

Seminar za učitelje 2023/24

27. januar 2024

Za poljubna nenegativna realna števila a_1, a_2, \dots, a_n velja

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

To je neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino. Enačaj nastopi natanko tedaj, ko so vsi a_i enaki. Na predavanju bomo uporabljali to neenakost le za $n \in \{2, 3, 4\}$.

Naloge

1. Dokaži, da je

$$\sqrt{20} + \sqrt{30} + \sqrt{42} + \sqrt{56} < 24$$

2. Dokaži, da za poljubna števila a, b, c velja $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
3. Ali obstaja kvader z obsegom (=vsota vseh robov) 220 in površino 2024?

Rešitev: Torej imamo $4a + 4b + 4c = 220$ in

$$2ab + 2bc + 2ca = 2024$$

Ker je $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1012$ in je

$$63^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq 16 \cdot (1012 + 2024)$$

4. Naj bosta r in R polmera trikotniku včrtane oziroma očrtane krožnice. Dokaži, da za pravokotni trikotnik velja:

$$R + r \geq \sqrt{2S}$$

in

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \sqrt{2}$$

Dokaži, da v splošnem trikotniku velja $R \geq 2r$.

5. Med vsemi enakokrakimi trapezi s $S = \sqrt{3}$ in kotom 60° ob osnovnici poišči tistega z o_{\min}
6. Med vsemi stožci očrtanimi krogli s polmerom r poišči tistega z V_{\min} .

Rešitev: Naj bo R polmer osnovne ploskve stožca in v višina ter 2α kot med stranskim robom in osnovno ploskvijo. Potem je

$$\frac{v}{R} = \tan(2\alpha) \quad \text{in} \quad \frac{r}{R} = \tan \alpha$$

Naj bo $x = \tan^2 \alpha$. Potem je

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 v = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\tan 2\alpha}{\tan^3 \alpha} = \frac{\pi}{3x(1-x)} \geq \frac{4\pi}{3}$$

7. Med vsemi trikotniki s fiksnim obsegom o poišči tistega z največjo ploščino.

Rešitev:

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \cdot \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3} \right)^3 = \frac{s^4}{27}$$

Torej je $S_{\max} = \frac{s^2}{27}$ in sicer ko je trikotnik enakostraničen.

8. Med vsemi valji s prostornino V izračunaj P_{\min} .
9. Med vsemi valji včrtanimi krogli/stožču poišči tistega z V_{\max} .
10. Površina valja je 54π . Koliko največ je njegov volumen?