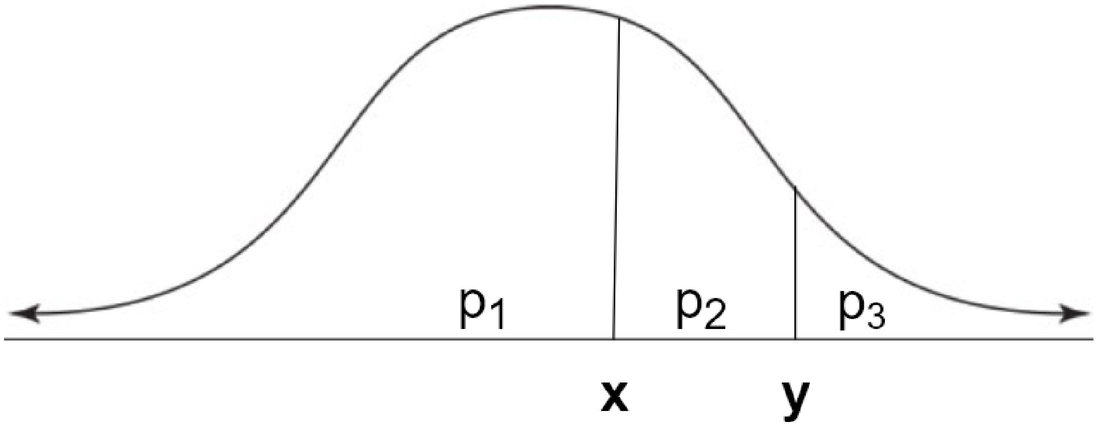
NE.

Naslednja naloga, prosim.

Rešitev

- Naj bosta **$x < y$** števili v kuvertah
- Zgeneriramo naključno število ***z*** na $\mathbb{R}$ (npr. normalno porazdeljeno)
- Naša napoved:
    - ***$z >$ videno:*** *vidim* **MANJŠE** od števil ***x*** in ***y***
    - **$z <$ videno:** vidim **VEČJE** od števil ***x*** in ***y***

Rešitev: verjetnost uspeha

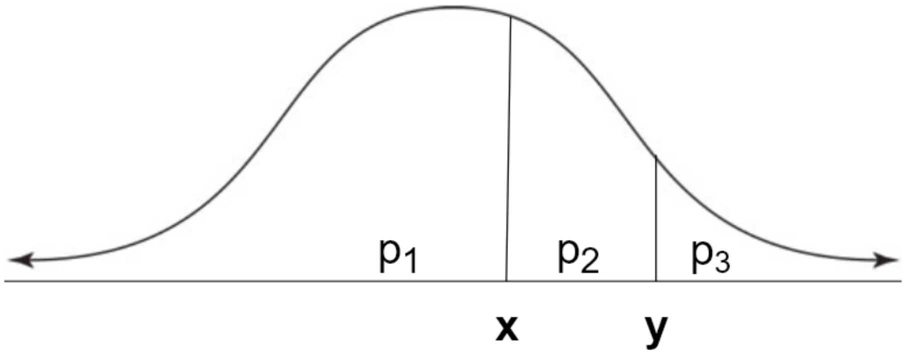


$$
\begin{aligned}
P(\text{USPEH}) \quad = \quad & P(\text{USPEH} \mid z < x)P(z < x) \\
& + P(\text{USPEH} \mid x < z < y)P(x < z < y) \\
& + P(\text{USPEH} \mid y < z)P(y < z) \\
= \quad & 0.5p_1 + 1 \cdot p_2 + 0.5p_3 \\
= \quad & 0.5(p_1 + p_2 + p_3) + 0.5p_2 = 0.5 + p_2/2
\end{aligned}
$$

Analogen izračun

- Ločimo glede na dogodka **A:** ***vidim x*** in **B:** ***vidim y***

$$
\begin{aligned}
P(\text{uspeh}) &= P(\text{uspeh} \mid A)P(A) + P(\text{uspeh} \mid B)P(B) \\
&= P(z > x)P(A) + P(z < y)P(B) \\
&= (p_2 + p_3) \cdot \frac{1}{2} + (p_1 + p_2) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + p_2/2
\end{aligned}
$$



Ne bodimo zadovoljni z malim

- Namesto enega naključnega števila jih zgeneriramo ***n***
- Vsako število da svojo napoved
- Izberemo tisto napoved, ki dobi več kot pol glasov (naj bo ***n*** lih, da ne bo težav)

Če označimo verjetnost uspeha enega glasovalca s ***p***, potem je bi morda lahko pomislili, da je verjetnost, da se jih bo ***k*** odločilo pravilno, enaka

$$\cancel{P(\text{USPEH } k-\text{krat}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Zakaj ni verjetnost binomska?

- Ko smo odprli kuverto, smo bodisi v dogodku ***A*** bodisi ***B:*** naključnosti, katero od števil vidimo, "ni več"
- Če smo v dogodku ***A***, tj. ***vidimo x***, je verjetnost uspeha enega enaka ***a = P(uspeh | A) =*** $p_2 + p_3$
- Če smo v dogodku ***B***, tj. ***vidimo y***, je verjetnost uspeha enega enaka ***b = P(uspeh | B) =*** $p_1 + p_2$
- *Verjetnost uspeha k-tih je torej mešanica dveh binomskih verjetnosti*

$$
\begin{aligned}
P(\text{uspeh } k\text{-tih}) &= P(\text{uspeh } k\text{-tih} \mid A)P(A) + P(\text{uspeh } k\text{-tih} \mid B)P(B) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{k} b^k (1-b)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Vseeno ne bodimo zadovoljni z malim

Naj bo ***μ*** povprečje naše normalne porazdelitve.

1. Če je $\mu < x$: večinsko glasovanje pravi ***VIDIM VEČJE***, zato imamo ½ možnosti, da je to prav (če se je zgodil dogodek ***A***)
   - *pol izžrebanih števil je* $< x$, *še nekaj pa jih pade na interval* (μ, x)
2. Če je $\mu > y$: večinsko glasovanje pravi ***VIDIM MANJŠE***, ponovno imamo ½ možnosti (če se je zgodil dogodek ***B***)
3. Če je $x < \mu < y$: tako v dogodku ***A*** kot v dogodku ***B*** *bo večina izžrebanih števil na "pravi strani"* ***x*** oz. ***y***. Cilj: majhna varianca
   - *to nam uspe za dovolj velike n (varianca = varianca enega / n)*

Poskus s programom

- Izberimo števili $x = 3{,}14$ in $y = 5$
- Obravnavali bomo 3 primere s prejšnje prosojnice:
  - $\mu = 2$
  - $\mu = 3{,}5$
  - $\mu = 8$

Deleži pravilnih odgovorov po milijon ponovitvah

	$n = 1$	$n = 11$	$n = 101$	$n = 1001$
$\mu = 2$	0,563	0,501	0,500	0,500
$\mu = 3{,}5$	0,787	0,917	0,999	1,000
$\mu = 8$	0,501	0,500	0,500	0,500

V primerih $\mu = 2$ in $\mu = 8$ konvergiramo proti 0,5 (pravi odgovor podamo le ob dogodku A ali le ob dogodku B). Ker je **μ = 8** *"daleč"* *od* ***y***, *konvergiramo hitreje*. Ko je $\boldsymbol{\mu}$ med $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$, konvergiramo proti 1.

Zaključek

- Vedno lahko damo pravi odgovor z verjetnostjo več kot 50%.
- Če imamo srečo in je povprečje naše porazdelitve med številoma, lahko damo pravi odgovor z verjetnostjo več kot 99%.
- Če te sreče nimamo, potem je bolje uporabiti zgolj en glas.

5. Ugani število [slava in čast]

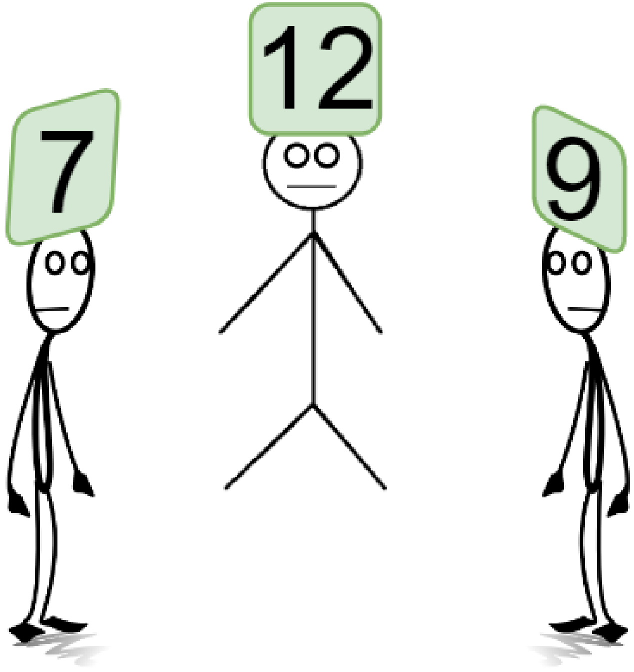
Kaj imam na čelu?

Trije prijatelji stojijo v krogu (trikotniku?).

Po ogledu števil na čelu preostalih dveh vsak na svoj listek napiše **končno** število. Če kdorkoli od njih na listek zapiše (tudi) svoje število, so zmagali.

Najdi vedno delujočo taktiko, če veš, da

A. so števila naravna
B. so števila racionalna
C. so števila realna



ℕ ☺

- Rešljivo tudi z le dvema

- Vsak od igralcev napiše na listek vsa števila do vključno največjega, ki ga vidijo
- Tista dva, ki nimata največjega, bosta napisala tudi svoje

$\mathbb{Q}$ 🙃

- Rešljivo tudi le z dvema
- Racionalnih števil je toliko kot naravnih

- Pred začetkom igre se zmenijo za bijekcijo f: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ in se lahko pretvarjajo, da tako ali tako vidijo naravna števila
- Formalno: če imajo na glavah ***x_1***, ***x_2*** in ***x_3***, i-ti napiše šte

$$\{f^{-1}(n) \mid n \leq \max\big(\underbrace{\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} \setminus \{f(x_i)\}}_{\text{števila, ki jih vidijo}}\big)\}$$

ℝ 😵‍💫

- Dokažemo, da se z dvema igralcema ne da.
- Na čelu imata igralca števili ***a*** in ***b***.
- Naj bo ***B(a)*** množica števil, ki jo zapiše igralec, ki vidi ***a***, in podobno za ***A(b)***
- Našli bomo celoštevilski ***a*** in realen ***b***, pri katerih obema spodleti
- **B(0) U B(1) U B(-1) U B(2) U B(-2) ...** je števna, zato lahko
  - izberemo realno število ***b*,** ki ni v tej uniji (potem velja ***b* ∉ *B(a)***)
  - izberemo še celo število ***a*,** ki ni v končni množici ***A(b)***

$\mathbb{R}$ 😵‍💫

- Množica $\mathbb{N}$ je dobro urejena (linearno + malo več) z relacijo $\leq$
  - refleksivna: $a \leq a$
  - antisimetrična: $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$
  - tranzitivna: $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$
  - sovisna: $a \leq b$ ali $b \leq a$
  - vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ vsebuje minimum
- Posledica: $\{a \in \mathbb{N} \mid a \leq b\}$ je končna za vse $b \in \mathbb{N}$
- To je bilo ključno pri $\mathbb{N}$ oz. $\mathbb{Q}$

ℝ 😵‍💫

- Ali lahko ℝ dobro uredimo?
  Lahko (**aksiom izbire**), ampak ne vemo, kakšna je ta ureditev
- Kako doseči, da bi bila $\{a \in \mathbb{R} \mid a \preceq b\}$ končna?
  Izkaže se, da pomaga, če je ℝ najmanjša med neštevnimi množicami: **hipoteza kontinuuma**, ki pa je ne moremo **ne dokazati ne ovreči**

- Za rešitev potrebujemo še nekaj znanja o ordinalih (dobro urejenih množicah).

Hvala!