

GEOMETRIJA IN RAČUNSKI MEHANIZMI

Seminar 2023

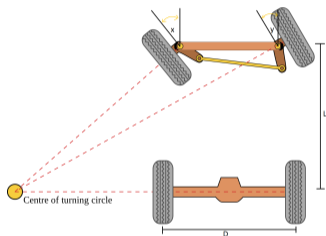
Blaž Jelenc

blaz.jelenc@fmf.uni-lj.si

Faculty of Mathematics and Physics
University of Ljubljana, Slovenia

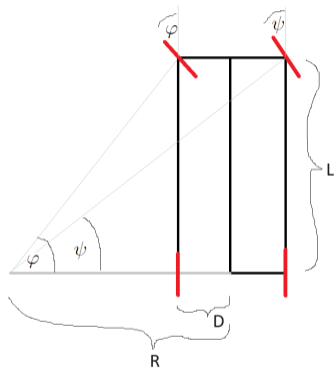
12. 9. 2023

Krmilni sistem avtomobila



V ovinku se mora notranje kolo zasukati nekoliko bolj kot zunanje kolo.

Krmilni sistem avtomobila



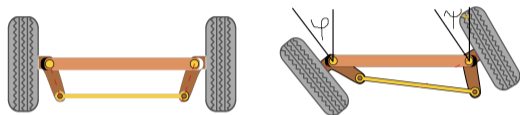
Velja

$$\tan \varphi = \frac{L}{R - D} \quad \tan \psi = \frac{L}{R + D}$$

Iz prve enačbe izrazimo $R \rightarrow R = D + \frac{L}{\tan \varphi}$ in vstavimo v drugo enačbo. Izrazimo kot ψ kot funkcijo kota φ :

$$\psi = \arctan \left(\frac{L \tan \varphi}{L + 2D \tan \varphi} \right).$$

Krmilni sistem avtomobila



Trapezni mehanizem (Ackermann 1818) torej (izkaže se, približno) računa vrednosti funkcije

$$\varphi \mapsto \arctan \left(\frac{L \tan \varphi}{L + 2D \tan \varphi} \right) !$$

Trapezni mehanizem = računski mehanizem.

Ali je možno konstruirati mehanizme, ki izvajajo vnaprej predpisane računske operacije?

Dva dela predstavitve

Računski mehanizmi

Opis mehanizmov, ki izvajajo različne računske operacije.

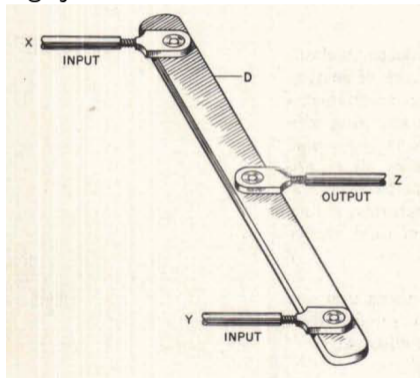
Kontrolni mehanizmi

Opis nekaterih računskih mehanizmov, namenjenih vodenju sistemov.

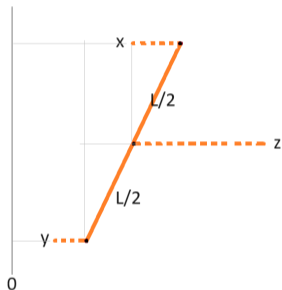
Poglejmo, kako bi lahko mehansko realizirali različne računske operacije.

Seštevanje števil

Oglejmo si sledeči mehanizem:



Seštevanje števil



Oglejmo si razmerja:

$$\frac{z - y}{\frac{L}{2}} = \frac{x - y}{L}$$

kar nam da

$$z = \frac{x + y}{2}.$$

Mehanizem torej praktično izračuna vsoto (v resnici povprečno vrednost) števil-pomikov x in y .

Množenje števila z fiksnim številom

Denimo, da želimo mehanizem, ki pomnoži dano število x z npr. 7. Sestavimo sledeč mehanizem:



Oglejmo si razmerja:

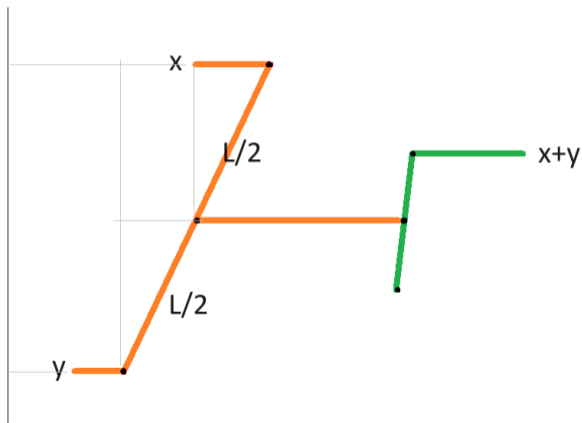
$$\frac{x}{L} = \frac{y}{7L}$$

kar nam da

$$y = 7x.$$

Seštevanje števil

Sedaj lahko sestavimo mehanizem, ki izračuna točno vsoto števil:



Mehanizem za izračun poljubne linearne funkcije

Preprosta mehanizma seštevanja dveh števil in množenja števila s fiksnim številom nam že omogočata konstrukcijo mehanizma za izračuna poljubne linearne funkcije več spremenljivk.

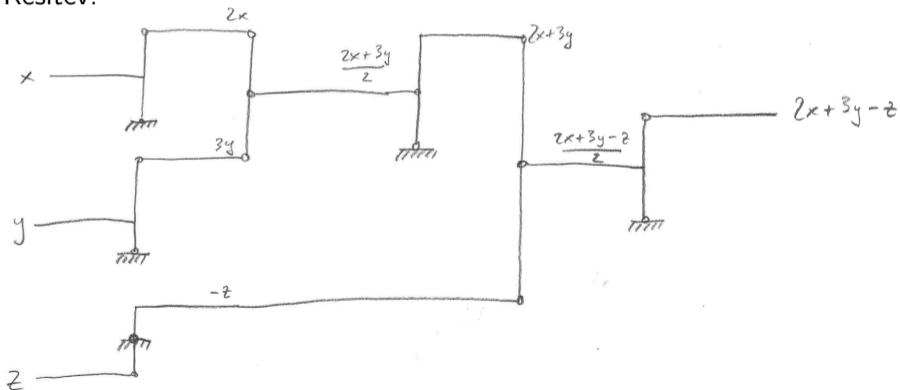
Sestavimo npr. mehanizem, ki računa vrednosti funkcije

$$f(x, y, z) = 2x + 3y - z$$

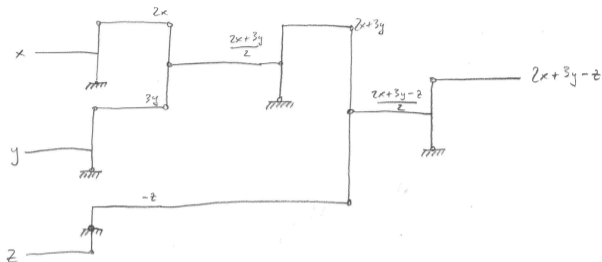
Mehanizem za izračun poljubne linearne funkcije

$$f(x, y, z) = 2x + 3y - z$$

Rešitev:



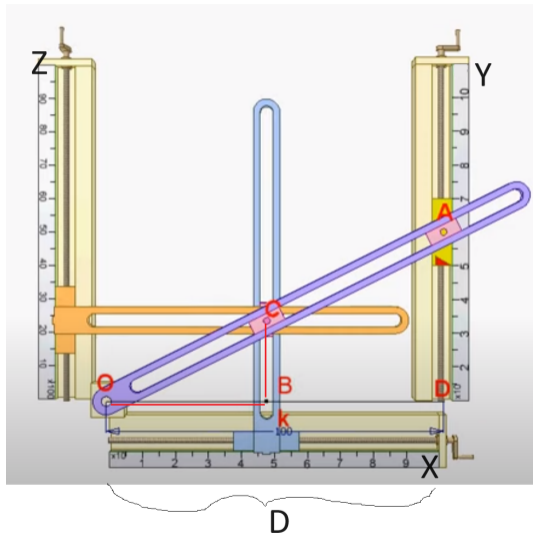
Mehanizem za izračun poljubne linearne funkcije



Lastnosti:

- Neskončna hitrost (∞ GHz)
- Neskončna natančnost
- Nič porabe energije
- **Računanje brez števil, vse se dogaja direktno v fizični obliki** (ta vidik bo pomemben kasneje)

Mehanizem za izračun produkta dveh števil



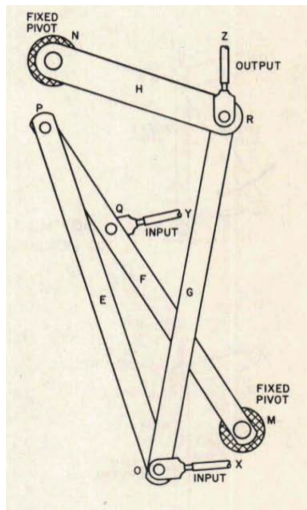
Oglejmo si razmerja:

$$\frac{z}{x} = \frac{y}{D}$$

kar nam da

$$z = \frac{xy}{D}.$$

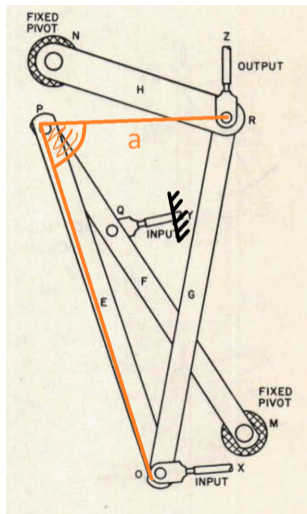
Mehanizem za izračun produkta dveh števil



Ta mehanizem izračuna približno vrednost produkta.

Dolžine E , F , G so enake.

Mehanizem za izračun produkta dveh števil



Naj bo Y pri miru, premikamo samo X .
Potem sta točka P in dolžina a približno konstantni (?).

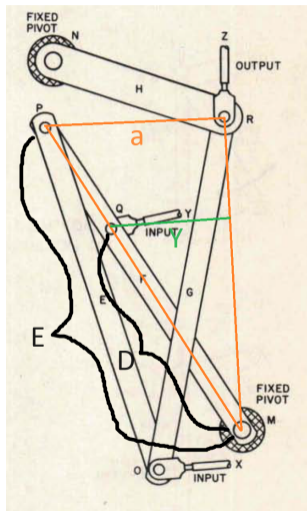
Imamo razmerje:

$$\frac{z}{a} \simeq \frac{x}{E}$$

kar nam da

$$z \simeq \frac{a}{E} x.$$

Mehanizem za izračun produkta dveh števil



Imamo

$$z \simeq \frac{a}{E}x.$$

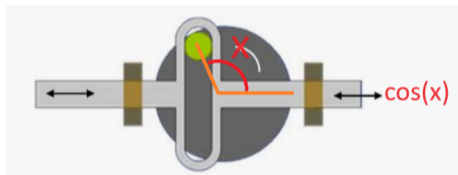
Iz slike razberemo

$$\frac{a}{E} = \frac{y}{D},$$

kar nam da

$$z \simeq \frac{xy}{D}.$$

Mehanizem za izračun funkcije cos



x ... kot zasuka

Premik je točno $\cos(x)$, saj je premik točno kosinus kota x .

Mehanizem za izračun integrala $\int_a^b f(t) dt$

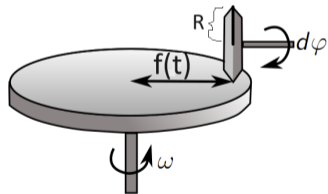
Dana naj bo funkcija $f(t)$, kjer je $t \in [a, b]$. Želimo izračunati $\int_a^b f(t) dt$. Naj bo spremenljivka t čas. Imejmo naslednji mehanizem, kjer se disk vrti s konstantno kotno hitrostjo ω , odmik manjšega zobnika ob času t pa je $f(t)$.

V času dt se (na mestu stika) večji disk zavrti za $\omega f(t) dt$, kar mora biti enako $R d\varphi$. Manjši zobnik se zato zavrti za kot

$$d\varphi = \frac{\omega}{R} f(t) dt.$$

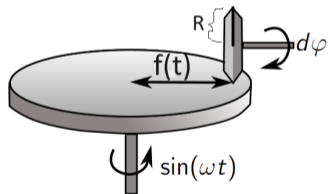
Celoten zasuk na časovnem intervalu $[a, b]$ je torej ravno

$$\frac{\omega}{R} \int_a^b f(t) dt.$$



Varianta mehanizma za izračun integrala $\int_a^b f(t) dt$

Naj se sedaj mehanizem ne vrtil s konstantno kotno hitrostjo ω , ampak z nihajočo kotno hitrostjo $\sin(\omega t)$. Potem dobimo:



V času dt se (na mestu stika) večji disk zavrti za $\sin(\omega t)f(t) dt$, kar mora biti enako $R d\varphi$. Manjši zobnik se zato zavrti za kot

$$d\varphi = \frac{1}{R} \sin(\omega t)f(t) dt .$$

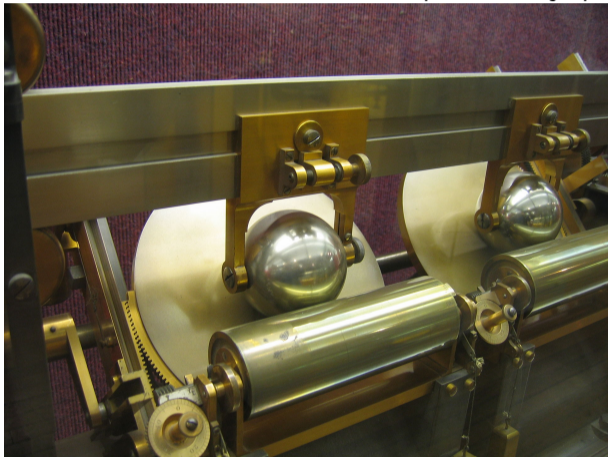
Celoten zasuk na časovnem intervalu $[a, b]$ je torej ravno

$$\frac{1}{R} \int_a^b \sin(\omega t)f(t) dt .$$

To sedaj lahko izkoristimo za izračun koeficientov Fourierovega razvoja funkcije f .

Mehanizem za izračun integrala $\int_a^b f(t) dt$

Izumil Lord Kelvin leta 1886 za napovedovanje plimovanja morja.



Zaenkrat smo si ogledali različne vrste mehanizmov za izvajanje računskih operacij.

Pozitiven vidik računskih mehanizmov je, da celotno računanje poteka v fizični obliki (premiki delov mehanizma), kar se da dobro izkoristiti za vodenje sistemov.

Takšni mehanizmi so potem **kontrolni mehanizmi**.

Star primer kontrolnega mehanizma

Kontrolni mehanizem za regulacijo hitrosti parne lokomotive.

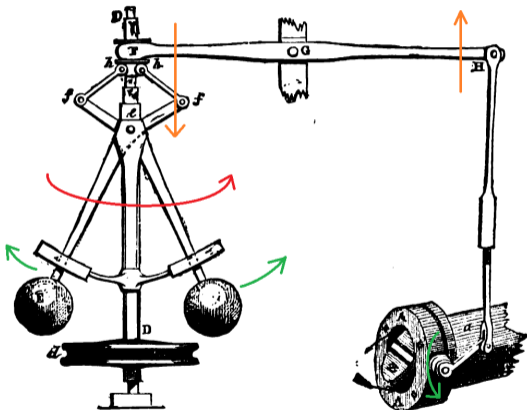


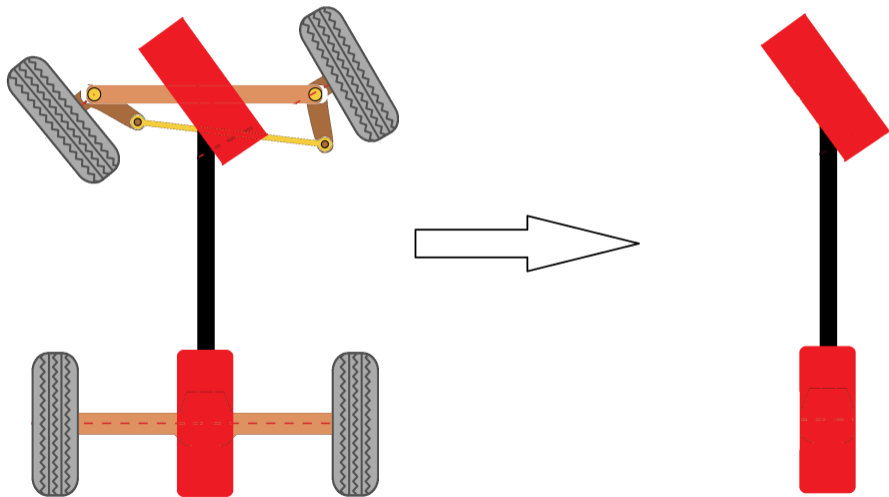
FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

Kontrolni mehanizmi vožnje avtomobila

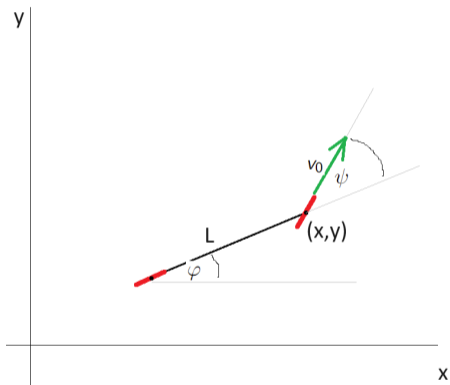


Kontrolni mehanizmi vožnje avtomobila

Model avtomobila



Kontrolni mehanizmi vožnje avtomobila



Gibanje avtomobila

(x, y) ... položaj prvega kolesa

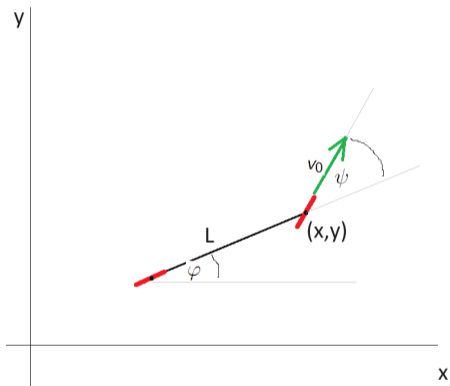
φ ... kot avta glede na x - os

v_0 ... hitrost prvega kolesa

L ... dolžina avta

ψ ... kot zasuka prvega kolesa

Kontrolni mehanizmi vožnje avtomobila



Gibanje je določeno z sistemom diferencialnih enačb

$$\dot{x} = v_0 \cos(\varphi + \psi)$$

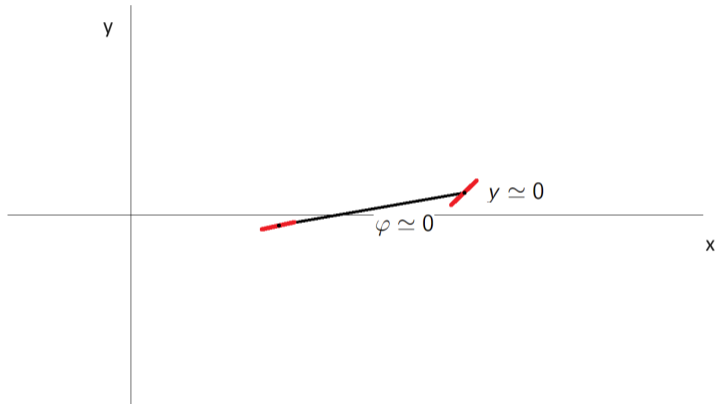
$$\dot{y} = v_0 \sin(\varphi + \psi)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0 \sin \psi}{L}$$

Kontrolni mehanizmi vožnje avtomobila

V nadaljevanju so bomo ogledali nekaj mehanizmov, ki bodo avtonomno krmilili avtomobil vzdolž izbrane poti.

Gibanje v smeri x-osi



Gibanje v smeri x -osi

Želimo, da se avtomobil giblje v smeri x -osi. Vprašanje je torej kako naj se spreminja krmilni kot ψ , da se bo avtomobil gibal vzdolž x -osi.

Opisujemo gibanje v bližini x -osi, zato lahko predpostavimo, da je $y \simeq 0$, $\varphi \simeq 0$ in predpostavimo tudi, da je $\psi \simeq 0$. Dobimo (poenostavljen - lineariziran sistem enačb)

$$\dot{x} = v_0 \cos(\varphi + \psi)$$

$$\dot{y} = v_0 \sin(\varphi + \psi)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0 \sin \psi}{L}$$

$$\dot{x} = v_0$$

$$\dot{y} = v_0(\varphi + \psi)$$

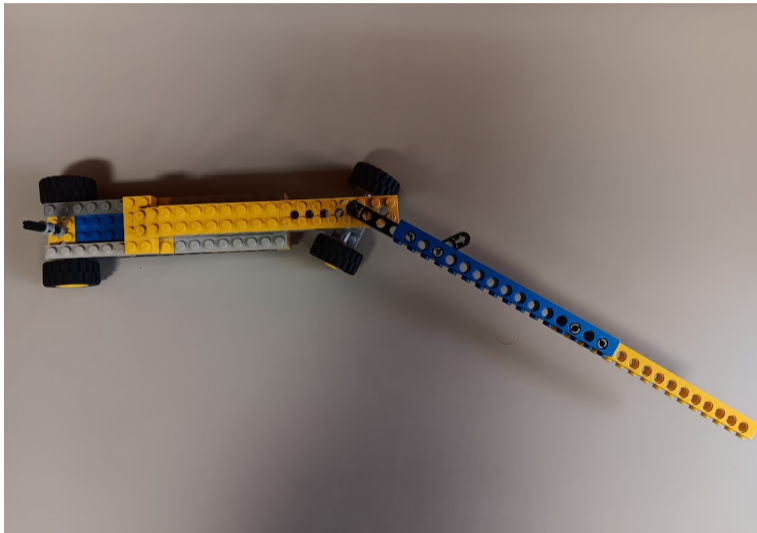
$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L}\psi$$

Prva enačba ni relevantna, dodatno pa še predpostavimo, da je $L = 1$ in $v_0 = 1$ (gibljemo se naprej):

$$\dot{y} = \varphi + \psi$$

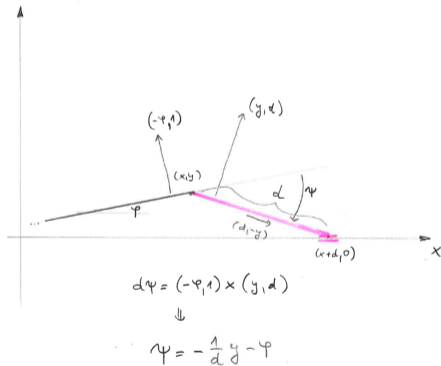
$$\dot{\varphi} = \psi$$

Gibanje v smeri x -osi



Gibanje v smeri x-osi

Oglejmo si naslednji mehanizem - palica je togo vezana na prvo kolo, drugi konec pa drsi po x-osi:



Dobimo torej $\psi = -\frac{1}{d}y - \varphi$ in sistem enačb

$$\dot{y} = \varphi + \left(-\frac{1}{d}y - \varphi\right) = -\frac{1}{d}y$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{d}y - \varphi$$

Gibanje v smeri x -osi

Naj bo $d = 1$. Dobimo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{y} = -y \quad \dot{\varphi} = -y - \varphi.$$

Rešitev prve enačbe je

$$y(t) = y_0 e^{-t},$$

kar vstavimo v drugo enačbo, katere rešitev pa je potem

$$\varphi(t) = (\varphi_0 - ty_0)e^{-t}$$

Opazimo, da velja $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, torej mehanizem res krmili tako, da vožnja avtomobila konvergira k vožnji vzdolž osi x .

LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



Vzvratno gibanje v smeri x -osi

Želimo, da se avtomobil giblje vzvratno v smeri x -osi.

Zopet predpostavimo, da je $L = 1$, vendar sedaj $v_0 = -1$:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\varphi - \psi \\ \dot{\varphi} &= -\psi\end{aligned}$$

Če uporabimo enako krmiljenje kot v prejšnjem primeru ($\psi = -\frac{1}{d}y - \varphi$) dobimo sistem

$$\dot{y} = \frac{1}{d}y \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{d}y + \varphi$$

Dobimo rešitev sistema

$$y(t) = y_0 e^{\frac{t}{d}} \quad \varphi(t) = \left(\varphi_0 - \frac{y_0}{1-d}\right)e^t + \frac{y_0}{1-d}e^{\frac{t}{d}}$$

Vzvratno gibanje v smeri x -osi

Imamo

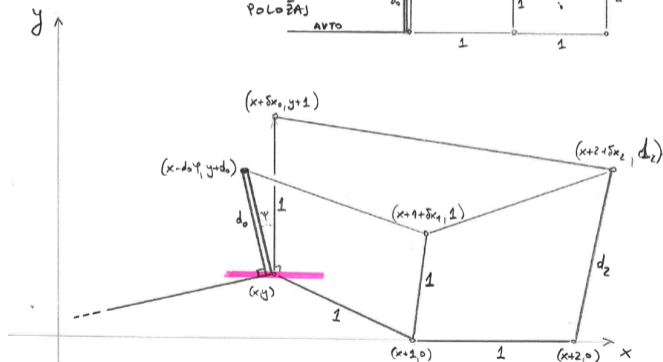
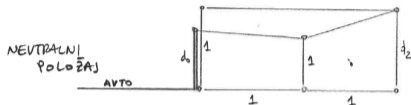
$$y(t) = y_0 e^{\frac{t}{d}} \quad \varphi(t) = \left(\varphi_0 - \frac{y_0}{1-d}\right)e^t + \frac{y_0}{1-d}e^{\frac{t}{d}}$$

Če je $d > 0$, potem $y(t) \rightarrow \infty$, če pa je $d < 0$, potem pa v splošnem $\varphi(t) \rightarrow \infty$ zaradi dela z e^t . Gibanje torej zmeraj bolj odstopa od gibanja vzdolž x -osi.

Potrebujemo torej drugačen mehanizem!

Vzratno gibanje v smeri x-osi

Oglejmo si sledeči mehanizem:



$$\delta x_1 = (1-d_0)y - d_0\varphi$$

$$\delta x_2 = \delta x_1$$

$$\delta x_0 = \left((1-d_0) + \frac{1-d_2}{2} \right) y - d_0\varphi$$

$$\varphi = (-\varphi, 1) \times (\delta x_0, 1)$$

Vzratno gibanje v smeri x -osi

Dobimo

$$\psi = - \left((1 - d_0) + \frac{1 - d_2}{2} \right) y - (1 - d_0)\varphi$$

in sistem enačb

$$\dot{y} = \left((1 - d_0) + \frac{1 - d_2}{2} \right) y - d_0\varphi \quad \dot{\varphi} = \left((1 - d_0) + \frac{1 - d_2}{2} \right) y + (1 - d_0)\varphi .$$

Matrika sistema enačb je

$$\begin{bmatrix} \left((1 - d_0) + \frac{1 - d_2}{2} \right) & -d_0 \\ \left((1 - d_0) + \frac{1 - d_2}{2} \right) & (1 - d_0) \end{bmatrix} .$$

Vzvratno gibanje v smeri x -osi

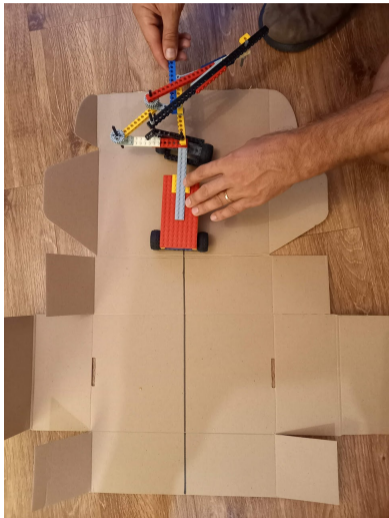
Če izberemo npr. $d_0 = 2$ in $d_2 = -2$ dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

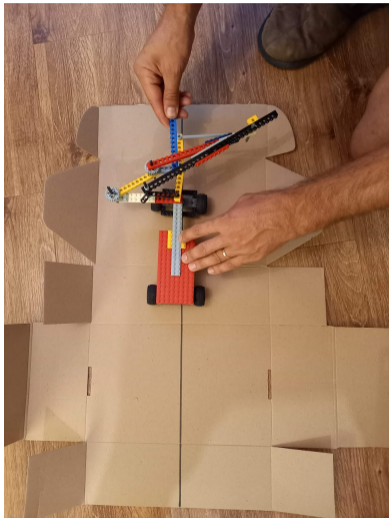
katere lastni vrednosti imata realni del enak $-\frac{1}{4}$, torej bomo imeli v rešitvi sistema enačb povsod faktor $e^{-\frac{1}{4}t}$.

To pomeni, da je zopet $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ in gibanje avtomobila res konvergira k gibanju po x -osi.

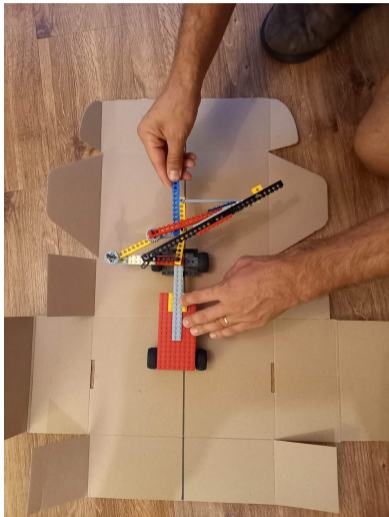
LEGO primer



LEGO primer



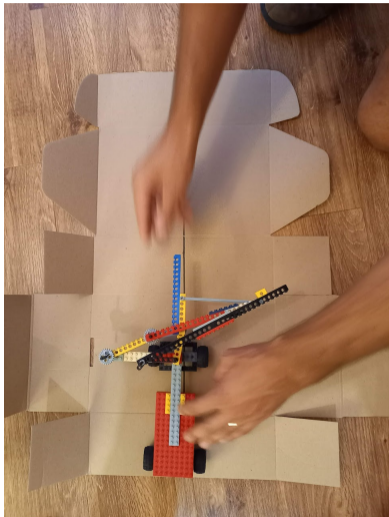
LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



Vzratna vožnja vozila z eno prikolico

Imamo sledeči primer



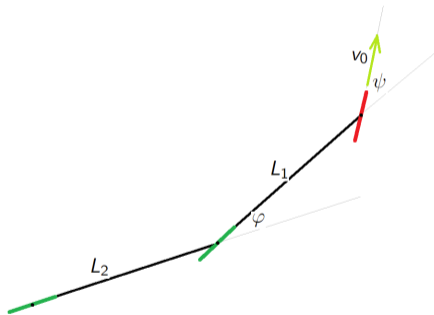
Omejimo se na primer, kjer želimo voziti v vzratni smeri tako, da bosta traktor in prikolica vzporedna.

Vzratna vožnja vozila z eno prikolico



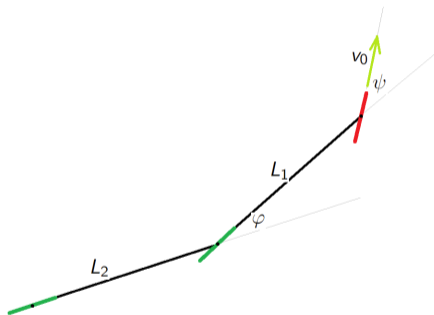
Vzratna vožnja vozila z eno prikolico

Imamo sledeči primer



Želimo najti takšen mehanizem, ki bo poskrbel, da bo krmiljenje takšno, da bo $\varphi \rightarrow 0$.

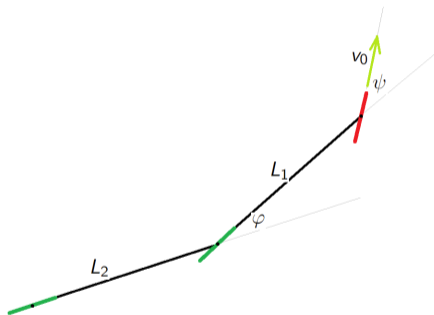
Vzratna vožnja vozila z eno prikolico



Najprej zapišimo diferencialno enačbo za φ .
Velja

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L_1} \sin \psi - \frac{v_0 \cos \psi}{L_2} \sin \varphi .$$

Vzratna vožnja vozila z eno prikolico



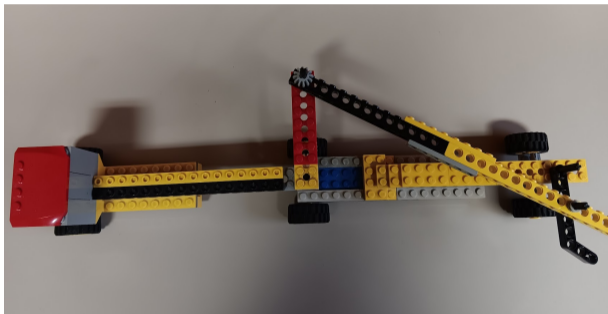
Zopet predpostavimo, da sta $\varphi, \psi \simeq 0$.
Dobimo linearizirano obliko enačbe

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L_1} \psi - \frac{v_0}{L_2} \varphi.$$

Zanima nas vzratna vožnja, vzemimo torej $v_0 = -1$, in (da smo konkretni) $L_1 = L_2 = 1$:

$$\dot{\varphi} = -\psi + \varphi.$$

Vzratna vožnja vozila z eno prikolico



LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



LEGO primer



Prihodnost računskih mehanizmov

Pomen računskih mehanizmov - POMEMBEN PRINCIP

Velika hitrost izvajanja računskih operacij, saj je z naše strani potrebna le zasnova mehanizma, samo računanje pa v bistvu izvaja **narava**, ki je zmožna hkratnega izvajanja ogromnega števila procesov.

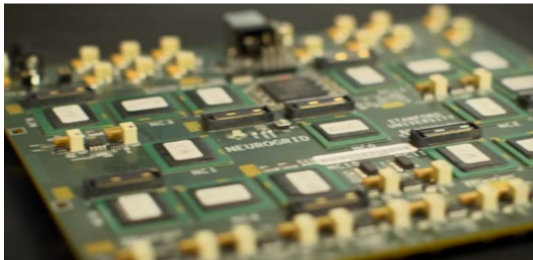
Nevronske mreže, ki se uporabljajo v aplikacijah kot so npr. ChatGPT (generiranje teksta), Stable Diffusion (pretvorba teksta v sliko), prepoznavanje obrazov, napovedovanje bolezni na podlagi medicinskih izvidov,... obstajajo znotraj računalnikov, kar pomeni, da izvajanje operacij, ki jih nevronska mreža izvaja, in še posebej učenje nevroske mreže poteka počasi in porabi veliko energije.

Alternativa bi bile fizične nevronske mreže, v obliki integriranih vezij, kjer bi bili nevroni in povezave fizično realizirane - **Neuromorfni inženiring**

Umetna inteligenca

Primer - **Neurogrid**

Vezje, ki simulira umetne možgane (z nastavljivimi parametri), ki imajo 1000000 nevronov in 6000000000 sinaps, v realnem času.



Računski mehanizmi - uporaba geometrije.

Pametni materiali

Materiali z zapleteno mikrostrukturo, ki jim da presenetljive mehanske lastnosti (pomembno znanje geometrije).

