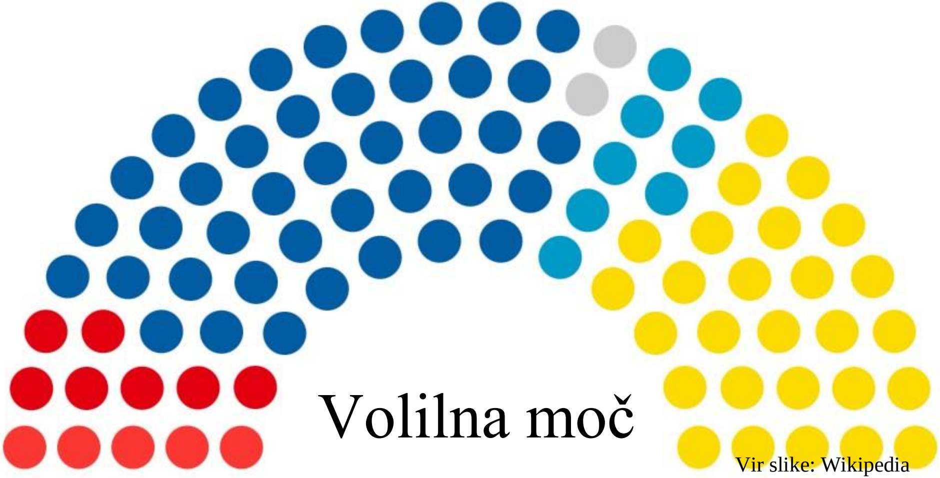

Volilna moč

Vir slike: Wikipedia

Pino Koc

Seminar za učitelje matematike
FMF Ljubljana, 21. januar 2023

Osnovni pojmi

- Volilni sistem: sistem pretvorbe glasov volilcev v predstavniške sedeže.
- Osnovna delitev volilnih sistemov: večinski [1] in proporcionalni (sorazmerni).
- Za matematike, o proporcionalnem sistemu:
  - ali so predstavniki enakovredni?
  - če niso ali lahko določimo njihovo vrednost (volilno moč)?

Primer 1: ideja pojma »volilna moč« [2]

- Ali imata B in C večjo volilno moč kot A?
- Predpostavka: vsak izmed predstavnikov bo vse svoje glasove uporabil za eno odločitev (vsi glasovi so ali »da« ali »ne«, ne pa mešano).

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
abs. večina glasov	8

- Kaj pa, če je potrebna 2/3 večina?

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
potrebno št. glasov	10

- Ali pa 3/4 večina?

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
potrebno št. glasov	11

Označevanje

- Pri odločanju sodeluje n predstavnikov $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$.
- i-ti predstavnik ima w_i glasov, $i = 1, n$. Vsota glasov vseh predstavnikov je $V = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.
- Prag odločanja: q glasov $V/2 < q \leq V$.
- Označevanje volilnega sistema: $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

  Iz primera 1: $[8; 5,5,4]$.

Diktator

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
D	26
vsota glasov	40
abs. večina glasov	21

- P_i je diktator če: $w_i \geq q,$ pri pogoju: $V/2 < q \leq V.$

Moč veta

- Moč veta ima P_i, če se brez njegove privolitve odločitev ne more sprovesti.

$$V - w_i < q$$

  Primer: [16; 8, 7, 3, 2]

  Predstavnika P_1 in P_2 imata moč veta.

- Vsak diktator ima moč veta, nima pa vsak z močjo veta tudi diktatorske moči.

Predstavnik brez volilne moči

- Brez volilne moči je P_i, čigar odločitev ne more spremeniti skupne odločitve.

$$V - w_i \geq q$$

Iz Primera 1: [10; 5, 5, 4]

Predstavnik P_3 nima nobene volilne moči.

Koalicija

- Katerakoli zveza predstavnikov;
  podmnožica množice $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.
- Teža koalicije: vsota števila glasov članov koalicije.
- Zmagovalna koalicija: teža je vsaj enaka q (pragu odločanja).

Iz Primera 1: [10; 5, 5, 4] sta zmagovalni koaliciji:
$\{P_1, P_2\}$ in $\{P_1, P_2, P_3\}$.

- Koliko je možnih koalicij?

$n = 1$, { } in{P_1},

$n = 2$, { }, {P_1}, {P_2}, {P_1, P_2},

$n = 3$, { }, {P_1}, {P_2}, {P_3}, {P_1, P_2}, {P_2, P_3}, {P_3, P_1}, {P_1, P_2, P_3}.

Število koalicij je 2^n.

Opomba: nekateri { } ne štejejo med koalicije. Zanje je število koalicij je 2^n-1.

- Koalicijska tabela za Primer 1: [10; 5, 5, 4]

P_3	P_2	P_1	koalicija	teža	zmagovalna?
0	0	0	$\{\ \}$	0	ne
0	0	1	$\{P_1\}$	5	ne
0	1	0	$\{P_2\}$	5	ne
0	1	1	$\{P_1, P_2\}$	10	**da**
1	0	0	$\{P_3\}$	4	ne
1	0	1	$\{P_3, P_1\}$	9	ne
1	1	0	$\{P_2, P_3\}$	9	ne
1	1	1	$\{P_1, P_2, P_3\}$	14	**da**

Kritični predstavnik

- Je del zmagovalne koalicije.
- Njegovo sodelovanje v koaliciji je nujno, da le-ta ostane zmagovalna.
- Primer [10; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	5+5 = 10	P_1, P_2
$\{P_1, P_2, P_3\}$	5+5+4 = 14	P_1, P_2

Merjenje volilne moči

- V kolikih koalicijah lahko predstavnik spremeni zmagovitost koalicije, oz. kolikokrat je predstavnik v množici kritičnih?

predstavnik	kritičnost N_k
P_1	2
P_2	2
P_3	0
Vsota	4

Banzhafov indeks volilne moči

- Relativni Banzhafov indeks *i*-tega predstavnika:

$$B_r(P_i) = \frac{N_k(P_i)}{N_k(P_1) + N_k(P_2) + \ \dots + N_k(P_n)}$$

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	2/4
P_2	2	2/4
P_3	0	0
Vsota	4	4/4

- Vsota relativnih Banzhafovih indeksov:

$$\sum_{i}^{n} B_r(P_i) = 1$$

- Banzhaf ni edini avtor:

  Lionel Penrose (1946): "The Elementary Statistics of Majority Voting"

  John Banzhaf (1965): "Weighted Voting Doesn't Work"

  James Coleman (1971): "Control of Collectives and the Power of a Collectivity to Act"

- Imenovan tudi Penrose-Banzhaf ali Banzhaf-Coleman indeks.

Ponovitev primera 1, izračun Banzhafovih indeksov

- Primer [8; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	5+5 = 10	P_1, P_2
$\{P_2, P_3\}$	5+4 = 9	P_2, P_3
$\{P_3, P_1\}$	4+5 = 9	P_3, P_1
$\{P_1, P_2, P_3\}$	5+5+4 = 14	*nihče*

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	2/6
P_2	2	2/6
P_3	2	2/6
Vsota	6	6/6

- Primer [11; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2, P_3\}$	5+5+4 = 14	P_1, P_2, P_2

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	1	1/3
P_2	1	1/3
P_3	1	1/3
Vsota	3	3/3

Ponovitev primera Diktator, izračun Banzhafovih indeksov

- Primer [21; 26, 5, 5, 4].
- Vse zmagovalne koalicije vključujejo P_1.
- V vsaki zmagovalni koaliciji je P_1 kritični član, preostali pa ne.
- Vse kritičnosti dosega samo P_1, zato ima $B_r(P_1) = 1$ (100%).
- Preostali člani koalicij in nečlani imajo indeks $B_r = 0$.

Primer 2: moč veta

- Primer [10; 8, 4, 2, 1]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	8+4 = 12	P_1, P_2
$\{P_1, P_3\}$	8+2 = 10	P_1, P_3
$\{P_1, P_2, P_3\}$	8+4+2 = 14	P_1
$\{P_1, P_2, P_4\}$	8+4+1 = 13	P_1, P_2
$\{P_1, P_3, P_4\}$	8+2+1 = 11	P_1, P_3
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	8+4+2+1 = 15	P_1

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	6	3/5
P_2	2	1/5
P_3	2	1/5
P_4	0	0
Vsota	10	5/5

- P_1 ima moč veta, saj je kritičen v vseh zmagovalnih koalicijah.
- P_2 in P_3 imata enako volilno moč, čeprav z različnim deležem glasov.

- Združimo P_2 in P_3, dobimo [10; 8, 4+2, 1]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2+P_3\}$	$8+6 = 14$	P_1, P_2+P_3
$\{P_1, P_2+P_3, P_4\}$	$8+6+1 = 15$	P_1, P_2+P_3

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	1/2
P_2+P_3	2	1/2
P_4	0	0
Vsota	4	2/2

- Združevanje P_2+P_3 jima je koristilo, saj je njun skupni Banzhafov indeks večji od vsote nezdruženih indeksov:

  $B_r(P_2+P_3) = 1/2 > 2/5 = 1/5 + 1/5 = B_r(P_2) + B_r(P_3)$

- Zgornja ugotovitev ni splošno veljavna v vseh primerih združevanj

.

Varnostni svet ZN

- 5 stalnih članic: Francija, Kitajska, Rusija, Velika Britanija, ZDA.
- 10 nestalnih članic, voljenih za dvoletni mandat: Albanija, Brazilija, Ekvador, Gabon, Gana, Japonska, Malta, Mozambik, Švica, Združeni arabski emirati (stanje 2023).
- Za izglasovanje ukrepa je potrebnih 9 glasov, vključujoč vseh 5 stalnih članic. Te imajo torej pravico veta.
- Kolikšen je Banzhafov relativni indeks posameznih članic?

- Število koalicij = 2^{15}=32768.
- Vsaka zmagovalna koalicija mora vsebovati vseh pet stalnih članic in vsaj štiri nestalne.
- Stalne članice so medsebojno enake po volilni moči.
- Nestalne članice so medsebojno enake po volilni moči.
- Stalna članica je kritična v vseh koalicijah, kjer so prisotne vsaj štiri nestalne članice. Takšnih koalicij je 848 (izmed 2^{10}=1024).
- Nestalna članica je kritična v vseh koalicijah, kjer so poleg nje prisotne še točno tri nestalne članice od preostalih devetih nestalnih članic. Takšnih koalicij je 84 (izmed 2^{9}=512).

- Število kritičnosti ene stalne članice je 848. Pojasnilo:

stalnih čl. »za«	nestalnih čl. »za«	zmagovalnih koalicij
5	10	$1 = \binom{10}{10}$
5	9	$10 = \binom{10}{9}$
5	8	$45 = \binom{10}{8}$
5	7	$120 = \binom{10}{7}$
5	6	$210 = \binom{10}{6}$
5	5	$252 = \binom{10}{5}$
5	4	$210 = \binom{10}{4}$

- Število kritičnosti ene nestalne članice je 84. Pojasnilo:

Nestalna članica je kritična samo v koalicijah, kjer so za ukep točno 4 nestalne članice. Takšnih koalicij je $\binom{10}{4} = 210$.

Da pa je nestalna članica v takšni koaliciji, je verjetnost 4/10.

Torej: $210 \cdot \frac{4}{10} = 84$

- Relativni Banzhafov indeks za katerokoli izmed stalnih članic:

$$B_r(P_{stalne}) = \frac{848}{(5 \times 848) + (10 \times 84)} = \frac{848}{5080} \approx 0{,}1669$$

- Relativni Banzhafov indeks za katerokoli izmed nestalnih članic:

$$B_r(P_{nestalne}) = \frac{84}{(5 \times 848) + (10 \times 84)} = \frac{84}{5080} \approx 0{,}0165$$

- Razmerje volilne moči stalnih : nestalnim članicam ≈ 10 : 1

- Glasovalni sistem VS OZN želimo prikazati v obliki:

$$[q\ ; w_{s1}, w_{s2}, \dots , w_{ns}, w_{n1}, w_{n2}, \dots , w_{nn}]$$

ns ... število stalnih članic VS (imajo veto) = 5,

nn ... število nestalnih članic VS = 10,

q ... prag odločanja $\neq 9$.

Število potrebnih članic za izglasovanje ukrepa: $gl = 9$.

Privzamemo: $w_{n1} = w_{n2} = \dots = w_{nn} = w_n$ in

$$w_{s1} = w_{s2} = \dots = w_{ns} = w_s$$

- Vsota vseh glasov je: $V = ns \times w_{\mathrm{s}} + nn \times w_{\mathrm{n}}$
- Prag odločanja: $q = ns \times w_{\mathrm{s}} + (gl - ns) \times w_{\mathrm{n}}$
- Moč veta ima tisti, ki: $V - w_i < q$, oz.: $V - w_s < q$

  Predpostavka: velikost w_s je komaj zadostna za izpolnitev neenačbe $V - w_s < q$. Če w_s zmanjšamo za 1 glas (povečamo levo stran neenačbe), neenačba ni več izpolnjena. Dobimo enačbo:

$$V - (w_s - 1) = q \,, \quad \text{oz.:} \quad w_s = \mathrm{V} - q + 1$$

- Vstavimo V in q:

$$w_s = ns \times w_{\mathrm{s}} + nn \times w_{\mathrm{n}} - [ns \times w_{\mathrm{s}} + (gl - ns) \times w_{\mathrm{n}}] + 1$$

$$w_s = w_{\mathrm{n}} \, (ns + nn - gl) + 1$$

- Privzamemo: $w_n = 1$. Dobimo:

$$w_s = 1\ (5 + 10 - 9) + 1 = 7$$

$$q = 5 \times 7 + (9 - 5) \times 1 = 39$$

- Glasovalni sistem VS OZN je torej:

[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Zaporedna koalicija

- Običajna koalicija: vsi predstavniki hkrati osnujejo koalicijo.

  Npr.: $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ vrstni red (za matematika) ni pomemben.

- Zaporedna koalicija: predstavniki vstopajo v koalicijo eden po eden (zaporedoma).

  Npr.: $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ vrstni red postane pomemben.

$$\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \neq \langle P_1, P_3, P_2, P_4\rangle$$

V zaporedni koaliciji morajo biti vsebovani vsi predstavniki.

Pazi na oznake { } oz. ⟨ ⟩.

Ključni predstavnik (pivot)

- Predstavnik, pri katerem teža zaporedne koalicije, ki narašča s postopnim vključevanjem novih članov, doseže (ali prvič preseže) prag odločanja q.
- Primer [17; 6, 4, 3, 3, 2, 1, 1]
  - P_4 predlaga nov ukrep, število glasov $3 < 17$,
  - P_6 se strinja s predlogom, pristopi h koaliciji, teža koalicije $3+1 = 4 < 17$,
  - P_1 pristopi h koaliciji, teža koalicije $4+6 = 10 < 17$,
  - P_5 pristopi, teža koalicije $10+2 = 12 < 17$,
  - P_2 pristopi, teža koalicije $12+4 = 16 < 17$,
  - P_3 pristopi, teža koalicije $16+3 = 19 > 17 \rightarrow$ pivot,
  - P_7 pristopi, teža koalicije $19+1 = 20 > 17$.

Število zaporednih koalicij

- Število zaporednih koalicij za n predstavnikov:
  - n predstavnikov ima možnost, da pristopijo prvi,
  - $(n - 1)$ jih ima možnost, da pristopijo drugi,
  - $(n - 2)$ pa lahko postanejo tretjepristopniki,
  - ...
  - 2 zadnja predstavnika, eden je predzadnji član koalicije,
  - 1 preostali predstavnik pa se pridruži zadnji.

Število zaporednih koalicij:

$$n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

Število običajnih koalicij: 2^n.

Število pivotiranj

- Primer [10; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_2
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_2
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_1
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_2
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_1

- Število pivotiranj: $N_p(P_1) = 3$, $N_p(P_2) = 3$, $N_p(P_3) = 0$.

Shapley-Shubikov indeks volilne moči

- Shapley-Shubikov indeks (1954):

$$SS(P_i) = \frac{N_p(P_i)}{n!}$$

- Vsota Shapley-Shubikovih indeksov:

$$\sum_{i}^{n} SS(P_i) = 1$$

- Iz primera [10; 5, 5, 4]: $SS(P_1) = N_p(P_1)/n! = 3/6$

$SS(P_2) = N_p(P_2)/n! = 3/6$

$SS(P_3) = N_p(P_3)/n! = 0/6$

Ponovitev primera 1, izračun Shapley-Shubikovih indeksov

- Primer [8; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_2
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_3
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_1
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_3
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_2

$N_p(P_1) = N_p(P_2) = N_p(P_3) = 2$

$SS(P_1) = SS(P_2) = SS(P_3) = 2/6 = 1/3$ (enako, kot B_r)

- Primer [11; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_3
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_2
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_3
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_2
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_1

$N_p(P_1) = N_p(P_2) = N_p(P_3) = 2$

$SS(P_1) = SS(P_2) = SS(P_3) = 2/6 = 1/3$ (enako, kot B_r)

- Ugotovitev: podobno, kot Banzhafov indeks, tudi Shapley-Shubikov indeks v nekaterih primerih ne razlikuje nenakih volilnih sistemov, npr.: [8; 5, 5, 4] in [11; 5, 5, 4].

Ponovitev primera Diktator, izračun Shapley-Shubikovih indeksov

- Primer [21; 26, 5, 5, 4].
- Je potrebno pregledati 4! = 24 zaporednih koalicij?
- Ne. V vseh koalicijah je P_1 pivot.
- $N_p(P_1) = 24$, $N_p(P_2) = N_p(P_3) = N_p(P_4) = 0$
- $SS(P_1) = 1$, $SS(P_2) = SS(P_3) = SS(P_4) = 0$
- Ugotovitev: enako, kot Banzhafov indeks, tudi Shapley-Shubikov indeks zagotovo določi diktatorja in predstavnika brez volilne moči.

Shapley-Shubikovi indeksi Varnostnega sveta ZN

- V številkah:

  n ... število članic VS = 15,

  ns ... število stalnih članic VS (imajo veto) = 5,

  nn ... število nestalnih članic VS = 10,

  gl ... število članic, potrebnih za izglasovanje ukrepa = 9.

- Število zaporednih koalicij: 15! = 1.307.674.368.000

  Opomba: število koalicij po Banzhafu je samo 2^{15}=32.768.

- Shapley-Shubikov indeks za katerokoli izmed nestalnih članic:

volilni sistem: [39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

$$\langle \underbrace{P_s, P_s, P_s, P_s, P_s, P_n, P_n, P_n,}_{8!} \overset{\text{pivot}}{\underset{\binom{9}{3}}{P_n,}} \underbrace{P_n, P_n, P_n, P_n, P_n, P_n}_{6!} \rangle$$

št. permutacij

$$SS(P_{nestalne}) = \binom{nn-1}{gl-ns-1} \frac{(gl-1)!\ \ (n-gl)!}{n!}$$

$$SS(P_{nestalne}) = \binom{10-1}{9-5-1} \frac{(9-1)!\ \ (15-9)!}{15!} = 84 \frac{40320 \times 720}{1.307.674.368.000}$$

$$SS(P_{nestalne}) = 0{,}001865$$

- Shapley-Shubikov indeks za katerokoli izmed stalnih članic:

$$ns \times SS(P_{stalne}) + nn \times SS(P_{nestalne}) = 1$$

$$SS(P_{stalne}) = \frac{1 - 10 \times 0{,}001865}{5} = \frac{0{,}98135}{5} = 0{,}19627$$

- Razmerje volilne moči stalnih : nestalnim članicam ≈ 100 : 1
- Kako je teoretično možno spremeniti razmerja volilnih moči [3]?

Državni zbor RS

- 88 poslancev iz 8 volilnih enot + 2 poslanca narodnostnih manjšin,
- Volilna sistema po volitvah 2022: [46; 41, 27, 8, 7, 5, 1, 1] in

  [61; 41, 27, 8, 7, 5, 1, 1]

- Banzhafovi in Shapley-Shubikovi indeksi volilne moči so izračunani ob predpostavki, da vsi poslanci iste stranke glasujejo enako.

- Volilna moč strank v DZ v sistemu [46; 41, 27, 8, 7, 5, 1, 1]

Stranka	Delež glasov	Št. zmag. koalicij	Br	Št. koalicij, kjer je stranka pivot	SS
Svoboda	0,456	56	0,636	3024	0,600
SDS	0,300	8	0,091	504	0,100
NSi	0,089	8	0,091	504	0,100
SD	0,078	8	0,091	504	0,100
Levica	0,056	8	0,091	504	0,100
posl.manjšine	0,011	0	0	0	0
posl.manjšine	0,011	0	0	0	0

- Volilna moč strank v DZ v sistemu [61; 41, 27, 8, 7, 5, 1, 1]

Stranka	Delež glasov	Št. zmag. koalicij	Br	Št. koalicij, kjer je stranka pivot	SS
Svoboda	0,456	36	0,474	2772	0,550
SDS	0,300	28	0,368	1512	0,300
NSi	0,089	4	0,053	252	0,050
SD	0,078	4	0,053	252	0,050
Levica	0,056	4	0,053	252	0,050
posl.manjšine	0,011	0	0	0	0
posl.manjšine	0,011	0	0	0	0

Volilna moč v EU

- Glejte vir [4].

Literatura

[1] Marko Slapar: Zakaj se prepiramo, FMF seminar za učitelje matematike, 2019/2020.

[2] https://jlmartin.ku.edu/~jlmartin/courses/math105-F11/ (dostopno januarja 2023)

[3] https://demonstrations.wolfram.com/PowerVotingSystemsLikeTheUnitedNationsSecurityCouncil/ (dostopno januarja 2023)

[4] http://journal.fsv.cuni.cz/storage/1401_18-33_szczypinska_final_issue_1_2018.pdf (dostopno januarja 2023)