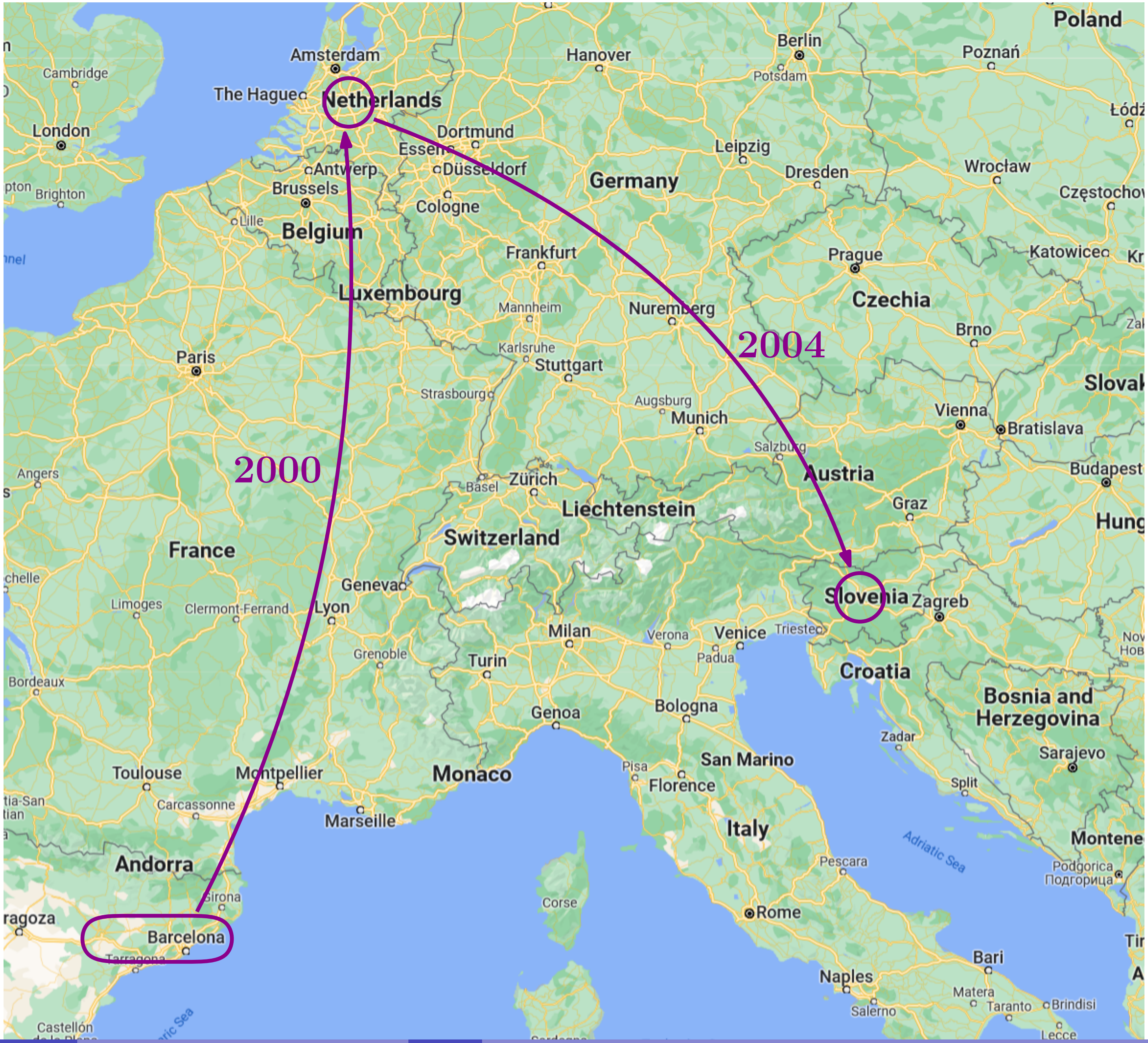
# Prekrižna števila grafov

Sergio Cabello
Fakulteta za matematiko in fiziko UL
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

FMF seminar za učitelje matematike
januar 2023

# Malo o meni



# Cilj predavanja

- Prekrižna števila grafov
- Težek problem
- Neenačba prekrižnega števila (Crossing number inequality)
- Uporaba v diskretni geometriji

- Nekatere trditve brez dokaza
- 3 dokaze

- Vprašanja dobrodošla ob poljubnem trenutku

# Kaj je graf

$G = (V, E)$ kjer

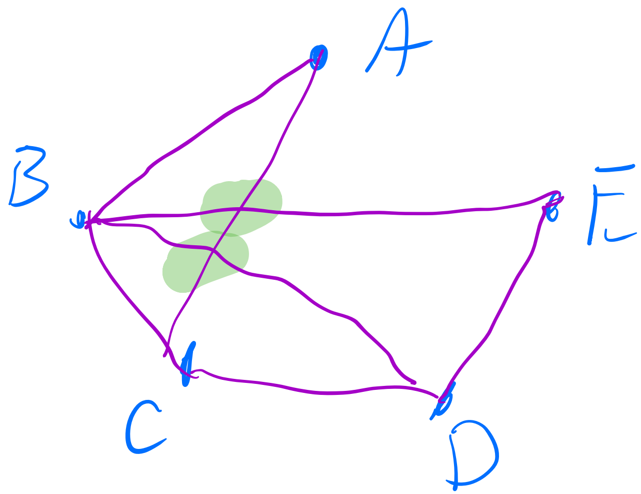
- $V$ množica vozlišč (~~točk~~)
- $E$ množica povezav, podmnožica neurejenih parov vozlišč

Primer

$$G = (V, E), \qquad V = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E = \big\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{E, B\}, \{B, D\}, \{A, C\}\big\}$$

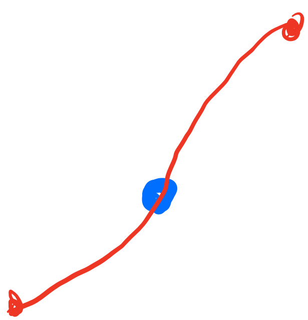
$$= \big\{AB, BC, CD, DE, EB, BD, AC\big\}$$

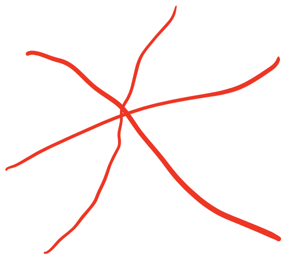


# Risba grafov – Drawing

Risba $D$ grafa $G$ – v ravnini

- vsako vozlišče je ena točka - injektivno
- vsaka povezava je ena zvezna, enostavna krivulja
- krajišči povezave $uv$ sta točki za $u$ in $v$
- notranjost povezave ne vsebuje nobenega vozlišča
- notranjost nobenih treh povezav ne grejo skoz iste točke



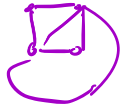


# Prekrižno število – Crossing number

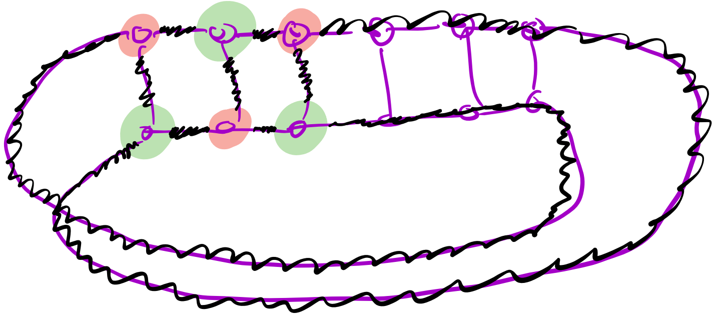
cr($D$): število križanj v risbi $D$
cr($G$): mininum cr($D$) po vseh risbah $D$ grafa $G$

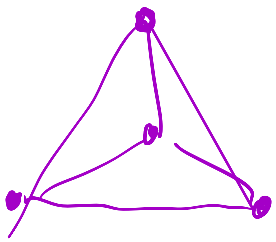
(Lahko bi uporabil risbe na sfero $\mathbb{S}^2$)

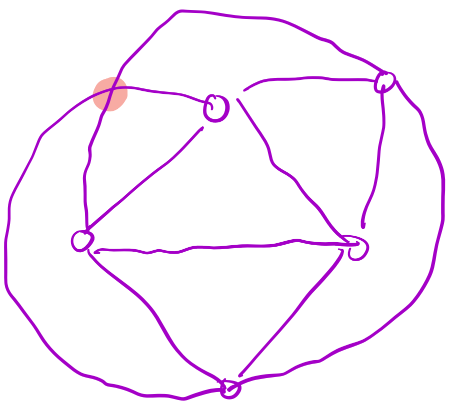
# Prekrižno število – Enostavni primeri

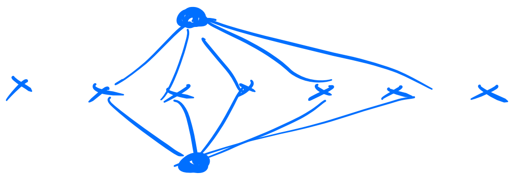


$K_4$, $K_5$, $K_{3,2}$, $K_{n,2}$, $K_{3,3}$, Möbius-lestev







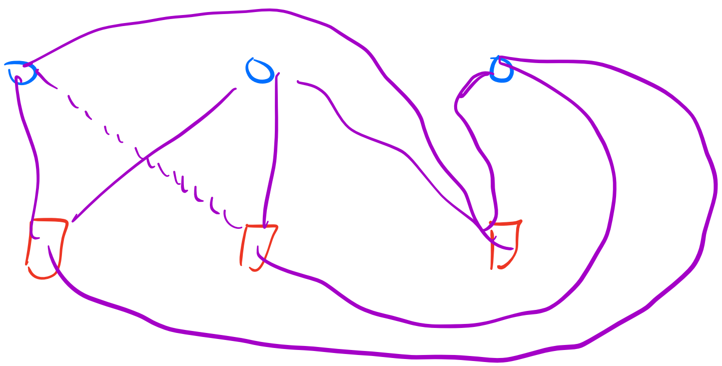


$cr(K_4) = 0$

$cr(K_5) \le 1$ (=)

$cr(K_{n,2}) = 0$

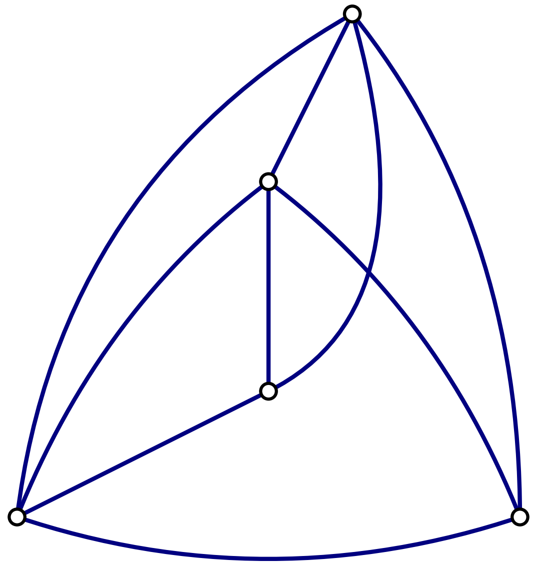
$K_{3,3}$

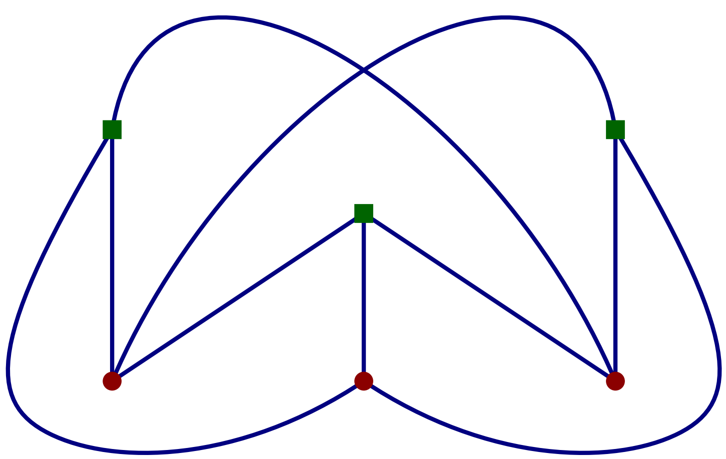


$cr(K_{3,3}) \le 1$ (=)

# Prekrižno število 0

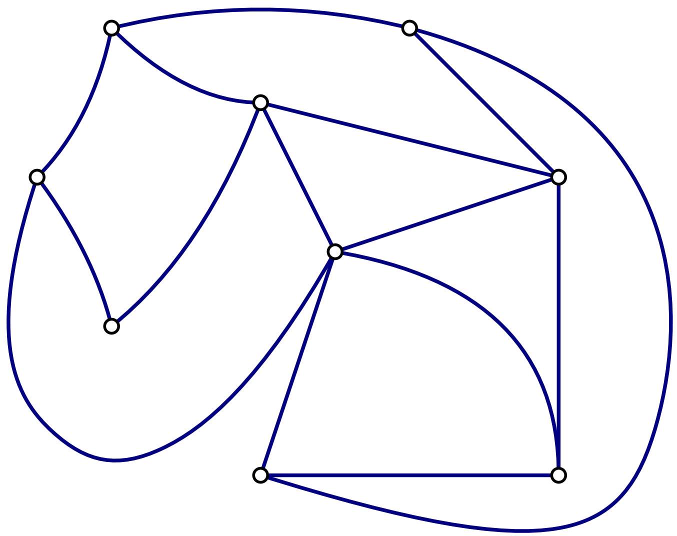
- $\mathrm{cr}(G) = 0$ natanko tedaj, ko je $G$ ravninski
- Ravninske grafe dobro razumemo
- $G$ ravninski $\iff$ $G$ ne vsebuje subdivizije $K_5$ ali $K_{3,3}$
- Računalnik lahko zelo hitro prepozna, kdaj je podan $G$ ravninski

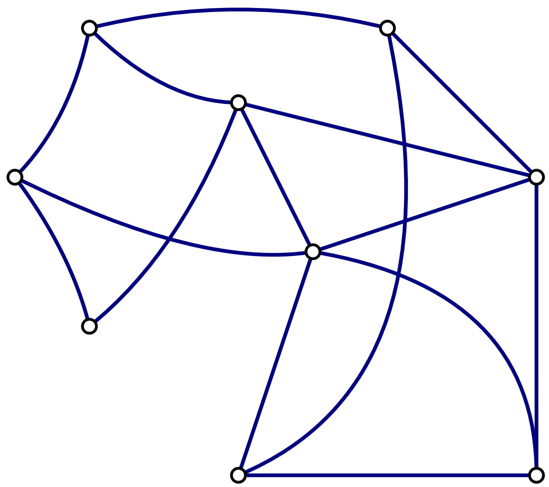




# Zakaj prekrižno število

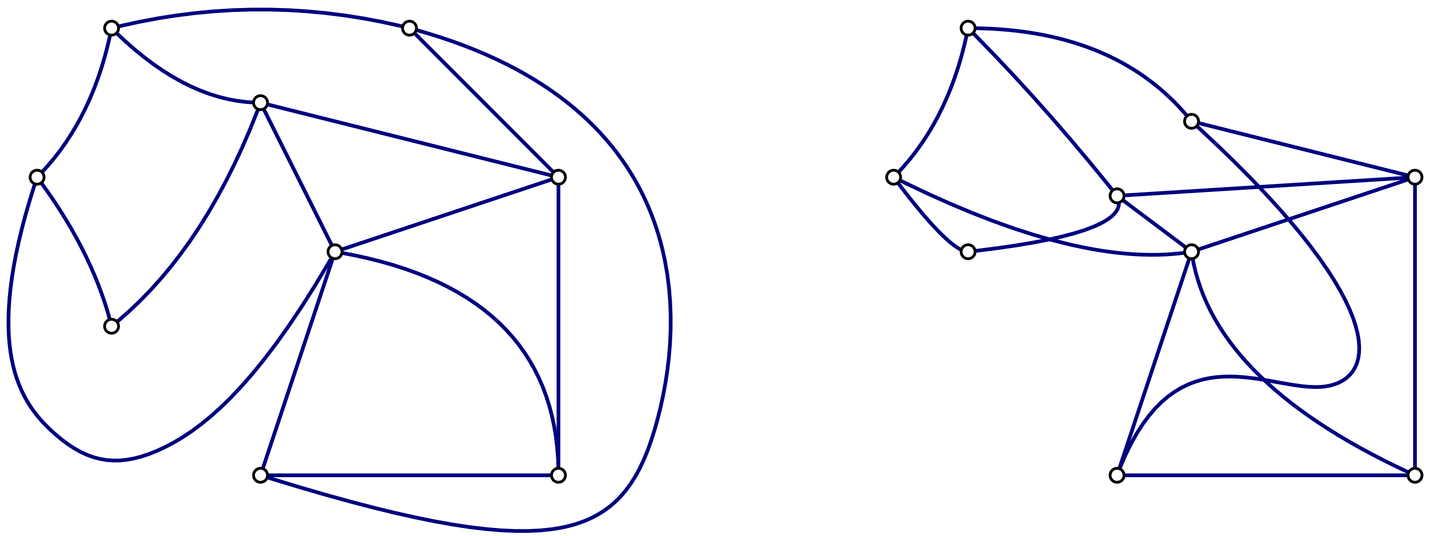
Purchase, Cohen, James 1995: "Increasing the number of arc crossings in a graph decreases the understability of the graph".
Purchase, 1997: "reducing the number of edge crosses is by far the most important aesthetic".





# Zakaj prekrižno število

Purchase, Cohen, James 1995: "Increasing the number of arc crossings in a graph decreases the understability of the graph".
Purchase, 1997: "reducing the number of edge crosses is by far the most important aesthetic".

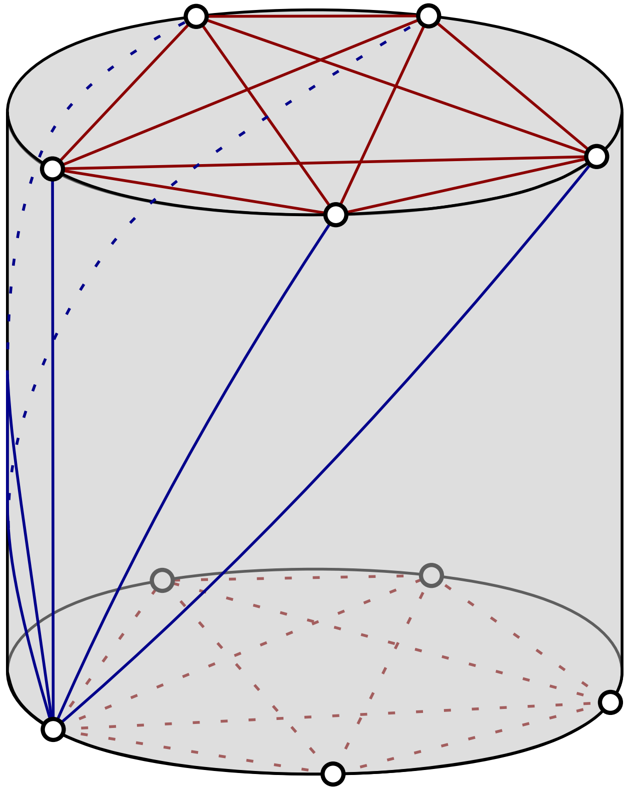


Huang, Eades, Hong, 2014: "The effect of crossing angles on human graph comprehension was validated."
Optimizacija, VLSI

# Glavne domneve – Harary-Hill

Harary-Hillova domneva o prekrižnem številu polnih grafov (1958)

$$\mathrm{cr}(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor \approx \frac{n^4}{64} \approx \frac{\binom{|E(K_n)|}{2}}{8}$$



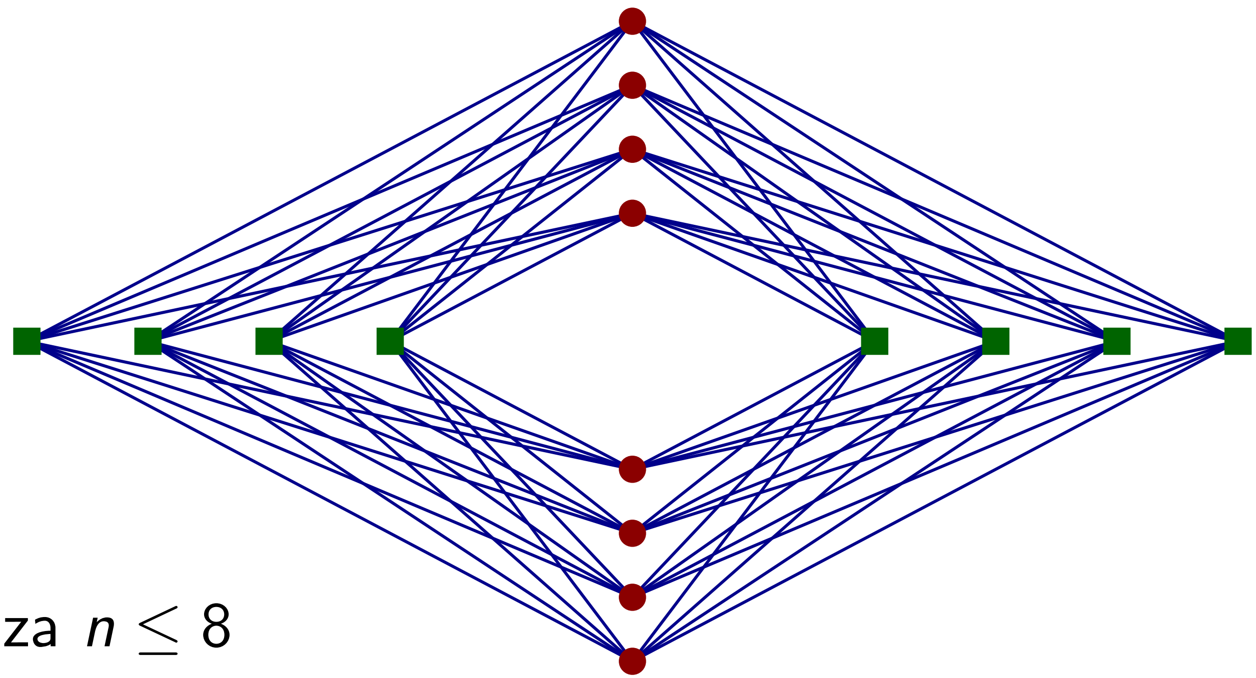
Preverjena za $n \leq 12$

Velja $c \cdot n^4 \leq \mathrm{cr}(K_n) \leq c' \cdot n^4$

# Glavne domneve – Zarankiewicz-Turán

Zarankiewicz domneva o prekrižnem številu polnih dvodelnih grafov

$$\mathrm{cr}(K_{n,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2 \approx \frac{n^4}{16} \approx \frac{\binom{|E(K_{n,n})|}{2}}{8}$$

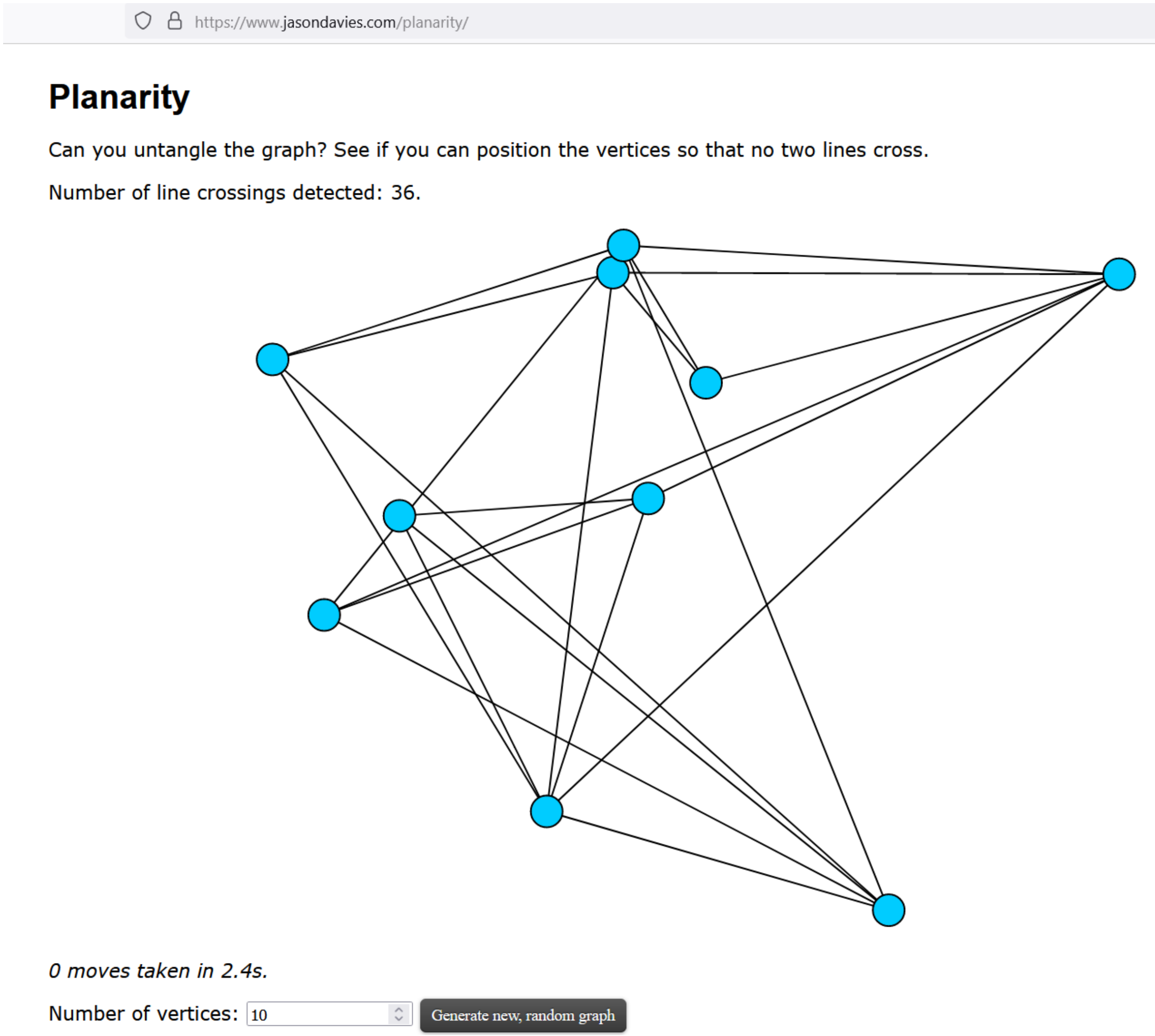


Preverjena za $n \leq 8$

Velja $c \cdot n^4 \leq \mathrm{cr}(K_{n,n}) \leq c' \cdot n^4$

# Planarity game

https://www.jasondavies.com/planarity/



# Premočrtne risbe – Rectilinear drawings

Vsaka povezava je narisana z daljico

# Premočrtne risbe – Rectilinear drawings

Vsaka povezava je narisana z daljico

$\overline{\mathrm{cr}}(G)\ldots$ premočrtno prekrižno število grafa $G$

# Premočrtne risbe – Rectilinear drawings

Vsaka povezava je narisana z daljico

$\overline{\text{cr}}(G)\ldots$ premočrtno prekrižno število grafa $G$

- $G$ ravninski $\iff \text{cr}(G) = 0 \iff \overline{\text{cr}}(G) = 0$

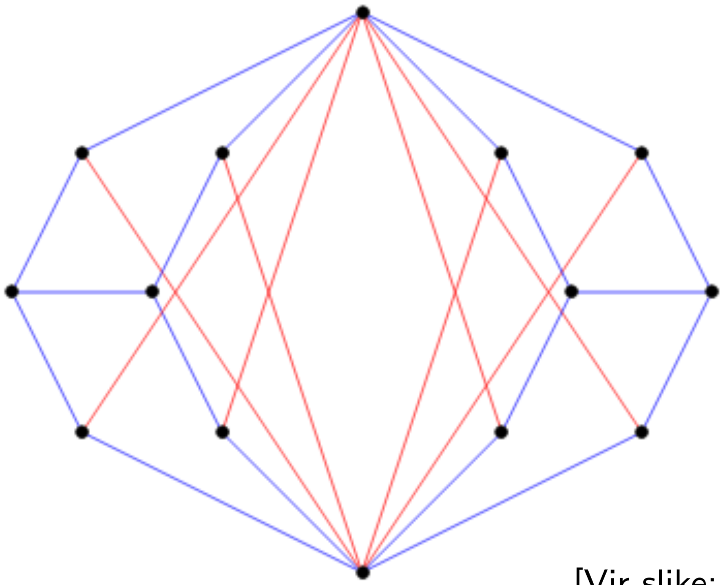
[Wagner 1936, Fáry 1948]

# Premočrtne risbe – Rectilinear drawings

Vsaka povezava je narisana z daljico

$\overline{\text{cr}}(G)\ldots$ premočrtno prekrižno število grafa $G$

- $G$ ravninski $\iff \text{cr}(G) = 0 \iff \overline{\text{cr}}(G) = 0$
  [Wagner 1936, Fáry 1948]
- $\text{cr}(G) = 1 \iff \overline{\text{cr}}(G) = 1$ [Bienstock, Dean 1993]
  $\text{cr}(G) = 2 \iff \overline{\text{cr}}(G) = 2$
  Trdi brez dokaza, da $\text{cr}(G) = 3 \iff \overline{\text{cr}}(G) = 3$
  $\exists G$ tako, da $\text{cr}(G) = 4$ in poljubno $\overline{\text{cr}}(G) \geq 4$



[Vir slike: Stackexchange]

# Premočrtne risbe – Rectilinear drawings

Koliko je $\overline{\text{cr}}(D)$ v risbi grafa $K_n$, kjer so vsa vozlišča v konveksnem položaju?

# Različna prekrižna števila

Različne sorte risb dajo različne sorte prekrižna števila
Ogromna količina dela
Pregledni članek Marcusa Schaeferja ima 154 strani

## The Graph Crossing Number and its Variants: A Survey

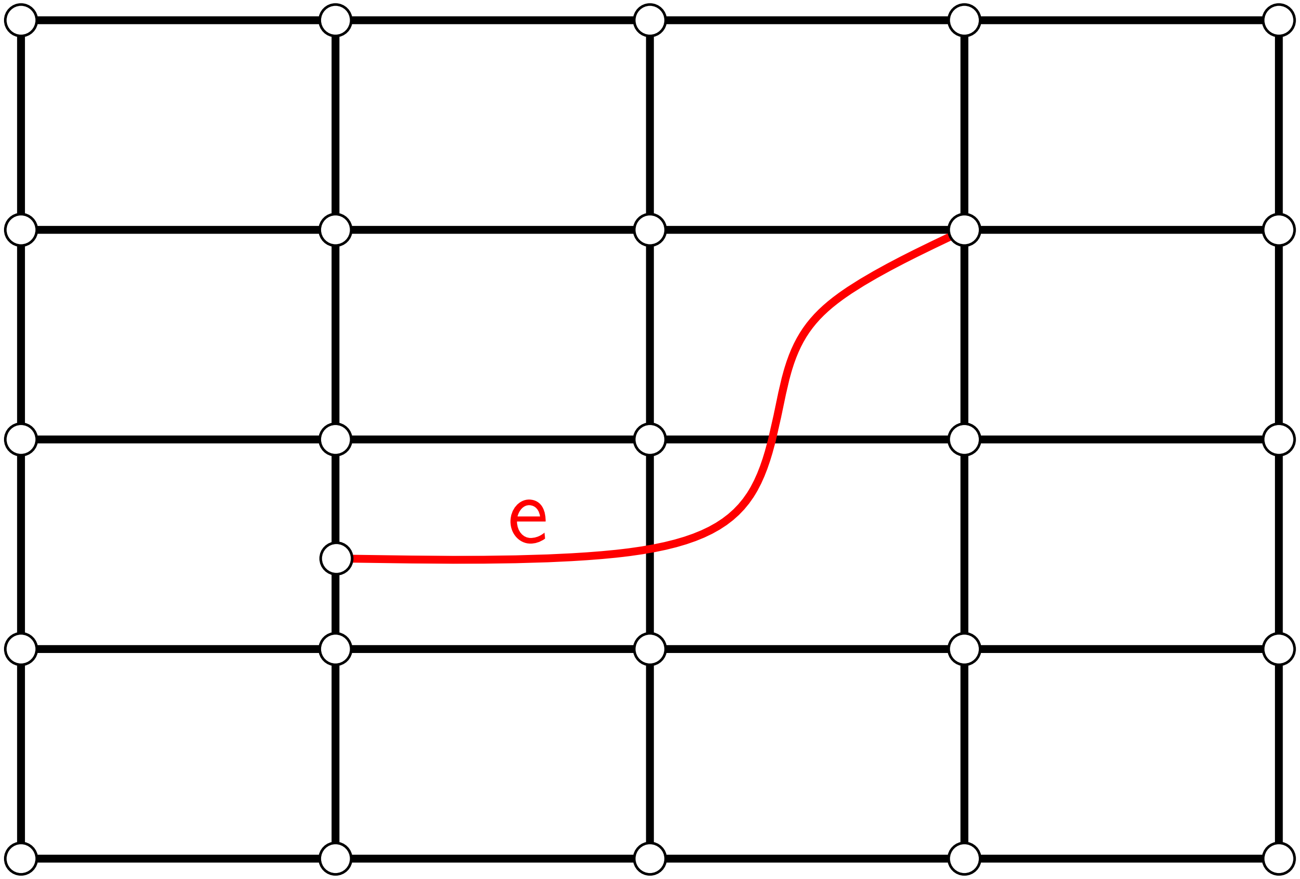
Marcus Schaefer
School of Computing
DePaul University
Chicago, Illinois 60604, U.S.A.
mschaefer@cdm.depaul.edu

Submitted: Dec 20, 2011; Accepted: Apr 4, 2013
First Edition: Apr 17, 2013
Second Edition: May 15, 2014
Third Edition: Dec 22, 2017
Fourth Edition: Feb 14, 2020
Fifth Edition: Sep 4, 2020
Sixth Edition: May 21, 2021
Seventh Edition: Apr 8, 2022
Mathematics Subject Classifications: 05C62, 68R10

**Abstract**

The crossing number is a popular tool in graph drawing and visualization, but there is not really just one crossing number; there is a large family of crossing number notions of which the crossing number is the best known. We survey the rich variety of crossing number variants that have been introduced in the literature for purposes

# Odmor



# Cilj predavanja

- Prekrižna števila grafov
- Težek problem
- Neenačba prekrižnega števila (Crossing number inequality)
  - Spodnja meja za $\mathrm{cr}(G)$
- Uporaba v diskretni geometriji

- Nekatere trditve brez dokaza
- 3 dokaze

- Vprašanja dobrodošla ob poljubnem trenutku

# Eulerjeva formula za ravninske grafe

Trditev

$G = (V, E)$ ravninski graf in povezan.

$D$ neka risba grafa brez križanj (ravninska risba) z množico lic $F$.

- $|V| - |E| + |F| = 2$ (Eulerjeva formula)
- $|E| \leq 3|V| - 6 < 3|V|$

# Linearno prekrižno število

Trditev

Za vsak graf $G = (V, E)$ velja $\text{cr}(G) \geq |E| - 3|V|$.

Ideja: v risbi odstranimo eno povezavo v vsakem križanju

# Neenačba prekrižnega števila

Izrek

Za vsak graf $G = (V, E)$, kjer $|E| \geq 4|V|$, velja

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Ideja: v optimalni risbi odstranimo vozlišča naključno

# Polni grafi

Posledica

$\text{cr}(K_n)$ je $\sim n^4$.

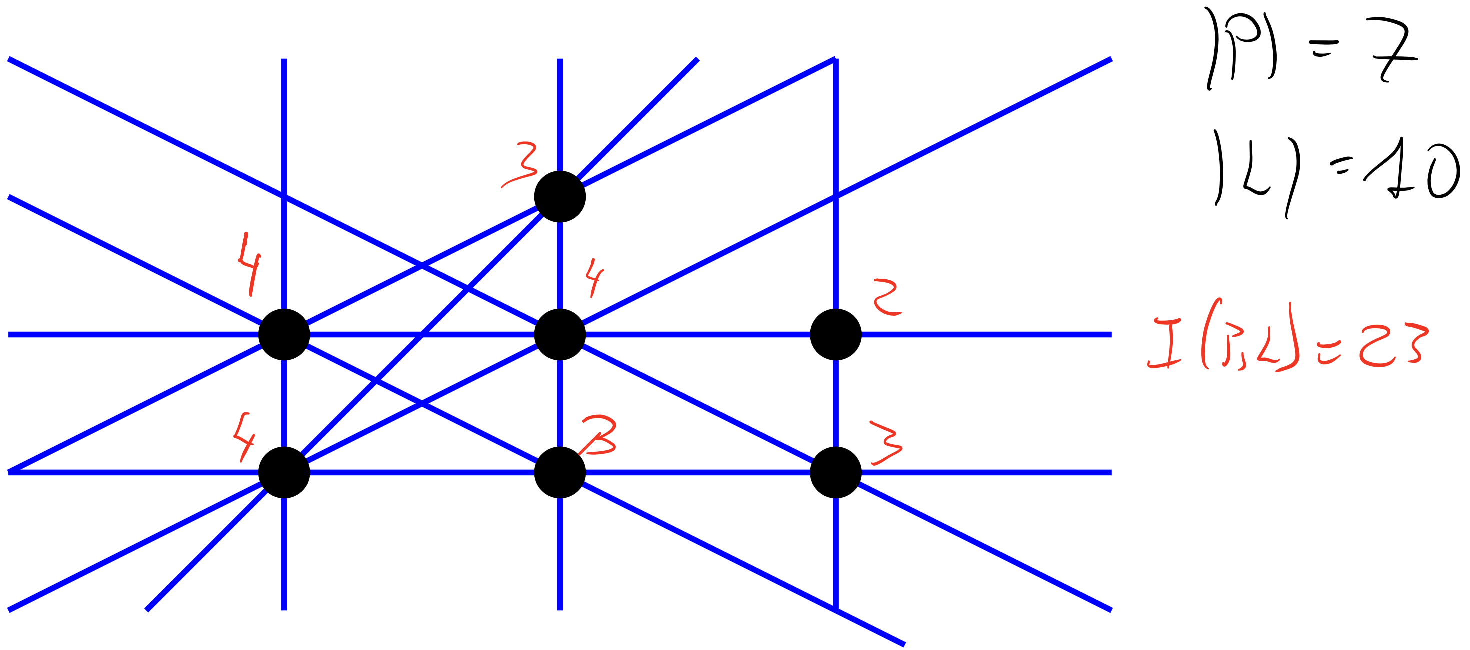
$\text{cr}(K_{n,n})$ je $\sim n^4$.

Ideja: imajo $\sim n^2$ povezav

# Incidence med premicami in točkami

- $P \subset \mathbb{R}^2$ končna množica točk
- $L$ končna množica premic
- incidenca je par $(p, \ell) \in P \times L$, za katero velja $p \in \ell$
- število incidenc je

$$I(P, L) = |\{(p, \ell) \in P \times L \mid p \in \ell\}|$$



# Incidence med premicami in točkami

Če imamo $n$ točk in $n$ premic, kako veliko lahko je $I(P, L)$?

# Incidence med premicami in točkami

Če imamo $n$ točk in $n$ premic, kako veliko lahko je $I(P, L)$?

Izrek

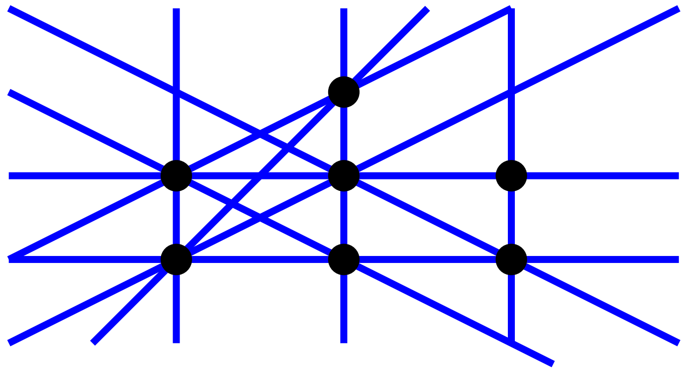
Če $P$ ima $n$ točk in $L$ ima $n$ premic, potem je $I(P, L) \leq 5n^{4/3}$.
Za vsak $n$ obstaja množica $n$ točk $P$ in množica $n$ premic $L$ tako, da $I(P, L) \geq \frac{1}{2}n^{4/3}$

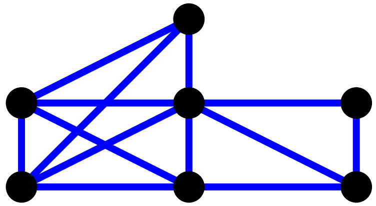
$n^{4/3}$ je prava velikost za $\max I(P, L)$, ko $|P| = |L| = n$

# Zgornja meja

Če $P$ ima $n$ točk in $L$ ima $n$ premic, potem je $I(P, L) \leq 5n^{4/3}$.

- Konstruiramo graf $G$, pri katerem $V(G) = P$ in povezujemo zaporedne točke na vsaki $\ell \in L$
- $I(P, L) \leq |E| + n$
- Dobimo risbo $D$ grafa $G$, ki uporabi dele od premice v $L$
- $cr(D) \leq \binom{n}{2} < n^2/2$
- Neenačba prekrižnega števila zagotovi $cr(D) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{E^3}{V^2}$
- Dobimo $n^2/2 \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{E^3}{V^2}$ in torej $E^3 \leq 32n^4$

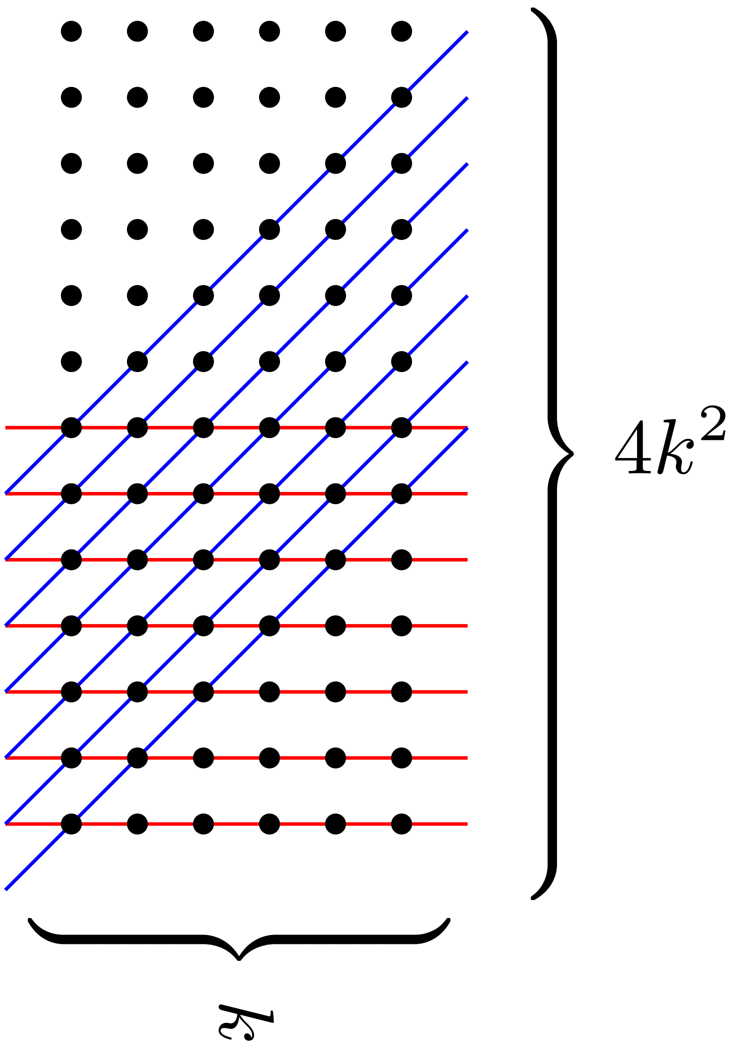




# Spodnja meja

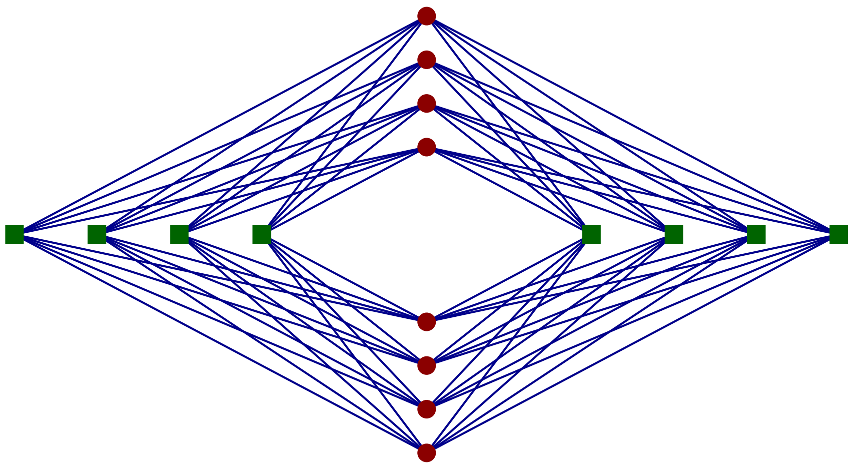
Obstaja množica $n$ točk $P$ in množica $n$ premic $L$ tako, da $I(P, L) \geq \frac{1}{2} n^{4/3}$

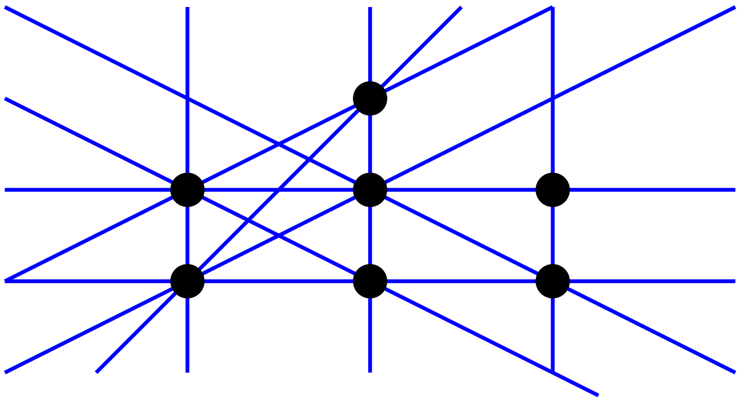
- Predpostavimo $n = 4k^3$, torej $k > n^{1/3}/2$
- notacija $[k] = \{0, 1, \ldots, k-1\}$
- $P = [k] \times [4k^2]$
- $C = [2k] \times [2k^2]$
- $L = \{y = ax + b \mid (a, b) \in C\}$
- vsaka premica v $L$ ima $k$ incidenc s $P$
- $|C| \cdot k| = 4k^3 \cdot k = n^{4/3}/2$



# Zaključek

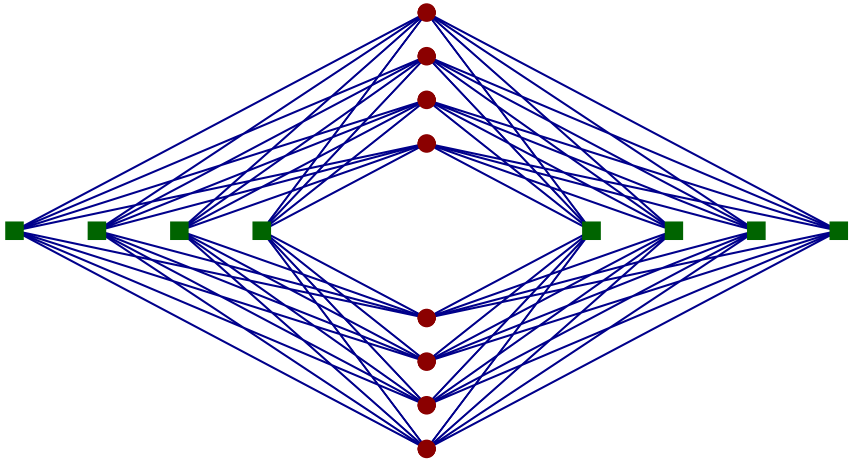
- Prekrižno število
- Premočrtno prekrižno število
- Enostavni koncept, ampak težki problemi v matematiki
- Uporabna orodja v diskretni geometriji

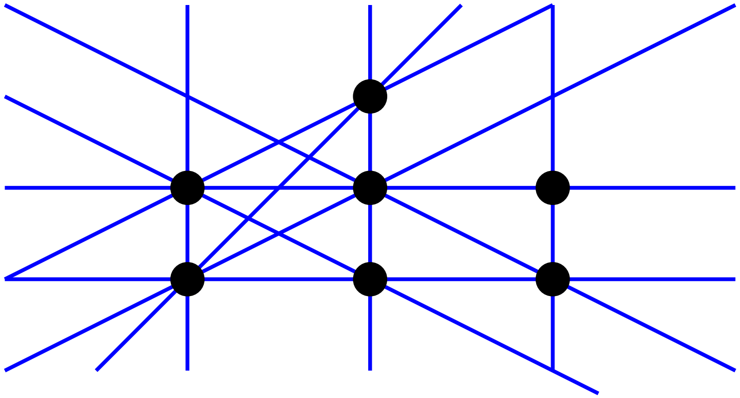




# Zaključek

- Prekrižno število
- Premočrtno prekrižno število
- Enostavni koncept, ampak težki problemi v matematiki
- Uporabna orodja v diskretni geometriji





HVALA za vašo pozornost!!!