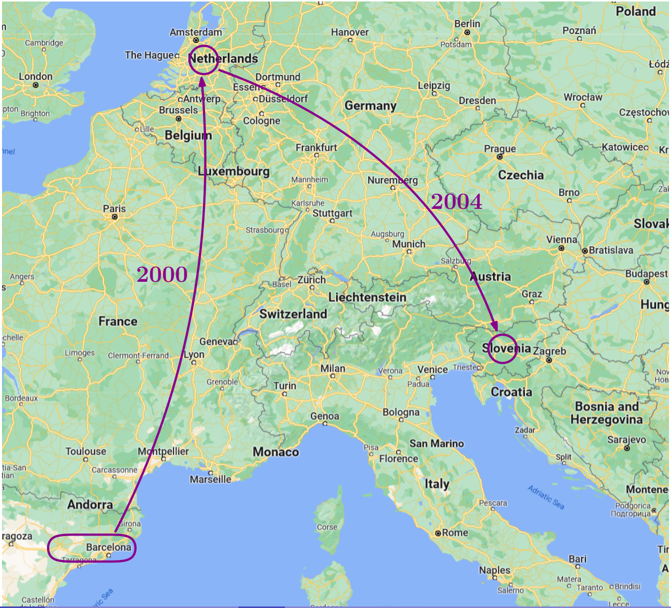
Voronojevi diagrami

Sergio Cabello
Fakulteta za matematiko in fiziko UL
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

FMF seminar za učitelje matematike
september 2022

Malo o meni


2000
2004
Netherlands
Barcelona
Slovenia
Amsterdam
The Hague
Cambridge
London
Brighton
Hanover
Berlin
Potsdam
Poland
Poznań
Dortmund
Essen
Düsseldorf
Antwerp
Brussels
Lille
Belgium
Cologne
Leipzig
Dresden
Germany
Wrocław
Frankfurt
Prague
Czechia
Katowice
Luxembourg
Mannheim
Nuremberg
Brno
Karlsruhe
Stuttgart
Paris
Strasbourg
Augsburg
Munich
Vienna
Bratislava
Salzburg
Austria
Budapest
Angers
Basel
Zürich
Liechtenstein
Graz
Switzerland
France
Geneva
Zagreb
Limoges
Clermont-Ferrand
Lyon
Milan
Verona
Venice
Trieste
Grenoble
Turin
Padua
Croatia
Bordeaux
Genoa
Bologna
Bosnia and Herzegovina
Zadar
Sarajevo
Toulouse
Montpellier
Monaco
San Marino
Pisa
Florence
Split
Carcassonne
Marseille
Italy
Adriatic Sea
Andorra
Pescara
Podgorica
Подгорица
Girona
Corse
Rome
Bari
Tarragona
Naples
Matera
Taranto
Brindisi
Salerno
Castellón

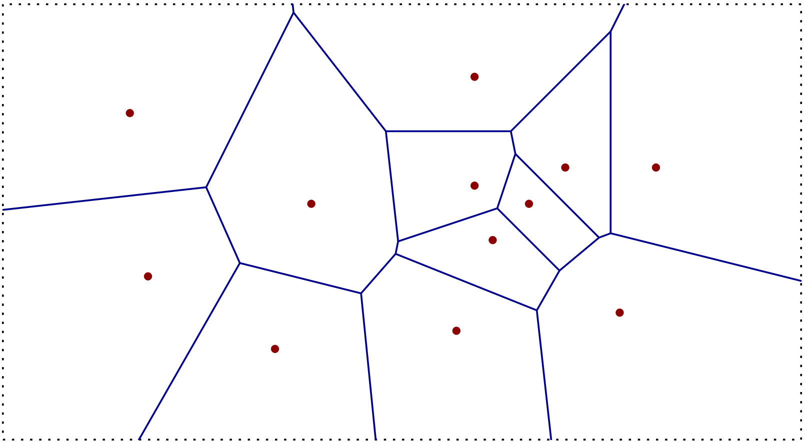
Cilj predavanja

- Kaj so Voronojevi diagrami
- Uporabe
- Neke lastnosti in problemi
- Posplošitve

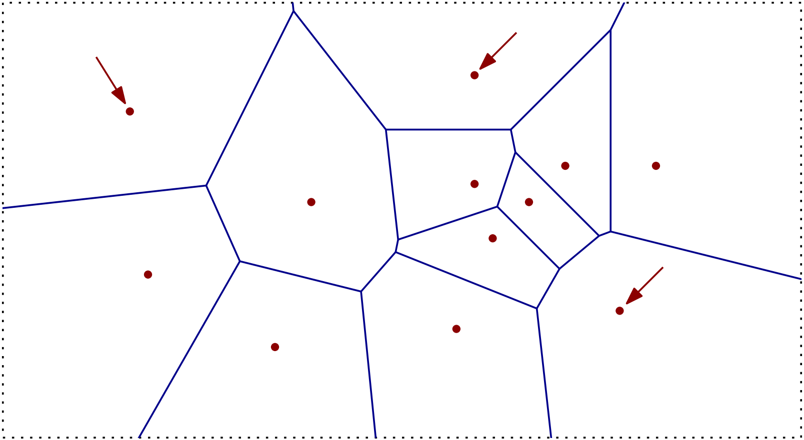
- Geometrija – veliko slik
- Standardna orodja v računski geometriji

- Vprašanja dobrodošla ob poljubnem trenutku

Voronojev diagram

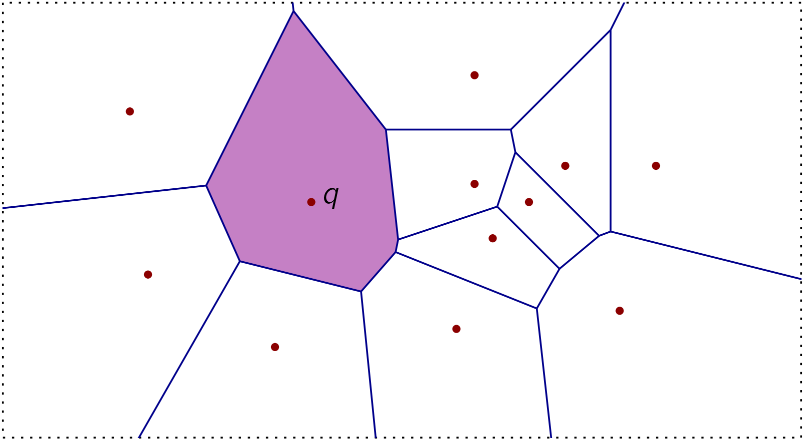


Voronojev diagram



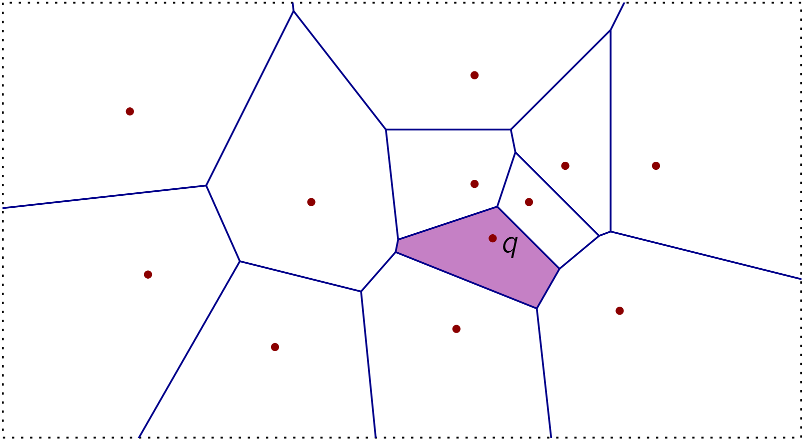
srediŝča ali semena ali mesta ali viri (ang. *sites*)

Voronojev diagram



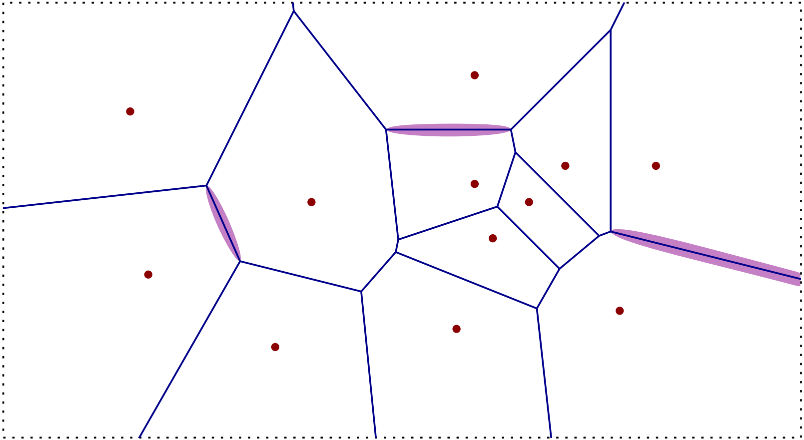
celice (ang. *cells*) Notacija: cell(q, P)

Voronojev diagram



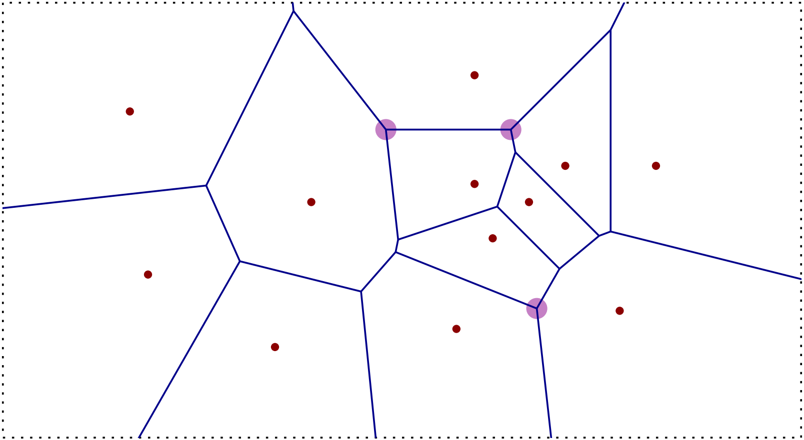
celice (ang. *cells*) Notacija: cell(q, P)

Voronojev diagram



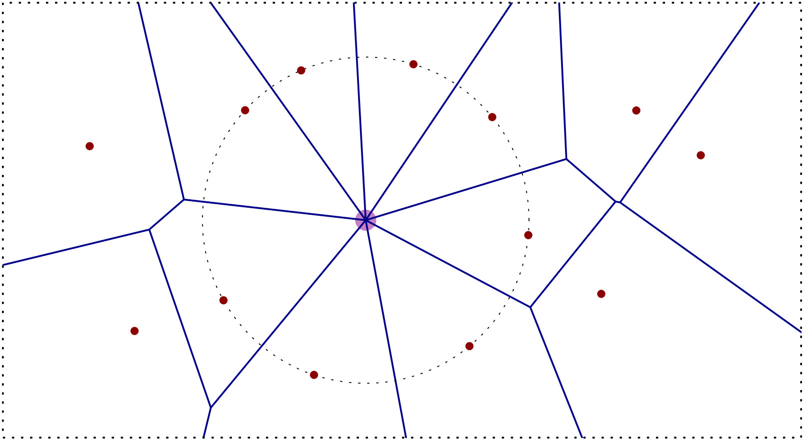
robovi (ang. *edges*)

Voronojev diagram



ogliščа (ang. *vertices*)

Voronojev diagram

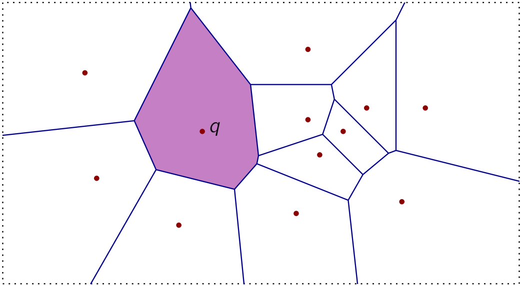


ogliščа (ang. *vertices*)

Voronojev diagram

- P ... končna množica točk v ravnini; *semena* ali središča
- $VD(P)$ ... Voronojev diagram za P je dekompozicija ravnine glede najbližjih semen s P
- celica: isto najbližje seme

$$\forall q \in P: \quad \text{cell}(q, P) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall p \in P \backslash \{q\}: \ d(x,q) < d(x,p)\}$$

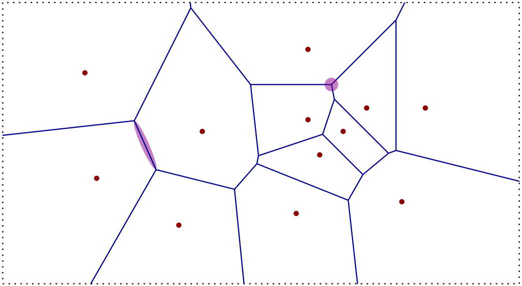


Voronojev diagram

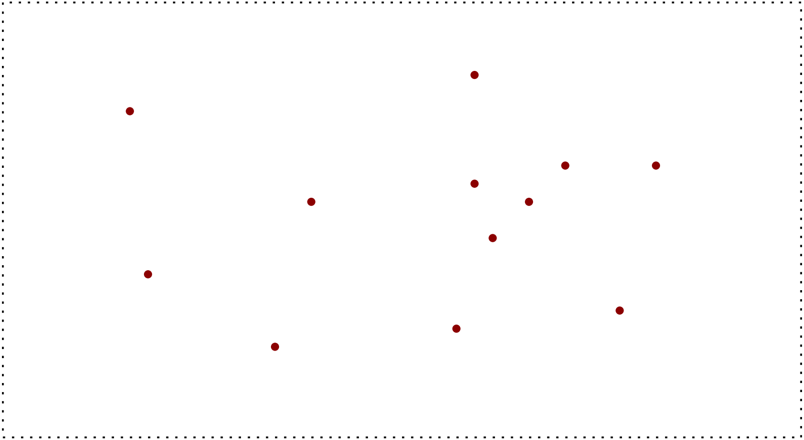
- P ... končna množica točk v ravnini; *semena* ali središča
- $VD(P)$ ... Voronojev diagram za P je dekompozicija ravnine glede najbližjih semen s P
- celica: isto najbližje seme

$$\forall q \in P: \quad \text{cell}(q,P) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall p \in P \setminus \{q\}: \ d(x,q) < d(x,p)\}$$

- robovi: natančno dva najbljižja semena (ista)
- oglišča: vsaj tri najbližja semena (ista)

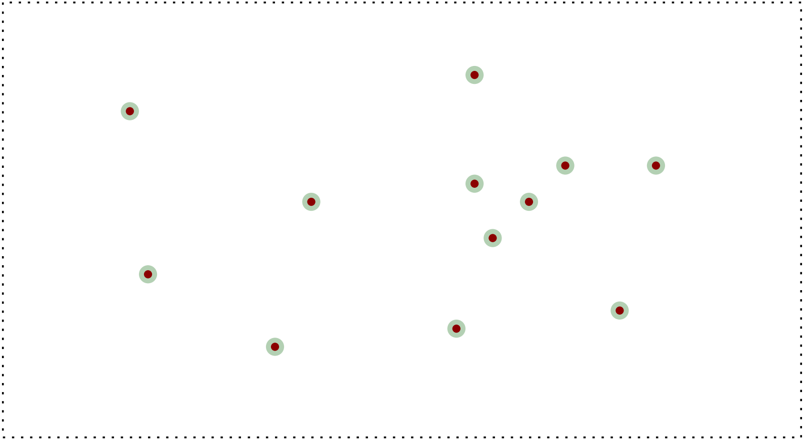


Fizikalni vidik



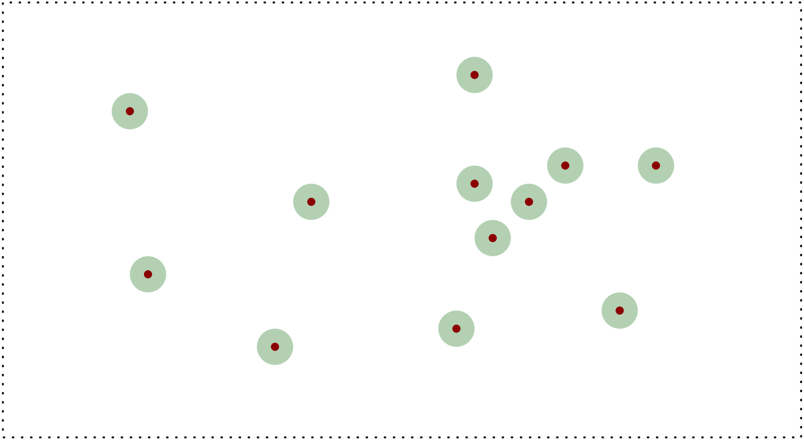
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



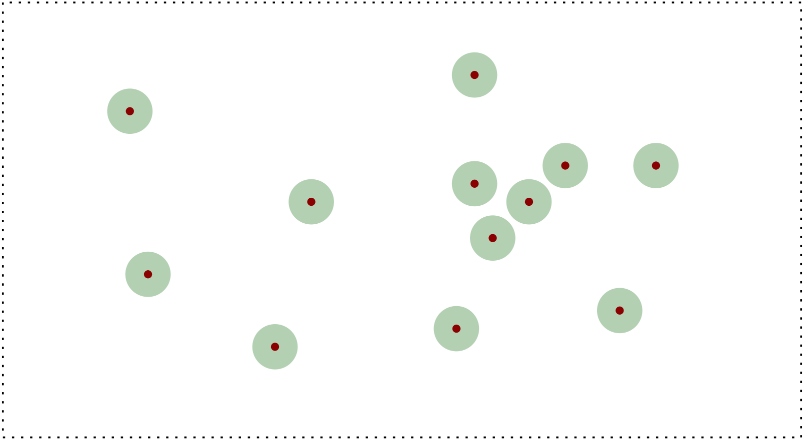
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



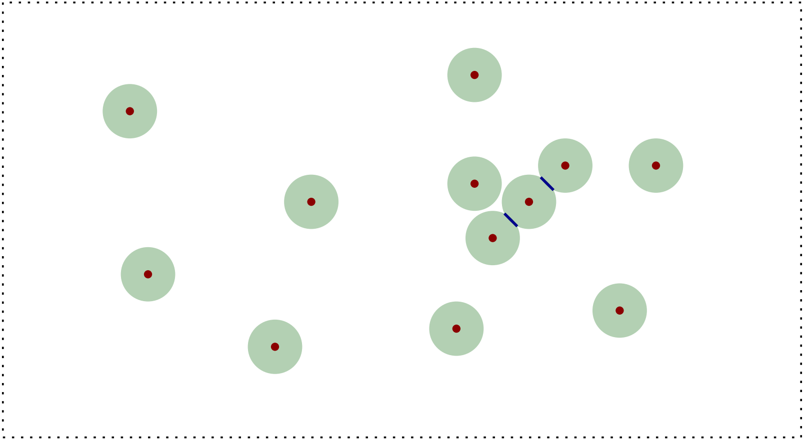
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



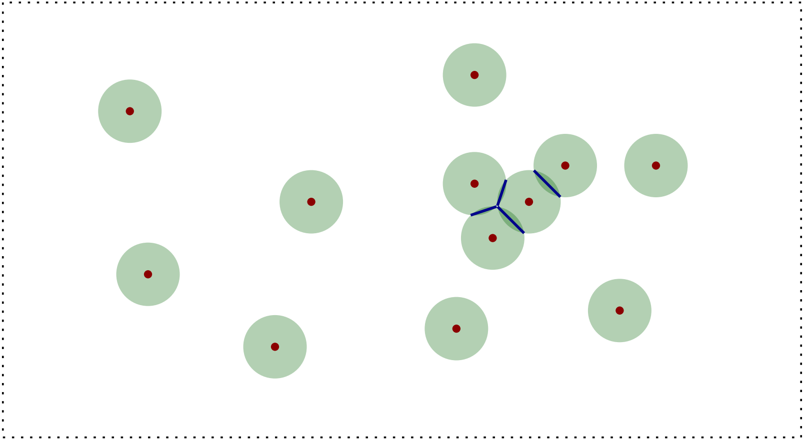
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



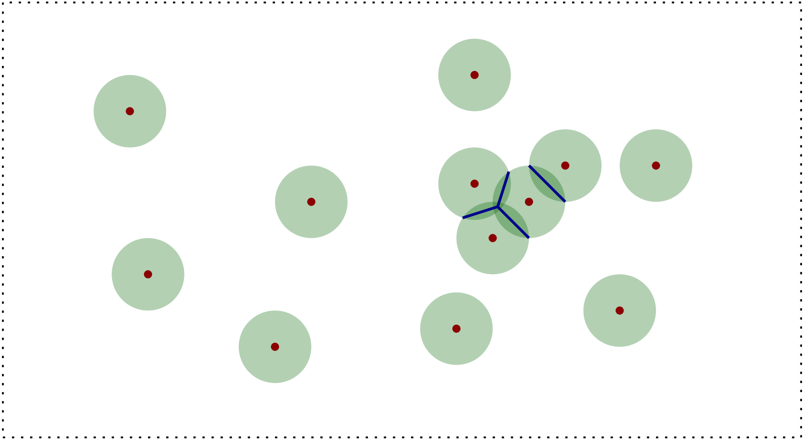
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



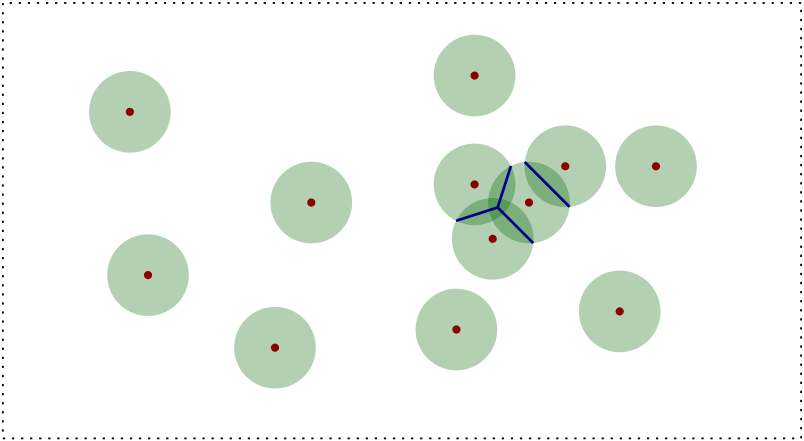
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



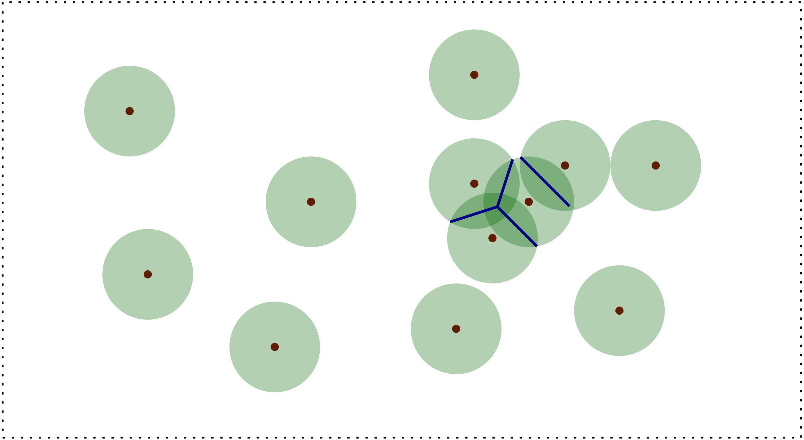
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



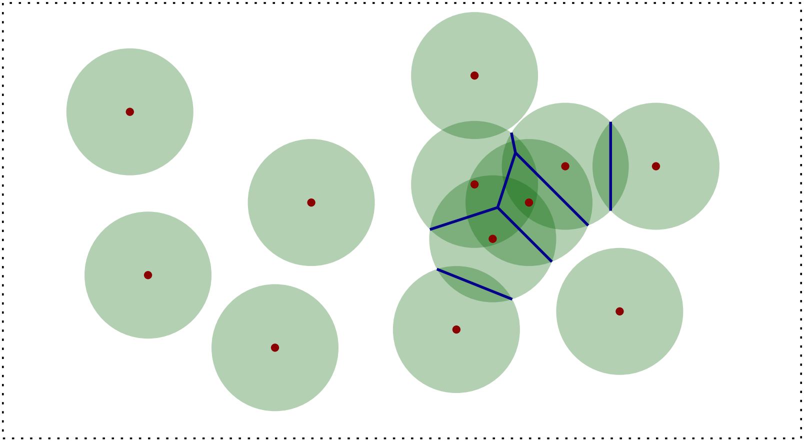
Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Fizikalni vidik



Vsaka točka v prvem središču diska, ki jo pokrije

Zgodovina

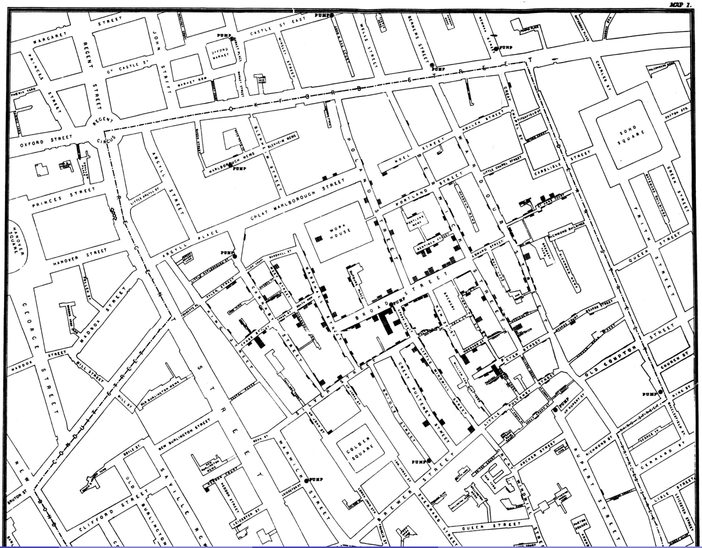
[Opozorilo: iz Wikipedije]

- René Descartes: Informal use of Voronoi diagrams in 1644.
- Peter Gustav Lejeune Dirichlet: used two-dimensional and three-dimensional Voronoi diagrams in his study of quadratic forms in 1850.
- John Snow: British physician John Snow in 1854 to analyze Broad Street cholera outbreak.
- Georgy Feodosievych Voronoy: defined and studied the general n-dimensional case in 1908.
- Alfred H. Thiessen: American meteorologist; use in geophysics and meteorology.

[Stigler's law of eponymy: no scientific discovery is named after its original discoverer.]

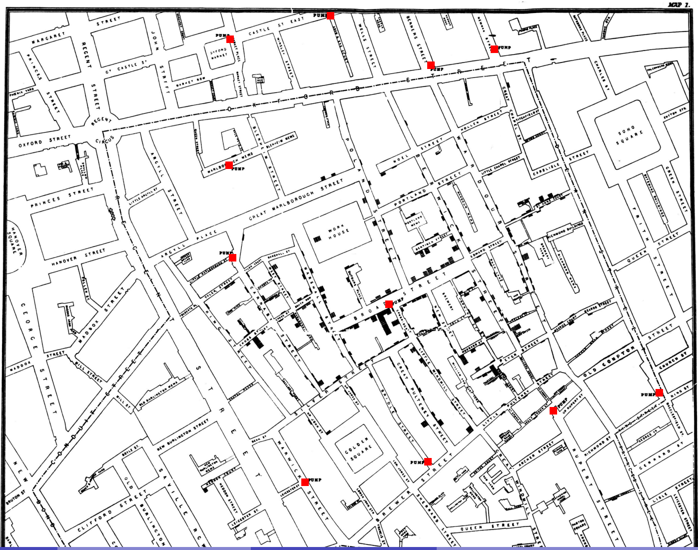
Zgodovina

Epidemija Kolere leta 1854 v Londonu – Zemljevid Johna Snowa



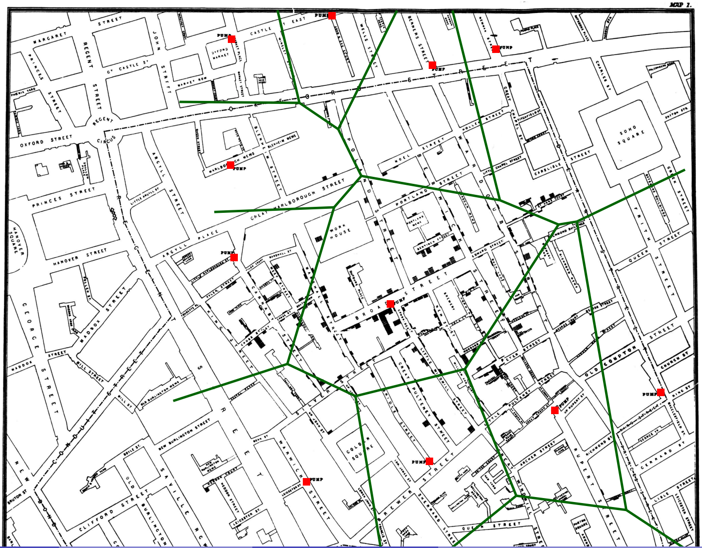
Zgodovina

Epidemija Kolere leta 1854 v Londonu – Zemljevid Johna Snowa



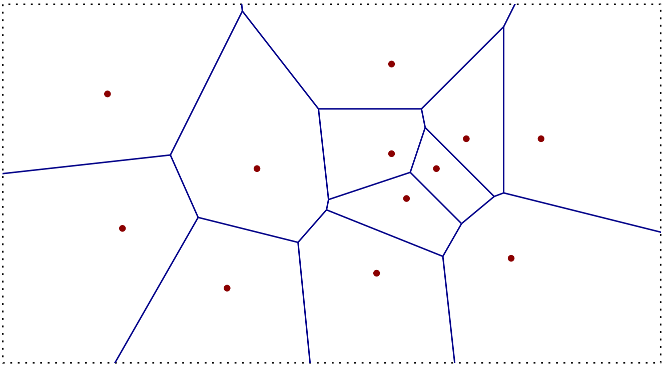
Zgodovina

Epidemija Kolere leta 1854 v Londonu – Zemljevid Johna Snowa



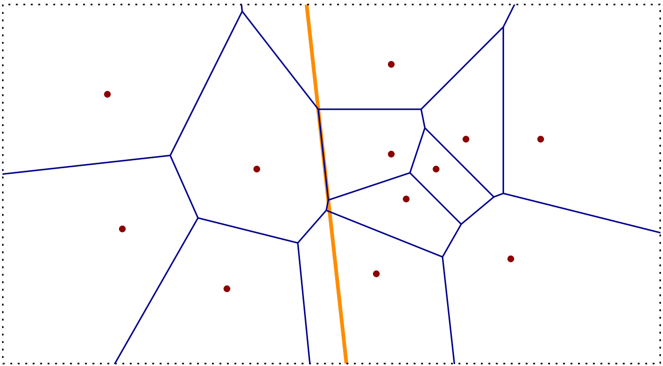
Enostavne lastnosti

- Kje ležijo robovi?



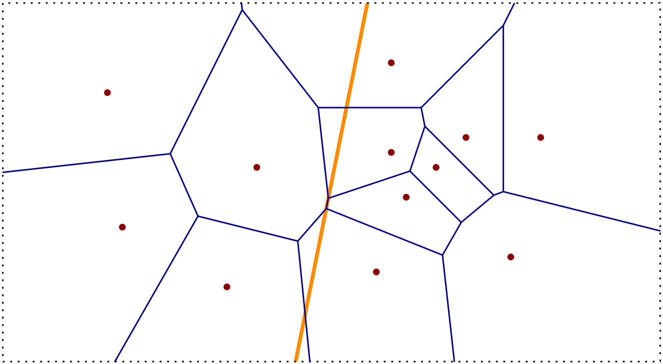
Enostavne lastnosti

- Kje ležijo robovi? Simetrale



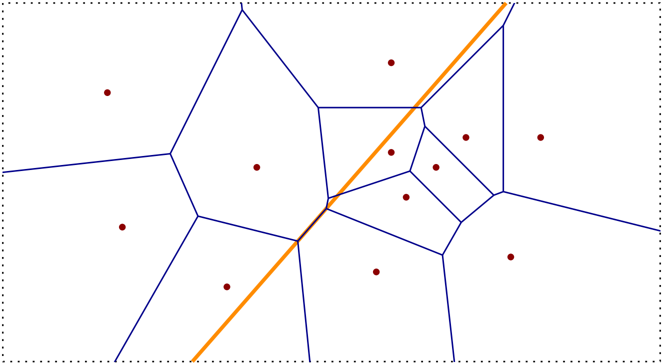
Enostavne lastnosti

- Kje ležijo robovi? Simetrale



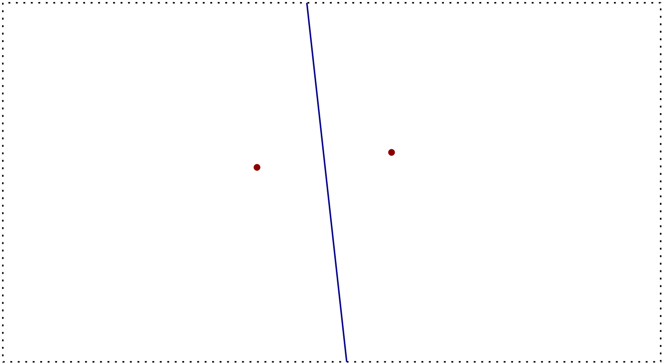
Enostavne lastnosti

- Kje ležijo robovi? Simetrale



Enostavne lastnosti

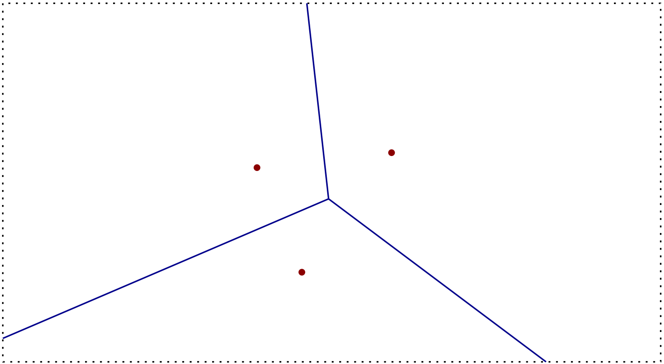
- Kje ležijo robovi? Simetrale



Simetrale imajo ključno vlogo za Voronojeve diagrame

Enostavne lastnosti

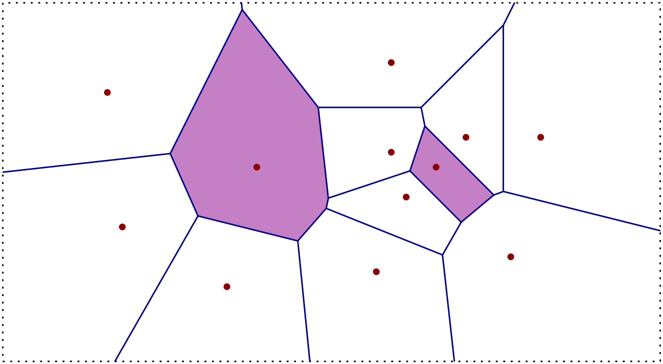
- Kje ležijo robovi? Simetrale



Simetrale imajo ključno vlogo za Voronojeve diagrame

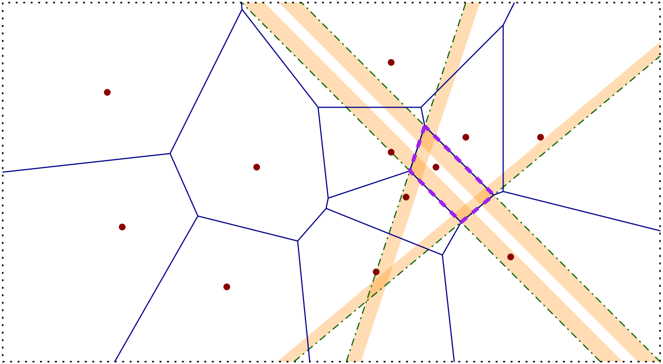
Enostavne lastnosti

- Celice so . . . [pridevnik]



Enostavne lastnosti

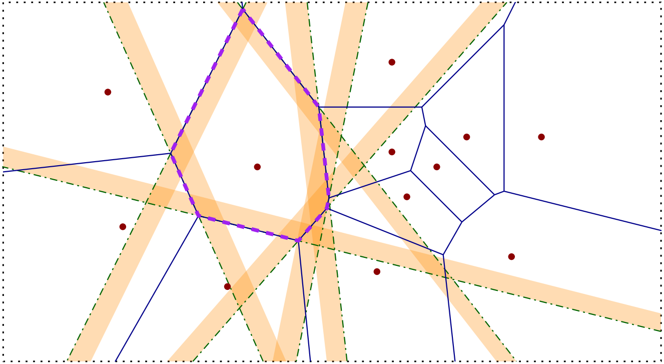
- Celice so . . . [pridevnik] konveksne



$$\begin{aligned} \mathrm{cell}(q,P) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall p \in P \setminus \{q\} :\ d(x,q) < d(x,p)\} \\ &= \bigcap_{p \in P \setminus \{q\}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,q) < d(x,p)\} \end{aligned}$$

Enostavne lastnosti

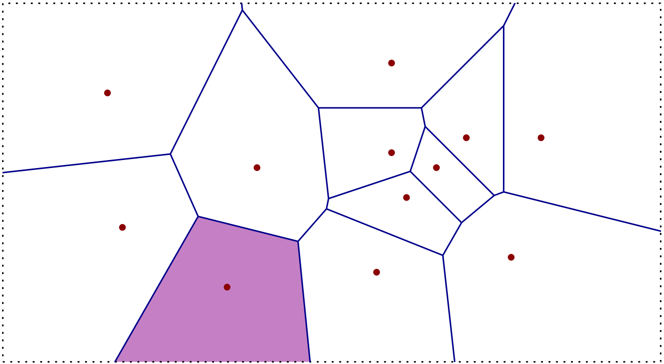
- Celice so . . . [pridevnik] konveksne



$$\begin{aligned} \mathrm{cell}(q,P) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall p \in P \setminus \{q\} :\ d(x,q) < d(x,p)\} \\ &= \bigcap_{p \in P \setminus \{q\}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,q) < d(x,p)\} \end{aligned}$$

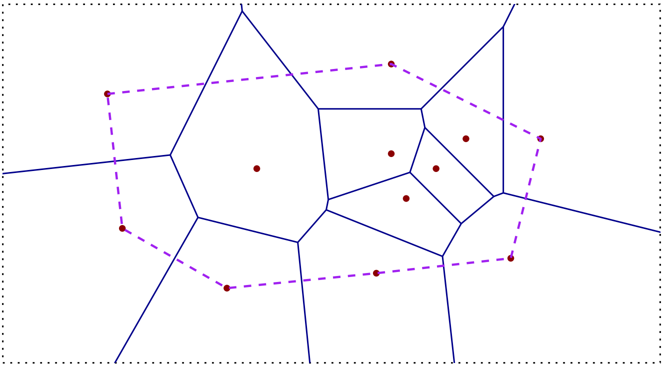
Enostavne lastnosti

- Katere celice so neomejene?



Enostavne lastnosti

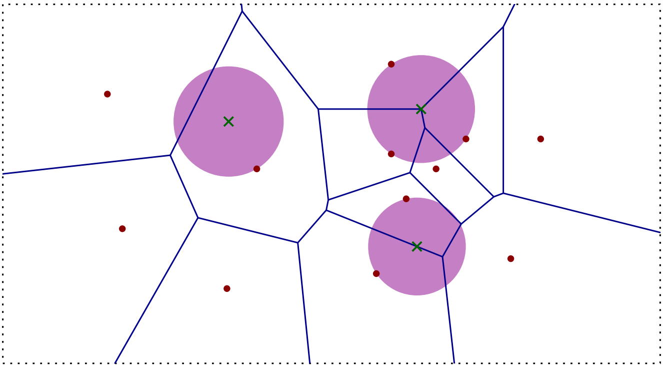
- Katere celice so neomejene?



Celice za semena, ki so na robu konveksne ovojnice semen

Enostavne lastnosti

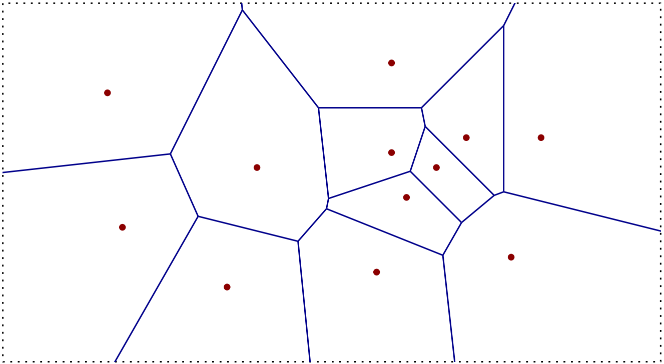
- Največji disk brez točk iz P v njegovi notranjosti



Točka x na robu celic $\mathrm{cell}(q, P)$ in $\mathrm{cell}(q', P)$ $\Leftrightarrow$ obstaja disk s središčem x, ki ima q in q' na robu in nobenih drugih semen noter

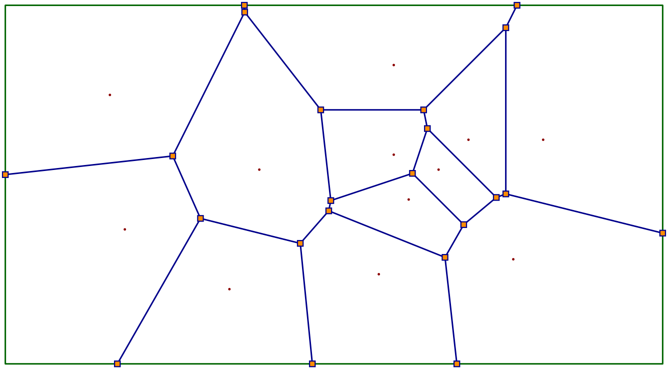
Enostavne lastnosti

- So lahko vse celice sosedne? Koliko robov lahko imamo?



Enostavne lastnosti

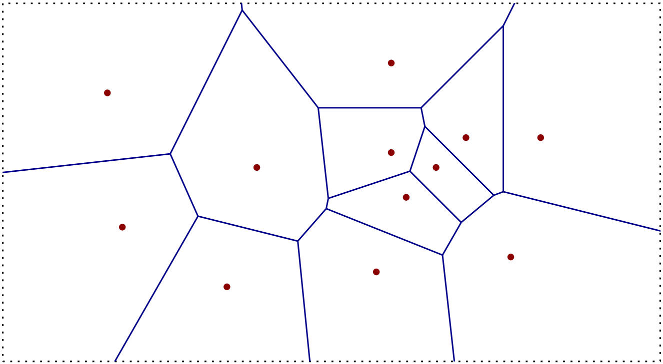
- So lahko vse celice sosedne? Koliko robov lahko imamo?



Risba ravninskega grafa; vsako vozlišče stopnje vsaj 3; n lic
$\Rightarrow$ največ $3n$ povezav in $6n$ oglišč (groba meja) via Eulerjeve formule
Topološka lastnost, ni geometrijska

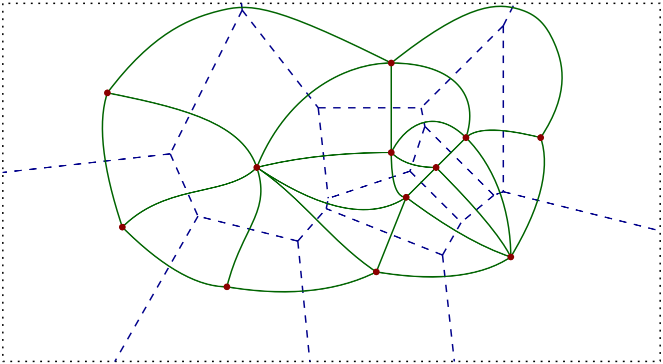
Voronojev diagram - Delaunayeva triangulacija

- Kaj je “dualni graf” Voronojevega diagrama?



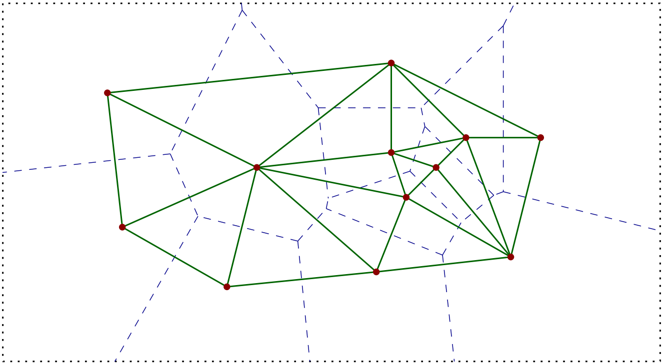
Voronojev diagram - Delaunayeva triangulacija

- Kaj je “dualni graf” Voronojevega diagrama?



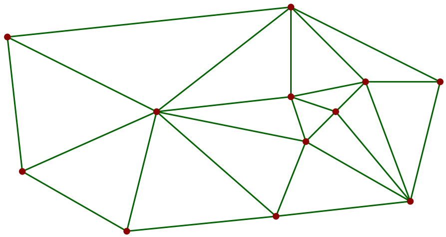
Voronojev diagram - Delaunayeva triangulacija

- Kaj je "dualni graf" Voronojevega diagrama? Delaunayeva triangulacija (v splošni legi)



Voronojev diagram - Delaunayeva triangulacija

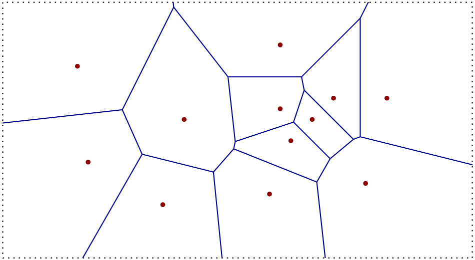
- Kaj je "dualni graf" Voronojevega diagrama? Delaunayeva triangulacija (v splošni legi)



Kaj ne pokrijemo

- Kako lahko učinkovito računamo Voronojeve diagrame?
  - Vhod: množica n točk P v ravnini
  - Izhod: Voronojev diagram za P

  Se lahko dela zelo učinkovito v času $O(n \log n)$
- Kako lahko shranimo Voronojeve diagrame?
  Seznam večkotnikov? Sosednost večkotnikov?
  Kako določimo, kje je podana točka?

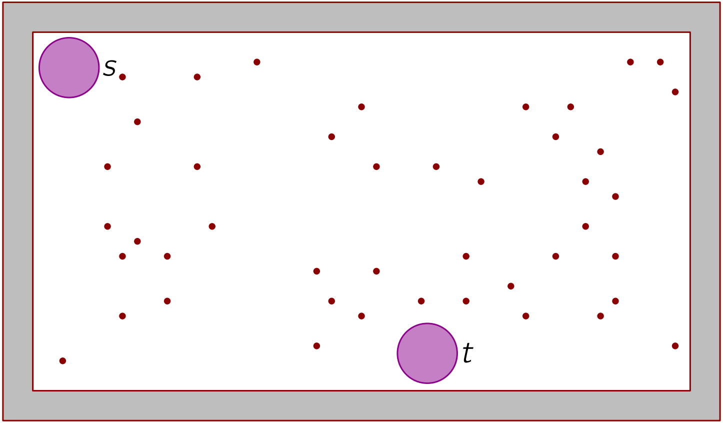


Odmor za možgane

Odmor za možgane

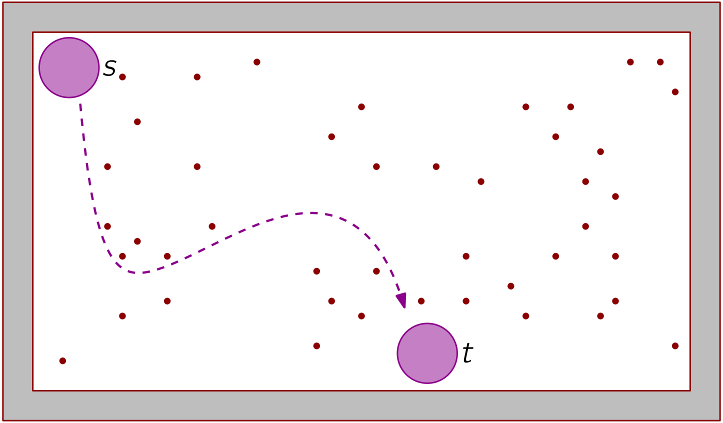
Načrtovanje gibanja

- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



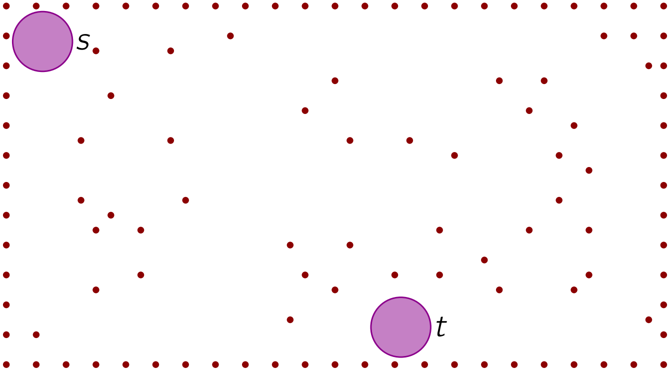
Načrtovanje gibanja

- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



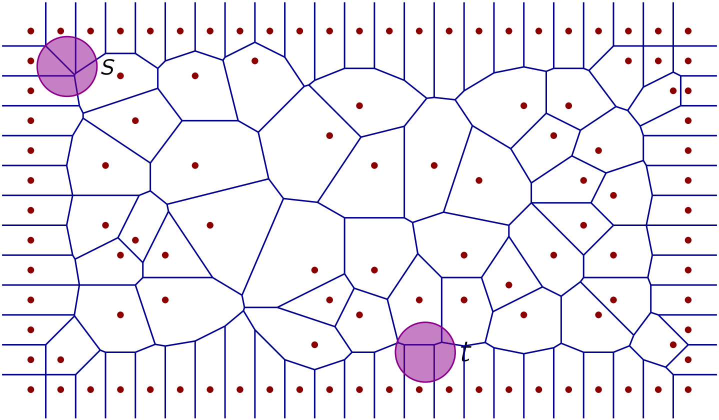
Načrtovanje gibanja

- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Načrtovanje gibanja

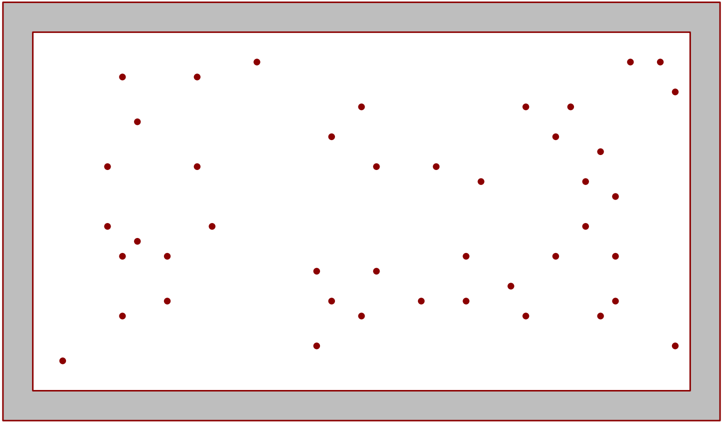
- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Če lahko, središče lahko vmes potuje po robovih VD ovir
Konfiguracijski prostor

Načrtovanje gibanja

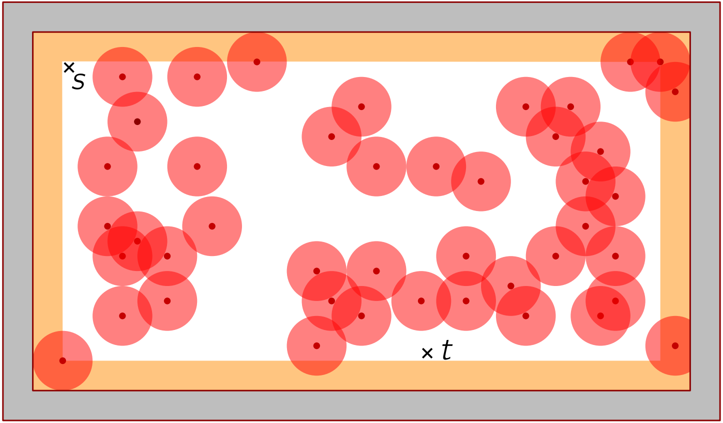
- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Če lahko, središče lahko vmes potuje po robovih VD ovir
Konfiguracijski prostor

Načrtovanje gibanja

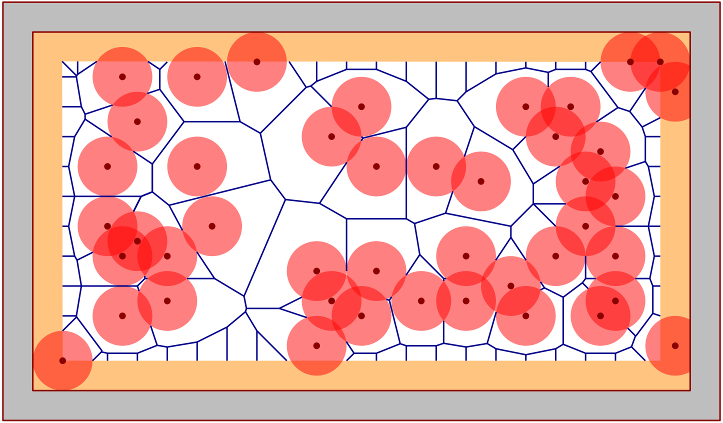
- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Če lahko, središče lahko vmes potuje po robovih VD ovir
Konfiguracijski prostor

Načrtovanje gibanja

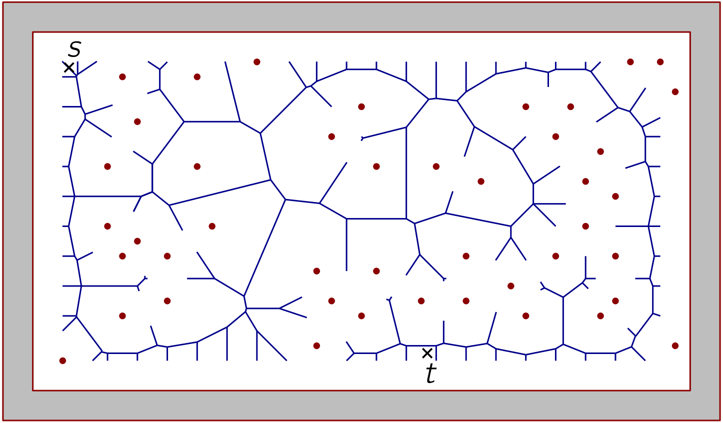
- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Če lahko, središče lahko vmes potuje po robovih VD ovir
Konfiguracijski prostor

Načrtovanje gibanja

- Ali lahko gre robot oblike diska od s do t?



Če lahko, središče lahko vmes potuje po robovih VD ovir
Konfiguracijski prostor maximum clearance

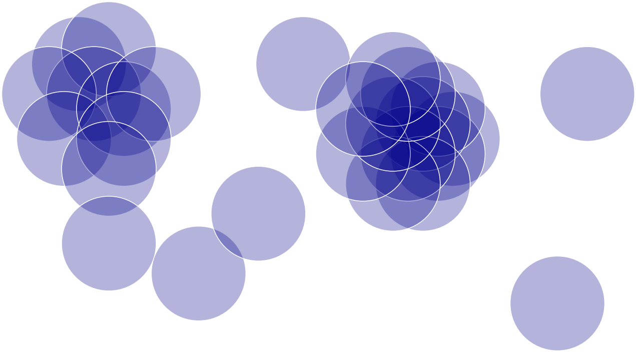
Voronojeva igra

- Dva igralca: A in B
- Arena: enotni kvadrat, na primer
- Vsak igralec bo dal n semen
- Zmagovalec je igralec, ki ima večjo vsoto ploščine svojih Voronojevih celic
- Različne verzije:
  - vsaka poteza ena točka
  - ena runda: A da vse točke in potem B da vse točke
  - minimalna razdalja med izbranimi točkami

`https://cfbrasz.github.io/VoronoiColoring.html`

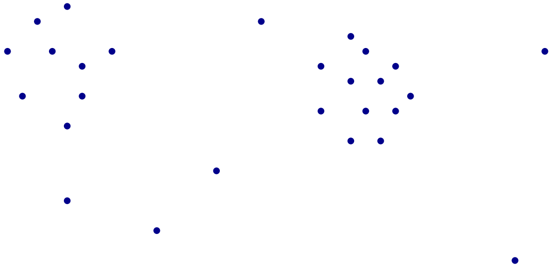
Ploščina unije enotnih diskov

- Učinkovito računanje ploščino unije n enotnih diskov



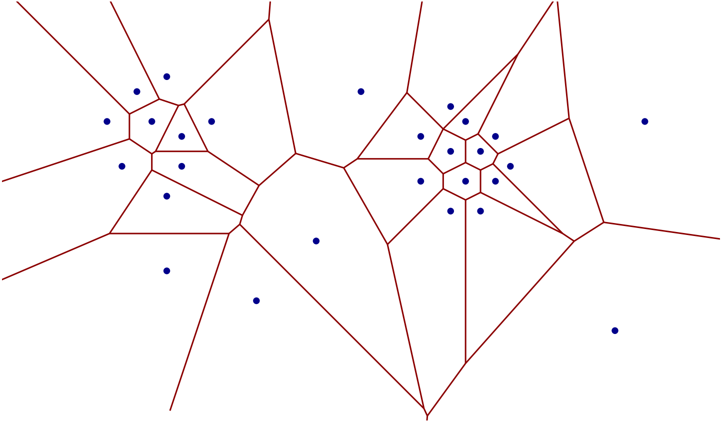
Ploščina unije enotnih diskov

- Učinkovito računanje ploščino unije n enotnih diskov



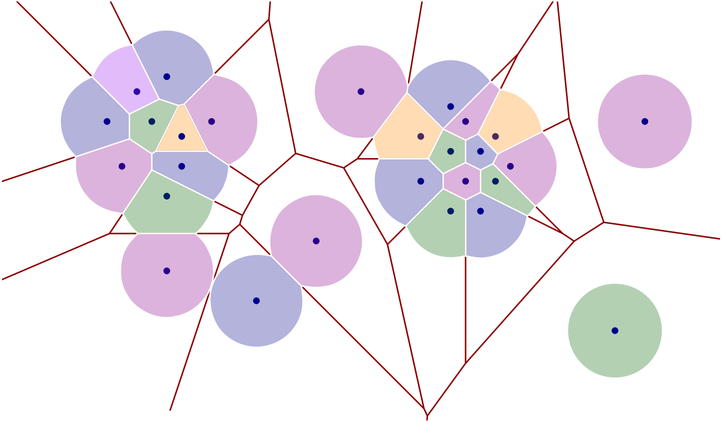
Ploščina unije enotnih diskov

- Učinkovito računanje ploščino unije n enotnih diskov



Ploščina unije enotnih diskov

- Učinkovito računanje ploščino unije n enotnih diskov

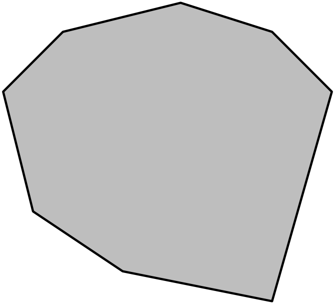


$$\text{area}\left(\bigcup_{p\in P} D(p,1)\right) = \sum_{p\in P} \text{area}\big(D(p,1)\cap \text{cell}(p,P)\big)$$

Približno $\sim n$ operacij namesto $\sim n^2$ ali $\sim 2^n$

Hipoteza – Nandakumar and Ramana Rao

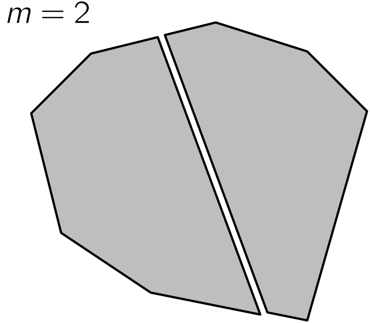
- $m > 1$ celo število. Vsak konveksni večkotnik v $\mathbb{R}^2$ se lahko razdeli na m konveksnih delov iste ploščine in istega obsega.
- Zdaj izrek (2018, Akopyan, Avvakumov, Karasev)



Voronojevi diagrami imajo ključno vlogo v dokazu
Enostavna domača naloga: za pravokotnike in diske

Hipoteza – Nandakumar and Ramana Rao

- $m > 1$ celo število. Vsak konveksni večkotnik v $\mathbb{R}^2$ se lahko razdeli na m konveksnih delov iste ploščine in istega obsega.
- Zdaj izrek (2018, Akopyan, Avvakumov, Karasev)



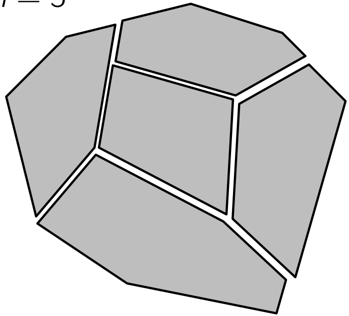
Voronojevi diagrami imajo ključno vlogo v dokazu

Enostavna domača naloga: za pravokotnike in diske

Hipoteza – Nandakumar and Ramana Rao

- $m > 1$ celo število. Vsak konveksni večkotnik v $\mathbb{R}^2$ se lahko razdeli na m konveksnih delov iste ploščine in istega obsega.
- Zdaj izrek (2018, Akopyan, Avvakumov, Karasev)

$m = 5$

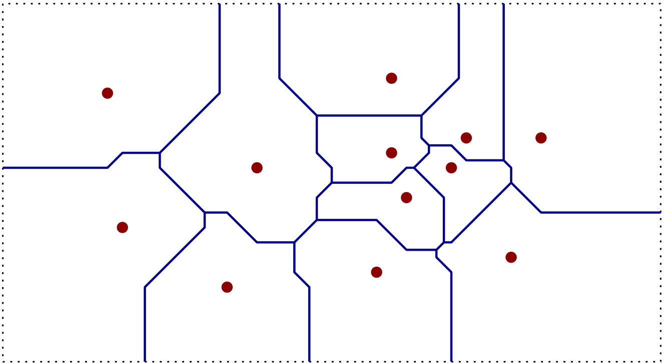


Voronojevi diagrami imajo ključno vlogo v dokazu

Enostavna domača naloga: za pravokotnike in diske

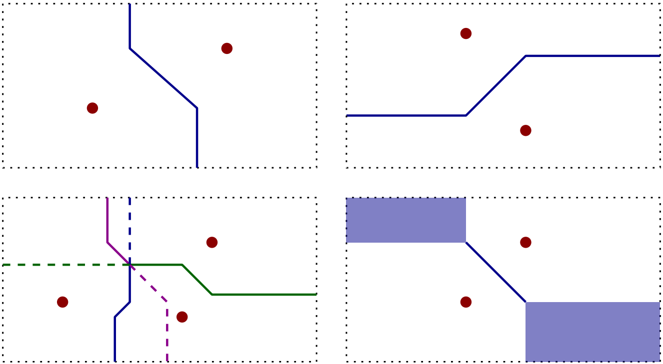
Posplošitve – Druge razdalje

L_1 metrika: $d((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$



Posplošitve – Druge razdalje

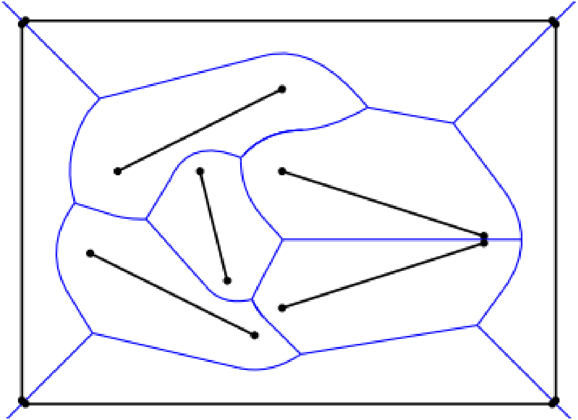
L_1 metrika: $d((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$



Simetrale imajo ključno vlogo v konstrukciji

Posplošitve – Drugi objekti

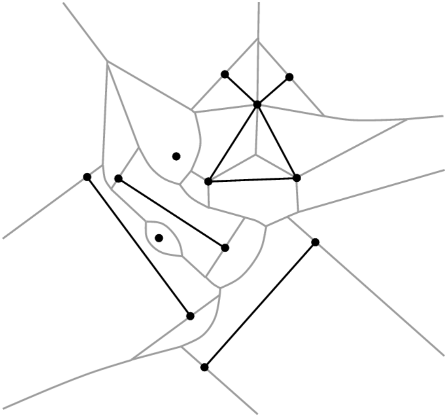
Evklidska metrika – Druga semena ali objekti



Credit: cannot trace it

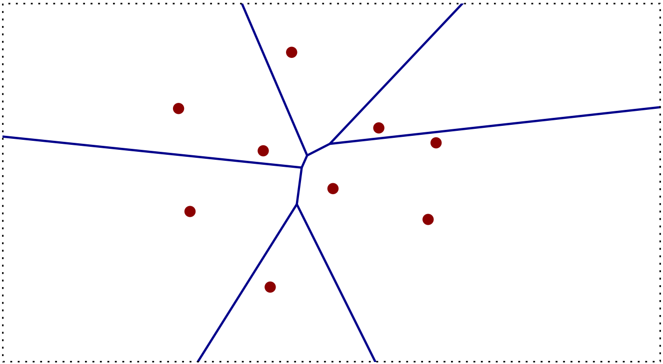
Posplošitve – Drugi objekti

Evklidska metrika – Druga semena ali objekti

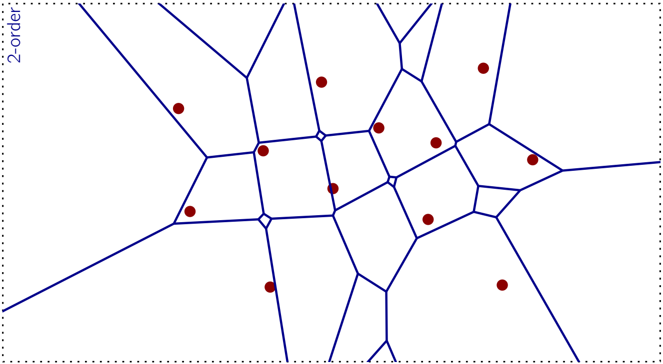


Credit: Karavelas; CGAL

Posplošitve – Drugi Voronojevi diagrami

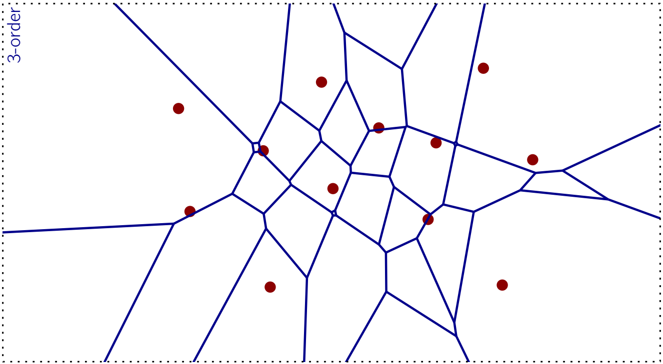


Posplošitve – Drugi Voronojevi diagrami



Voronojeva diagrama reda $k = 2$ in $k = 3$

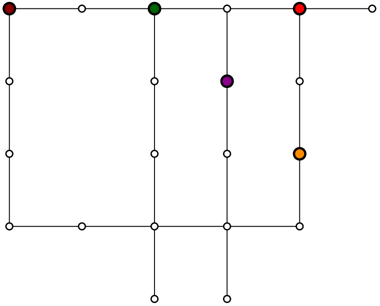
Posplošitve – Drugi Voronojevi diagrami



Voronojeva diagrama reda $k = 2$ in $k = 3$

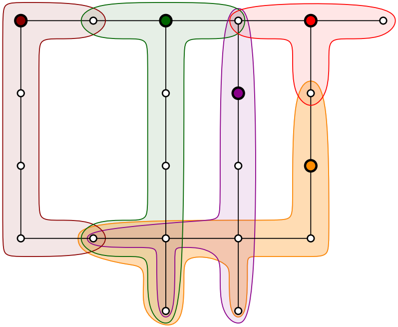
Posplošitve – Drugi prostori

- Drugi prostori
  - $\mathbb{R}^2$ z drugo metriko
  - $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^d$
  - teren
  - grafi
- Drugi objekti kot semena
  - točke
  - daljice ali premice
  - večkotniki
- Najbližje, najbolj oddaljeno, reda $k = 2$ itd
- ...



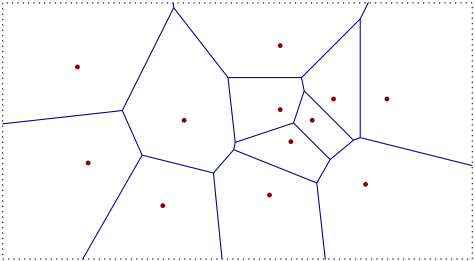
Posplošitve – Drugi prostori

- Drugi prostori
  - $\mathbb{R}^2$ z drugo metriko
  - $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^d$
  - teren
  - grafi
- Drugi objekti kot semena
  - točke
  - daljice ali premice
  - večkotniki
- Najbližje, najbolj oddaljeno, reda $k = 2$ itd
- ...



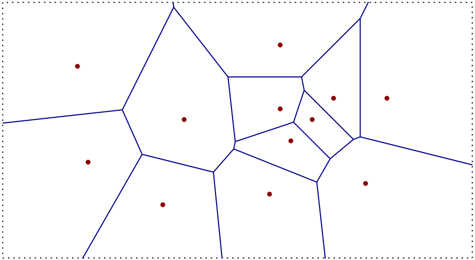
Zaključek

- Voronojevi diagrami
- Uporabnost
- Posplošitve
- Očitna orodja *a posteriori*



Zaključek

- Voronojevi diagrami
- Uporabnost
- Posplošitve
- Očitna orodja *a posteriori*



HVALA za vašo pozornost!!!