MATEMATIKA

… MALO DRUGAČE

DELJIVOST NARAVNIH ŠTEVIL

- Preprosti kriteriji za $3, 6, 9, 2, 4, 8, 5, 10, 25$ …
- Kaj pa za $11, 13, 7$?
- … $fedcba$ deljivo z 11, če je alternirajoča vsota … $- f + e - d + c - b + a$ deljiva z 11
- $m = 10a + b = 3(\boldsymbol{a} - \mathbf{9}\boldsymbol{b}) + \mathbf{7}(\mathrm{a} + 4\mathrm{b}) = 3(\mathbf{a} - \mathbf{9b}) + \mathbf{13}(\mathrm{a} - 2\mathrm{b})$.
- Število m je deljivo s 7 ali 13 natanko tedaj, ko je s 7 ali 13 deljivo število, ki ga dobimo tako, da številu m odrežemo enice in od dobljenega števila odštejemo devetkratno število enic.
- Preizkus za število $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 51051\mathbf{0}\ (5105\mathbf{1}, 509\mathbf{6}, 45\mathbf{5}, 0)$

OSNOVE LOGIKE IN IZJAVNI RAČUN

- Resničnostne tabele (duhamorne, sploh v primeru $2^n, n \geq 4$ vrstic)
- Modus tollens: če velja P, potem velja Q. Ne velja Q. **Torej ne velja P.**
- Modus ponens: če velja P, potem velja Q. Velja P. **Torej velja Q**.
- Modus narobens: če velja P, potem velja Q. Ne velja P. **Torej ne velja Q.**
- Dokaz pravilnosti sklepanja preko resničnostnih tabel (tavtologija).

ARISTOTELOVI SILOGIZMI

- Noben harmonikar ni kitarist.
- Noben kitarist ni trobentač.
- **Noben harmonikar ni trobentač.**

h	k	t	$(((h \rightarrow \neg k) \land (k \rightarrow \neg t)) \rightarrow (h \rightarrow \neg t))$
F	F	F	**T**
F	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	T	T	**T**
T	F	F	**T**
T	F	T	**F**
T	T	F	**T**
T	T	T	**T**

- Noben harmonikar ni kitarist.
- Vsak trobentač je kitarist.
- **Noben harmonikar ni trobentač.**

h	k	t	$(((h \rightarrow \neg k) \land (t \rightarrow k)) \rightarrow (h \rightarrow \neg t))$
F	F	F	**T**
F	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	T	T	**T**
T	F	F	**T**
T	F	T	**T**
T	T	F	**T**
T	T	T	**T**

- Vsi državniki so ugledni.
- Nekateri politiki so ugledni.
- **Zato so nekateri državniki politiki.**

D	P	U	$(((D \rightarrow U) \land \neg(P \rightarrow \neg U)) \rightarrow \neg(D \rightarrow \neg P))$
F	F	F	**T**
F	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	T	T	**F**
T	F	F	**T**
T	F	T	**T**
T	T	F	**T**
T	T	T	**T**

PRAVILA SKLEPANJA

Ime	Formula
modus ponens	$((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q$
modus tollens	$((p \rightarrow q) \land \neg q) \rightarrow \neg \mathrm{p}$
hipotetični silogizem	$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
disjunktivni silogizem	$((p \lor q) \land \neg p) \rightarrow q$
konstruktivna dilema	$((p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land (p \lor r)) \rightarrow (q \lor s)$
destruktivna dilema	$((p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land (\neg q \lor \neg s)) \rightarrow (\neg p \lor \neg r)$
simplifikacija	$(p \land q) \rightarrow p$
konjunkcija	$(p \land q) \rightarrow (p \land q)$
adicija	$p \rightarrow (p \lor q)$
kompozicija	$((p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \land r))$
De Morganov zakon (1)	$\neg(p \land q) \rightarrow (\neg p \lor \neg q)$
De Morganov zakon (2)	$\neg(p \lor q) \rightarrow (\neg p \land \neg q)$

TEORIJA MNOŽIC

- Hudomušen primer za kartezični produkt iz realnosti
- Opis snubca v konkretnem ženitnem oglasu element kartezičnega produkta

Zaposlitev x Stan x Veroizpoved x Starost x Pokojnina

7. marca 1920 je Joseph Raztinger st. oddal ženitni oglas v katoliški tednik Altöttinger Liebfrauenbote:

»Nižji državni uradnik, samski, katoliški, star 43 let, upravičen do pokojnine, želi spoznati dobro katoliško dekle, ki ve kuhati in tudi šivati, z namenom čimprejšnje poroke. Dota in premoženje sta zaželjena, vendar nista predpogoj. Oglasi se s sliko na poštni predal 734.«

Ker po prvem oglasu še očitno ni bilo uspeha, je svojo ponudbo oddal še enkrat, natančneje 11. julija isto leto. Tokrat se je nanj pozitivno odzvala Maria Peintner, stara 36 let. Nezakonska hči peka, sama po poklicu kuharica.

Maria in Joseph sta se prvič srečala v kavarni v Regensburgu in se nekaj dni za tem zaročila. Poroka je bila že čez 4 mesece, 9. novembra 1920.

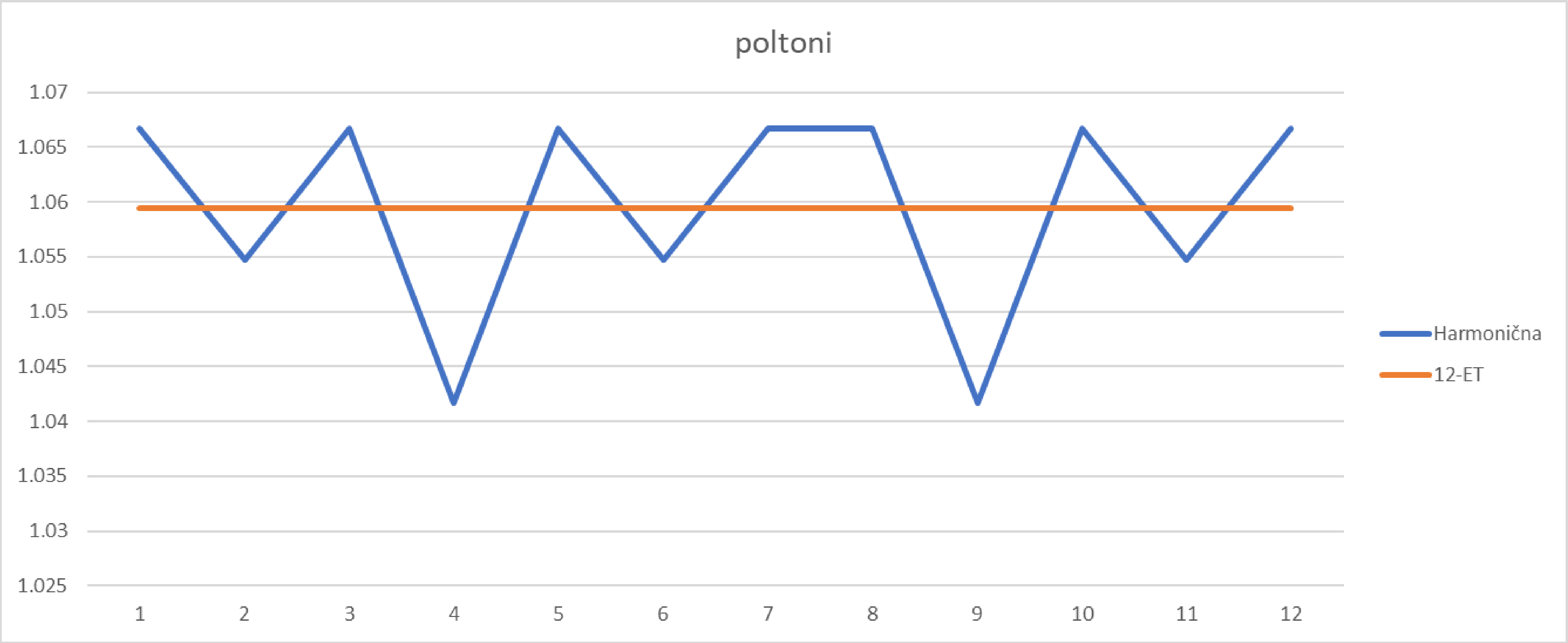
Rodili so se jima trije otroci: Georg, Joseph in Maria. Georg in Joseph sta postala duhovnika (Joseph kasneje škof, kardinal in papež).

Joseph Ratzinger st. je umrl leta 1959, Maria pa 1963.

Nihče od njiju ni nikoli povedal, kako sta se spoznala. Ženitveno ponudno je leta 2006 našel glavni urednik omenjene revije, Peter Becker, in ga z največjim veseljem poslal papežu v Rim.

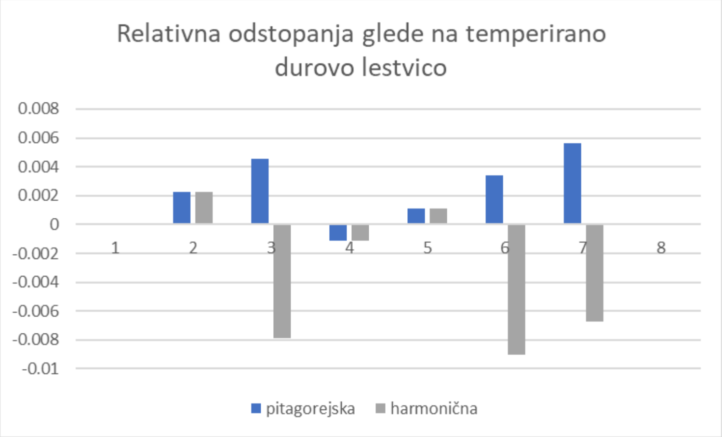
PRISLUHNI ULOMKU

- $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$, … razmerja frekvenc (višja proti nižji) med dvema sosednjima harmonikoma (alikvotoma), npr. v zaporedju $\boldsymbol{c1}, \boldsymbol{c2}, g2, \boldsymbol{c3}, e3, g3, b3, \boldsymbol{c4}, d4, e4$ …
- $č8, č5, č4, v3, m3, m3, v2, v2, v2$ …
- $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$ durova lestvica (harmonična): č1, v2, v3, č4, č5, v6, v7, č8
- $1, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{45}{32}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}, 2$ kromatična lestvica (harmonična): č1, m2, v2, m3, v3, č4, zv4=zm5, č5, m6, v6, m7, v7, č8
- $1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2$ durova lestvica (pitagorejska)


poltoni
1.07
1.065
1.06
1.055
1.05
1.045
1.04
1.035
1.03
1.025
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
Harmonična
12-ET

RACIONALNA IRACIONALNOST

- Da bodo npr. vse durove lestvice intervalsko med seboj skladne, je rešitev v tem, da se za polton proglasi razmerje $\sqrt[12]{2}: 1$. Čista oktava je namreč sestavljena iz 12 poltonov, $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$.
- Čista kvinta na kitari torej „meri“ $\sqrt[12]{2^7} = 1.498307 \ldots$, na trobenti pa $\frac{3}{2}$.



PRISLUHNI RAZMERJU

- durov trozvok $4:5:6$ ($5:6:8$, $6:8:10 = 3:4:5$ obrata durovega trozvoka)
- molov trozvok $10:12:15$ ($12:15:20$, $15:20:24$ obrata molovega trozvoka)
- maj7 $8:10:12:15$
- min7 $10:12:15:18$
- D7 $4:5:6:7$
- dim7 $5:6:7:8$
- kako zvenijo akordi $1:2:3:4$, $2:3:4:5$, $3:4:5:6$? $8:10:12:15:18$?

PERIODIČNI DECIMALNI ZAPIS

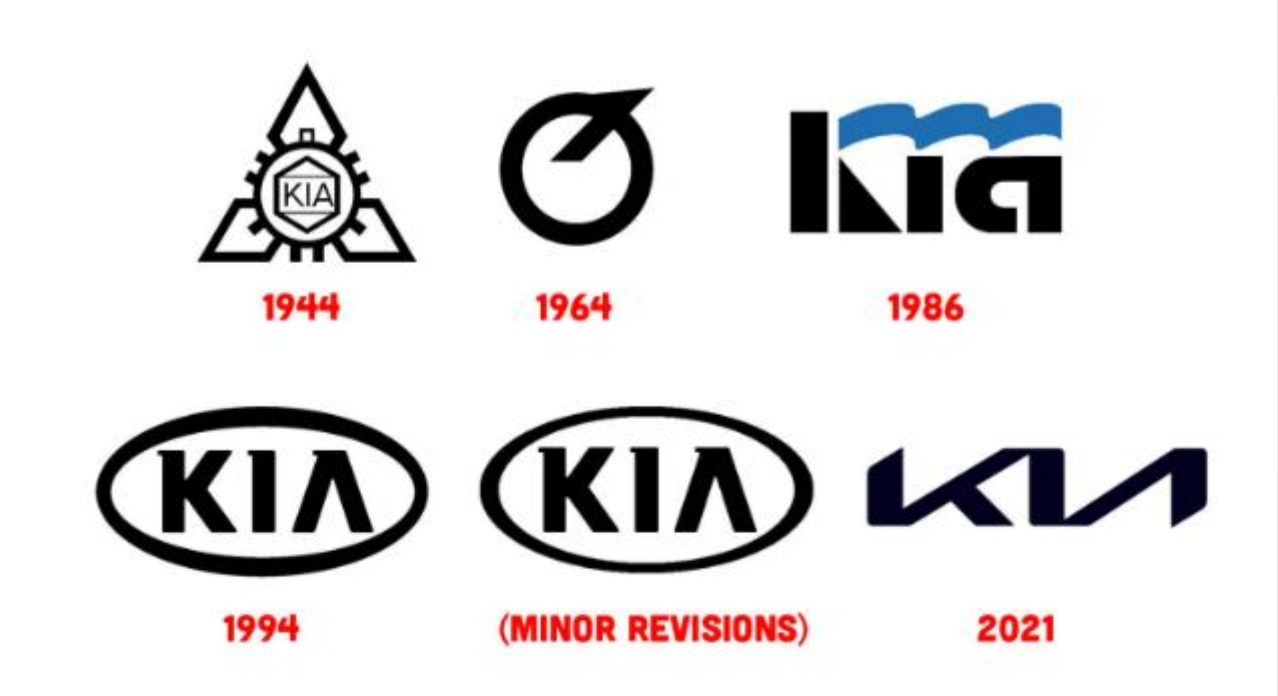
- $0.16666666666\ldots = \frac{1}{6}$
- $0.2864286428642864\ldots = \frac{2864}{9999}$
- Kaj pa npr. $12.749999999\ldots$?

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

- Ena od možnih motivacij: urejanje kemijskih enačb, npr. za popolno gorenje etana
- $C_2H_6 + O_2 \ \rightarrow CO_2 + H_2O$
- $x\ C_2H_6 + y\ O_2 \ \rightarrow z\ CO_2 + u\ H_2O$
- Ker trije kemijski elementi (C, H, O) dajo zgolj tri enačbe, si moramo še eno enačbo izmisliti, npr. $x = 1$.
- Rešitev $(x, y, z, u) = (1, \frac{7}{2}, 2, 3)$ ni ustrezna, zato vzamemo $(x, y, z, u) = (2, 7, 4, 6)$

ZRCALJENJA, SIMETRIJA

EVOLUCIJA ZNAKA ZA KIA



… IN ŠE DACIA


UAP
1966 - 1978
UAP
1978 - 1990
DACIA
1990 - 1997
DACIA
1997- 2003
DACIA
2003 - 2008
DACIA
2008 - 2015
DACIA
2015 - 2021
DACIA
2020
DACIA
2021 - now

DISTRIBUTIVNOST SKALARNEGA PRODUKTA

- Zakaj naj bi dijaki „verjeli“, da velja $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$?
- Kako iz geometrijske definicije izpeljati distributivnost?
- Kosinusni izrek za trikotnik $\triangle ABC, A = (0,0,0), B = (p, q, r), C = (u, v, w)$
- $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = (p, q, r), \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (u, v, w), \vec{a} = \overrightarrow{BC} = (u - p, v - q, w - r)$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2\boldsymbol{bc}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} \;\therefore \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = pu + qv + rw$
- Iz koordinatne definicije $(p, q, r) \cdot (u, v, w) := pu + qv + rw$ zlahka sledi distributivnost

SKALARNI PRODUKT IN ONB

- $\vec{u} = (a, b, c), \vec{v} = (p, q, r), \vec{u} \cdot \vec{v} = ap + bq + cr$
- $\{\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}\}$ alternativna ONB , $\vec{u} = [a', b', c'], \vec{v} = [p', q', r'], \vec{u} \cdot \vec{v} = a'p' + b'q' + c'r'$
- Kako se prepričati, da velja $ap + bq + cr = a'p' + b'q' + c'r'$?
- Za $\mathbb{R}^2$ $(ap + bq = a'p' + b'q')$ še nekako gre na nivoju srednješolske matematike …
- Trivialen primer: če namesto standardne ONB $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ vzamemo $\{\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$

KARTEZIČNI KOORDINATNI SISTEM

- Zakaj že je tako prikladen?
- Ne bi škodilo na kratko omeniti še polarnih, cilindričnih, sferičnih koordinat …

… SEVEDA BREZ PREVODOV

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & \text{if } z > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & \text{if } z < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } z = 0 \text{ and } xy \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = y = z = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

VEKTORSKI PRODUKT

- Mešani produkt treh vektorjev $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
- Volumen paralelepipeda, test komplanarnosti treh vektorjev
- Zanimive uporabe vektorskega produkta (mehanika, elektrotehnika, računalniška geometrija, vektorska analiza, razvoj računalniških iger…)
- $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$
- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

VEKTORJI IN SKALARNI PRODUKT V FINANCAH

- Naj bosta u_A, v_A vektorja projiciranih letnih **neto** denarnih tokov za segment zavarovalnih polic A (premije, drugi prihodki +; stroški, škode, drugi odhodki -)
- u_A izhaja iz osnovnega scenarija, v_A pa iz likvidnostnega stresnega scenarija (masovni odkupi polic oz. prekinitve plačevanja premije)
- $L_A := \frac{|u_A - v_A|}{|u_A| + |v_A|} = \frac{<u_A - v_A,\ u_A - v_A>^{\frac{1}{2}}}{<u_A, u_A>^{\frac{1}{2}} + <v_A, v_A>^{\frac{1}{2}}}$ je mera likvidnosti segmenta A
- Zaradi trikotniške neenakosti velja $0 \leq L_A \leq 1$.
- Glede na mero likvidnosti lahko razvrstimo segmente med zelo/srednje/malo/ne- likvidne

HUDO KOMPLEKSNA ŠTEVILA

- $i^2 = -1$
- Zakaj ne bi srednješolcem omenili še kvaternionov, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$?
- Kaj pa oktonioni?
- Računati se da le s števili dimenzije $1, 2, 4, 8$ (vstavite narekovaje po potrebi).
- Globok rezultat (Frobenius, Zorn, Hurwitz), da obstajajo (do izomorfizma natančno) le 4 realne algebre z deljenjem: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, kvaternioni, oktonioni.
- Kvaternioni ter povezava s skalarnim ter vektorskim produktom

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (s_1, \mathbf{v}_1) \cdot (s_2, \mathbf{v}_2) \\ &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,\ s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

DOLGČAS KVADRATNE FUNKCIJE

- zajeten delež učnega načrta pri srednješolski matematiki
- uporabnosti pri interpolacijskih zlepkih (računalniška grafika)
- numerično integriranje: Simpsonova metoda >> trapezna metoda
- skozi tri nekolinearne točke poteka natanko en graf kvadratne funkcije
- graf kvadratne funkcije je parabola

SKRIVNOSTNOST NARAVNEGA LOGARITMA OZ. e

- Ali obstaja takšna osnova a eksponente funkcije $f(x) = a^x$, da bi bila v vsaki točki „hitrost prirasta“ ravno enaka vrednosti funkcije?
- Hitrost prirasta funkcije na intervalu $[x, x + h]$ ohlapno definiramo kot kvocient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = (a^{x+h} - a^x)/h = a^x\ (a^h - 1)/h$$

- $h = \frac{1}{n}, \frac{a^{1/n}-1}{1/n} = 1$ za $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$

ZAKAJ SE SPLAČA MERITI KOTE V RADIANIH?

$$\lim_{x^\circ \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\frac{x}{180}\pi)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(\frac{x}{180}\pi)}{\frac{x}{180}\pi} \cdot \frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{180}$$

ADICIJSKI IZREKI IN KOMPLEKSNA ŠTEVILA

- Polarni zapis kompleksnega števila v obliki $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Množenje s kompleksnim številom oblike $\cos\alpha + i\sin\alpha$ je rotacija kompleksnega števila za kot α
- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)$

OSVOBODITEV KOTNIH FUNKCIJ OD KOTOV

- valovna enačba, valovanje
- elektrotehnika, periodični signali
- ton, glasbila, alikvoti
- nihanje

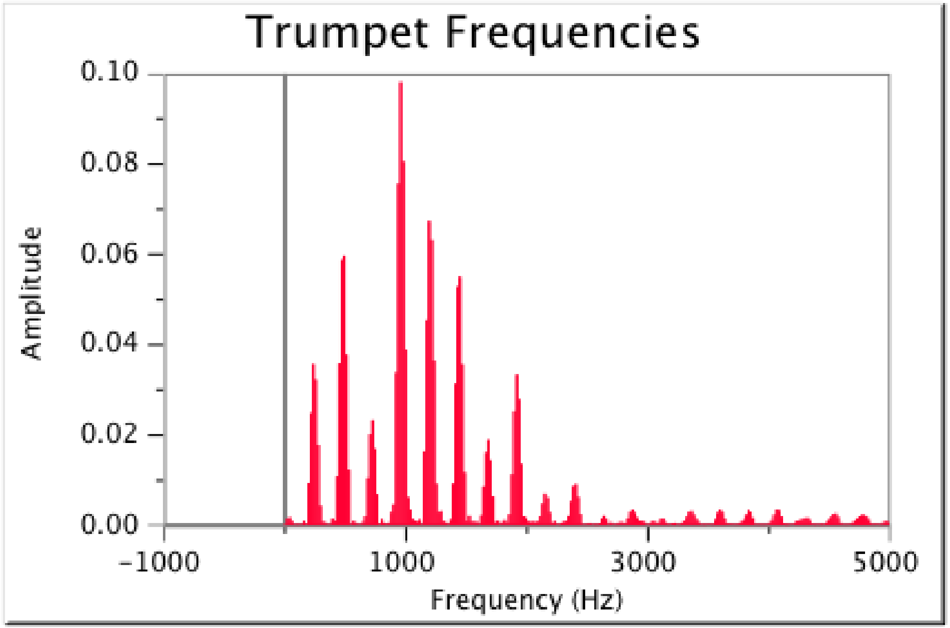
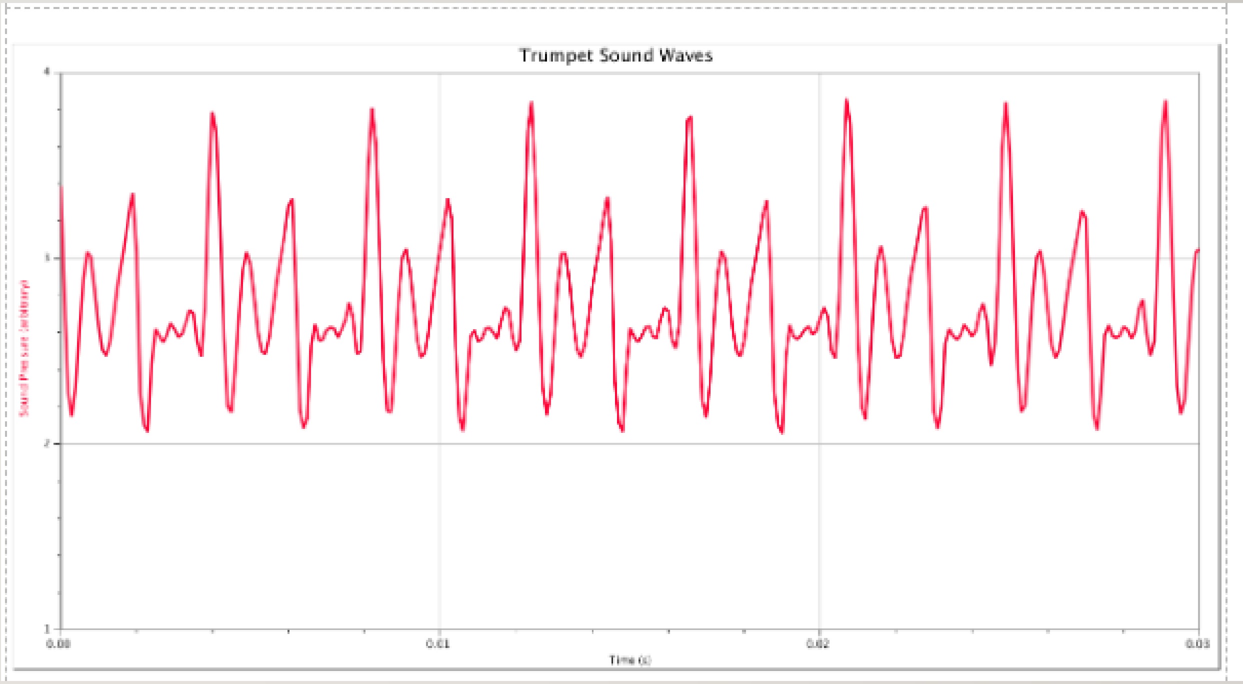


Figure 3: Fourier Analysis of a Trumpet Playing a C

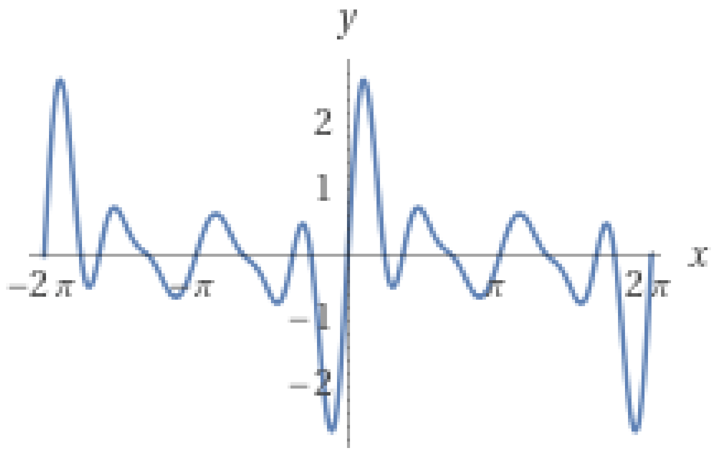


MATEMATIČNI OBRAZ TROBENTE

Input

$$f(x) = 0.35\sin(x) + 0.6\sin(2x) + 0.2\sin(3x) + 0.8\sin(4x) + 0.65\sin(5x) + 0.55\sin(6x) + 0.15\sin(7x)$$

Plots



(x from −6.283 to 6.283)

HORNERJEV ALGORITEM V SLUŽBI RAZCEPA

- Razcep $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$
- Razcep $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} \pm \cdots + a^{n-1}), n = 2k + 1$

PESNIŠKE FIGURE

- *Človeka nikar!* (S. Gregorčič)
- *prilika o izgubljenem sinu, prilika o sejalcu* (biblija)
- *Tod sekla bodo bridka jekla in ti mi boš krvava tekla.* (S. Gregorčič)

STOŽNICE V POLARNI OBLIKI

- Krožnica: $r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi) = p, \varepsilon = 0$
- Elipsa: $r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi), 0 \leq \varepsilon < 1$
- Parabola: $r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi), \varepsilon = 1$
- Hiperbola: $r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi), \varepsilon > 1$

STOŽNICE ALTERNATIVNO

- Elipsa: $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \therefore y^2 = 2px - \boldsymbol{\frac{b^2}{a^2} x^2}, p = \frac{b^2}{a}$
- Parabola: $y^2 = 2px \left(p = \frac{b^2}{a}\right)$
- Hiperbola: $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \therefore y^2 = 2px + \boldsymbol{\frac{b^2}{a^2} x^2}, p = \frac{b^2}{a}$

ZAKAJ JE $xy = 1$ HIPERBOLA?

- $1 = xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\boldsymbol{x+y}}{\sqrt{2}\sqrt{\mathbf{2}}}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{-x+y}}{\sqrt{2}\sqrt{\mathbf{2}}}\right)^2 = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2$
- Transformacija $(x, y) \to (u, v)$ je ravno vrtež za $45°$ v smeri urinega kazalca
- $(1,0) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $xy = 1$ je „običajna“ hiperbola v rotiranem koordinatnem sistemu
- seveda je tudi $xy = a, a \neq 0$ hiperbola

WolframAlpha computational intelligence.

xy=0.000000000000001

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

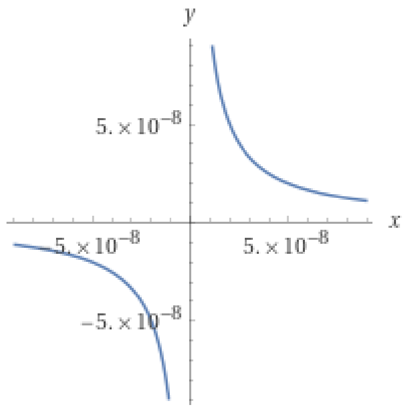
Input

$x\,y = 1\times 10^{-15}$

Geometric figure

pair of intersecting lines

Implicit plot



HERONOV OBRAZEC BREZ KOTNIH FUNKCIJ

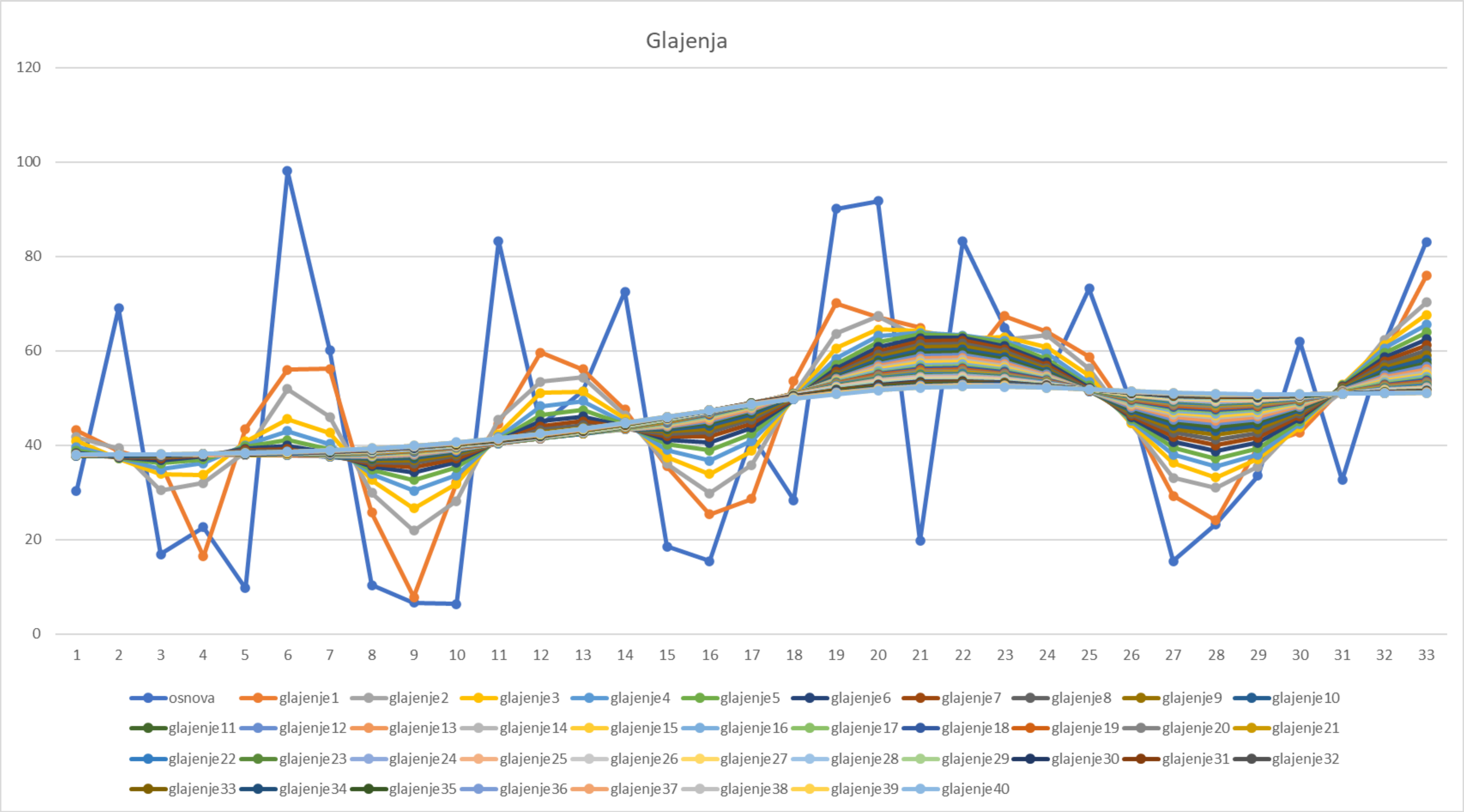
- $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), s = \frac{a+b+c}{2}$
- **Brez škode za splošnost** postavimo trikotnik ABC v koordinatni sistem tako, da je $A = (0,0), B = (c,0), C = (x,y), c,y > 0$.
- Veljata enačbi $|AC|^2 = x^2 + y^2 = b^2, |BC|^2 = (x-c)^2 + y^2 = a^2$, če ju odštejemo, izpeljemo $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
- $y^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2$
- $S^2 = \left(\frac{1}{2}cy\right)^2 = \frac{1}{4}c^2\left(b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2\right) = \frac{1}{16}(4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2)$

FIBONACCI

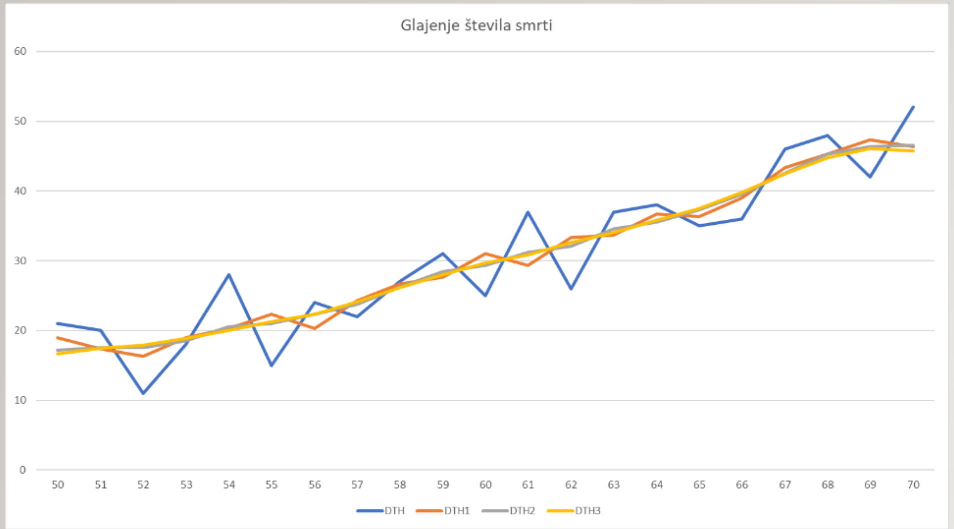
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = 0, F_1 = 1.$
- Nastavek $F_n = \alpha^n$, dobimo kvadratno enačbo $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$
- $F_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n, A + B = 0, A\alpha_1 + B\alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2$ rešitvi kvadratne enačbe
- $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
- Kaj, če bi slučajno dobili dvojno ničlo? Konjugiran par kompleksnih ničel?

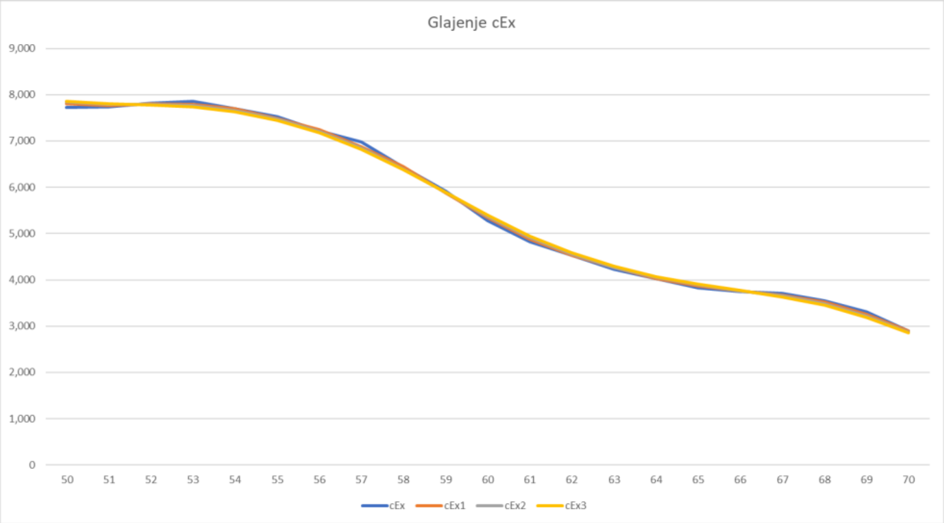
ZAPOREDJE ZAPOREDIJ

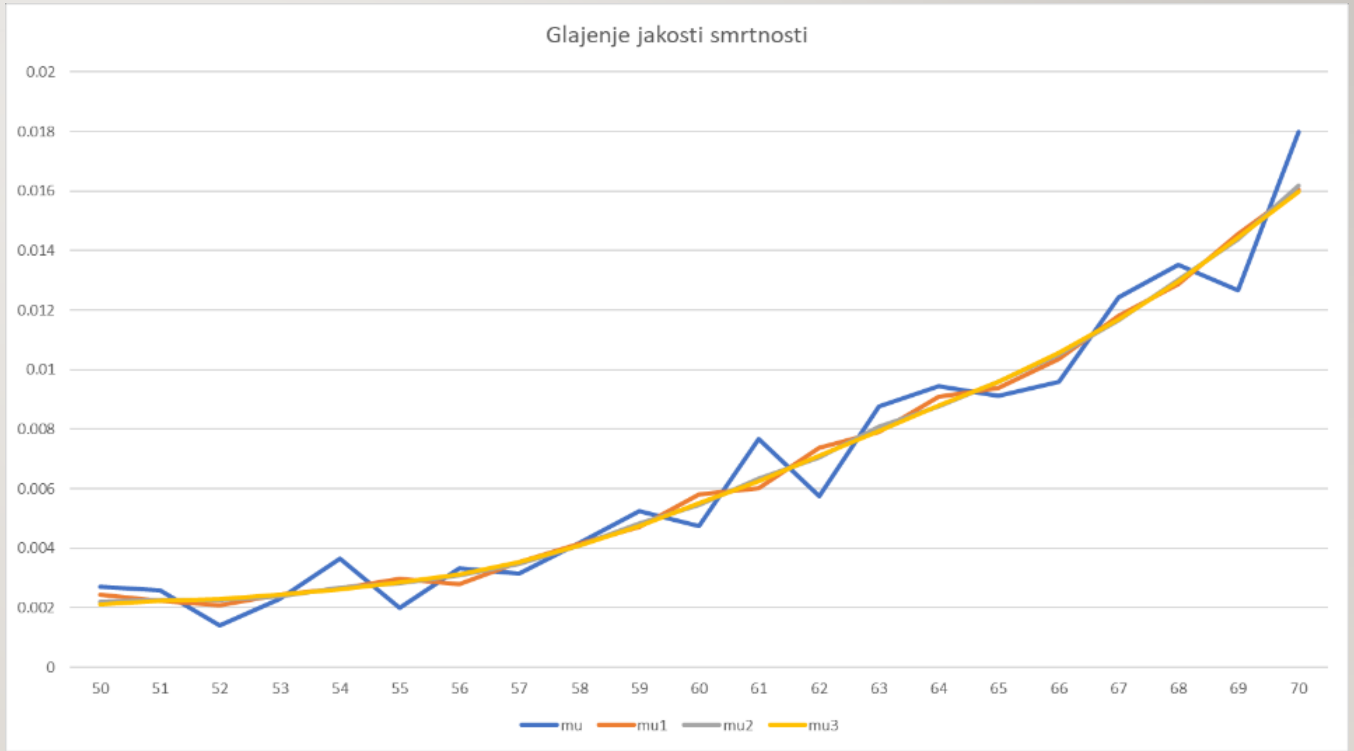
- Imejmo **končno** zaporedje realnih števil $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-2,} x_{n-1,}\, x_n$
- $y_i = \frac{1}{3}(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}), x_0 := x_1, x_{n+1} := x_n$
- Na ta način smo definirali novo zaporedje $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-2,} y_{n-1,}\, y_n$, ki mu rečemo glajenje (prve stopnje) zaporedja $\{x_i\}$.
- Postopek lahko ponovimo na zaporedju $\{y_i\}$ in dobimo še bolj gladko zaporedje.


Glajenja
120
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33
osnova
glajenje1
glajenje2
glajenje3
glajenje4
glajenje5
glajenje6
glajenje7
glajenje8
glajenje9
glajenje10
glajenje11
glajenje12
glajenje13
glajenje14
glajenje15
glajenje16
glajenje17
glajenje18
glajenje19
glajenje20
glajenje21
glajenje22
glajenje23
glajenje24
glajenje25
glajenje26
glajenje27
glajenje28
glajenje29
glajenje30
glajenje31
glajenje32
glajenje33
glajenje34
glajenje35
glajenje36
glajenje37
glajenje38
glajenje39
glajenje40

JAKOSTI SMRTNOSTI V AKTUARSTVU

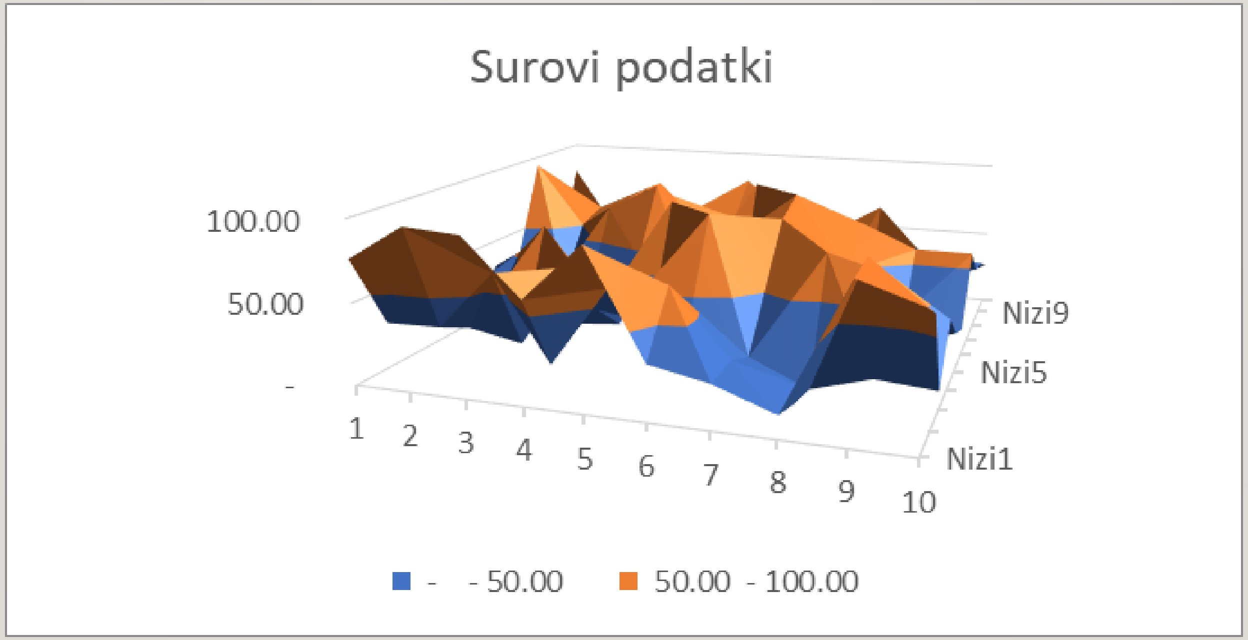


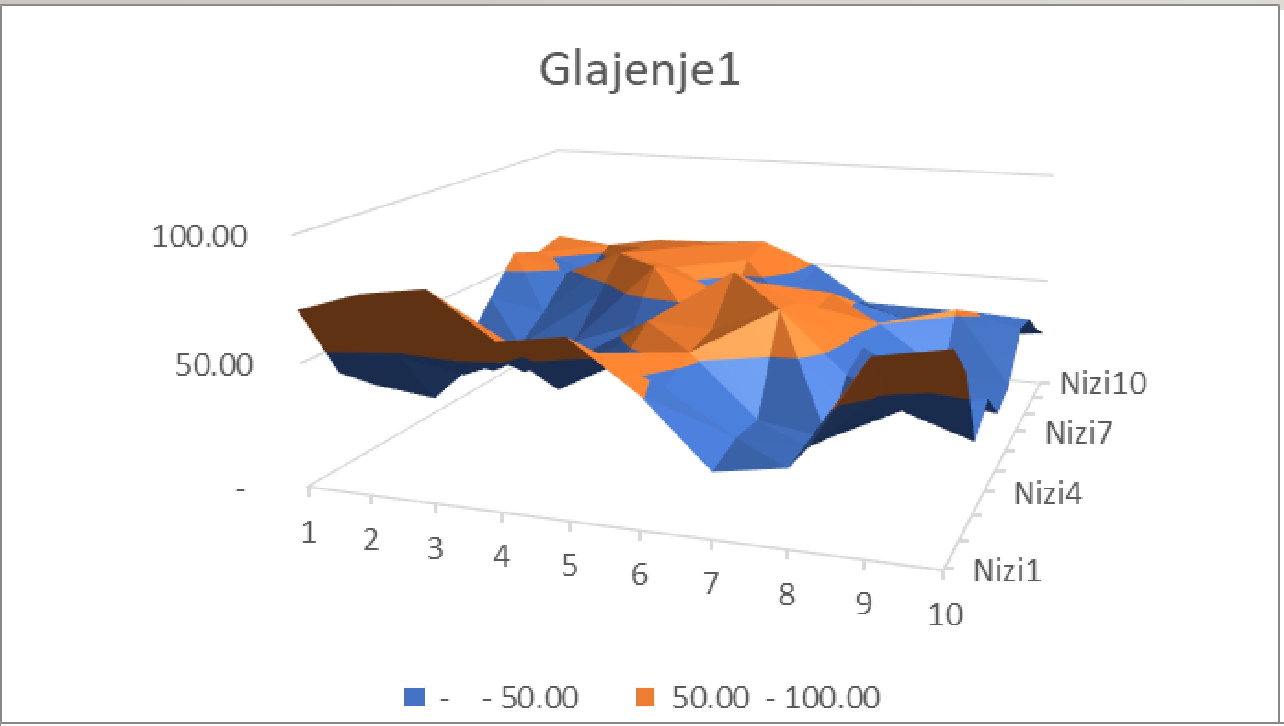


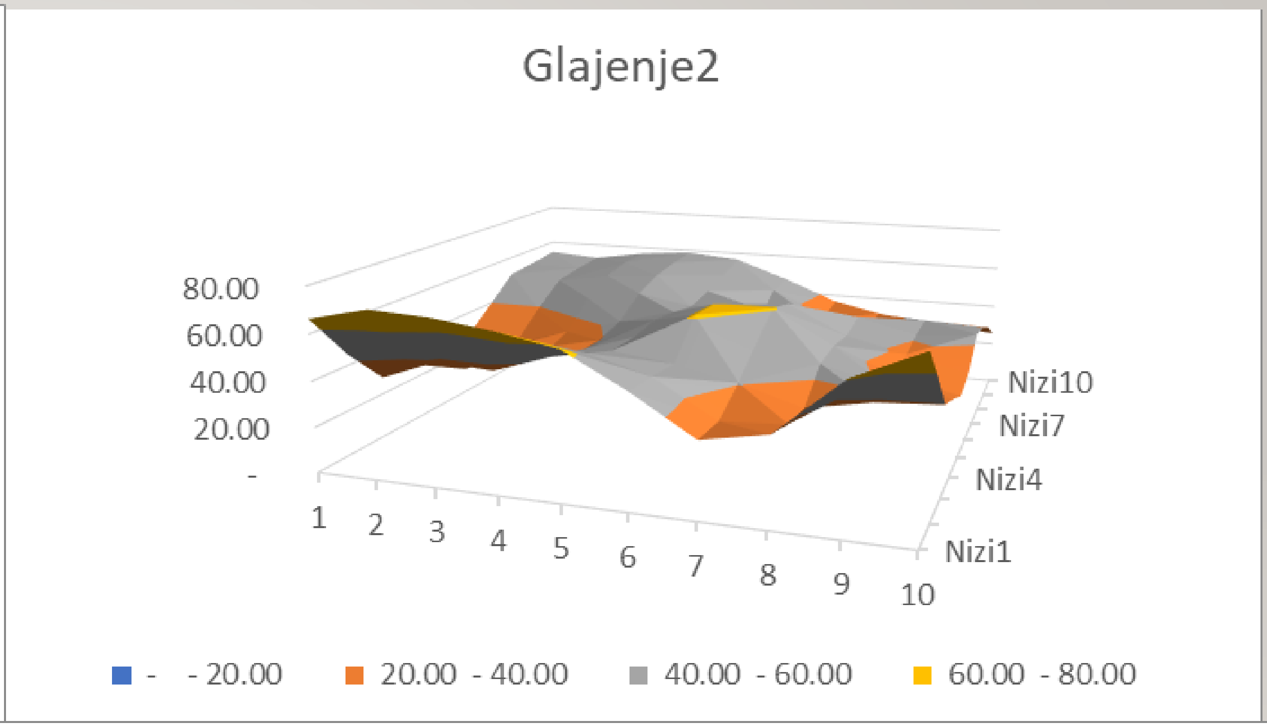


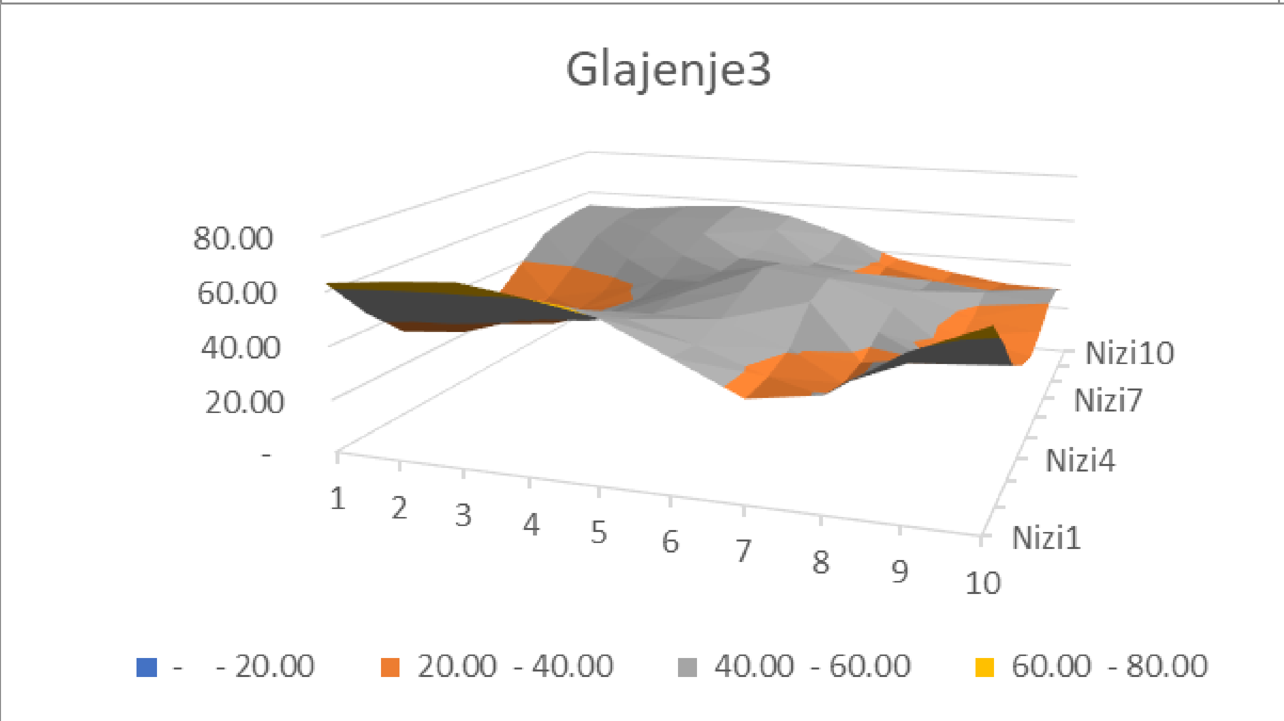
GLAJENJE V 2D

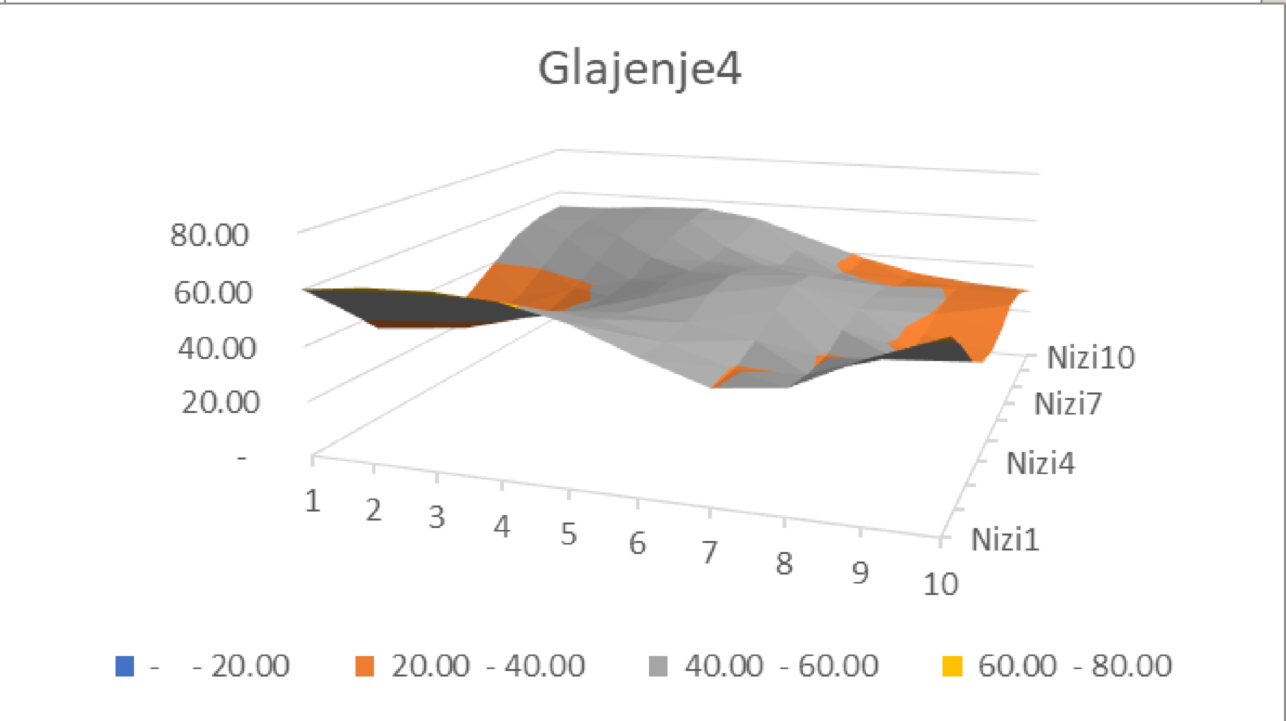
$$y_{i,j} = \frac{1}{5}\left(x_{i-1,j} + x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right),$$
$$x_{0,j} := x_{1,j}, x_{n+1,j} := x_{n,j}, x_{i,0} := x_{i,1}, x_{i,m+1} := x_{i,m}$$




Glajenje1
100.00
50.00
-
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Nizi1
Nizi4
Nizi7
Nizi10
- - 50.00
50.00 - 100.00


Glajenje2
80.00
60.00
40.00
20.00
-
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Nizi1
Nizi4
Nizi7
Nizi10
- - 20.00
20.00 - 40.00
40.00 - 60.00
60.00 - 80.00


Glajenje3
80.00
60.00
40.00
20.00
-
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Nizi1
Nizi4
Nizi7
Nizi10
- - 20.00
20.00 - 40.00
40.00 - 60.00
60.00 - 80.00


Glajenje4
80.00
60.00
40.00
20.00
-
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Nizi1
Nizi4
Nizi7
Nizi10
- - 20.00
20.00 - 40.00
40.00 - 60.00
60.00 - 80.00

PRAVILA ZA ODVAJANJE BREZ OVINKARJENJA

- Odvajanje kvocienta funkcij: $\frac{\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{h}=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$

$$=\frac{\{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\}+\{f(x)g(x)-f(x)g(x+h)\}}{g(x+h)g(x)h}\to\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Odvajanje inverzne funkcije: $\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}=\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{(y+k)-y}$

$$=\frac{(x+h)-x}{f(x+h)-f(x)}\to\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

KAKO ODVAJATI FUNKCIJO f^g?

- $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$
- $f'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + \frac{x}{x}) \; = x^x(\ln x + 1)$
- $f'(x) = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = n\, x^{n-1} + a^x \ln a,\; n = a = x$
- $h(x) = f(x)^{g(x)}$
- $h'(x) = g(x) f(x)^{g(x)-1}. f'(x) + f(x)^{g(x)} \ln f(x)\, g'(x) =$
  $= n\, f(x)^{n-1} f'(x) + a^{g(x)} \ln a\, g'(x), \qquad n = g(x), a = f(x)$

WolframAlpha computational intelligence.

d/dx f(x)^g(x)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Derivative

Step-by-step solution

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)-1}\left(g(x)\, f'(x) + f(x) \log(f(x))\, g'(x)\right)$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

Expanded form

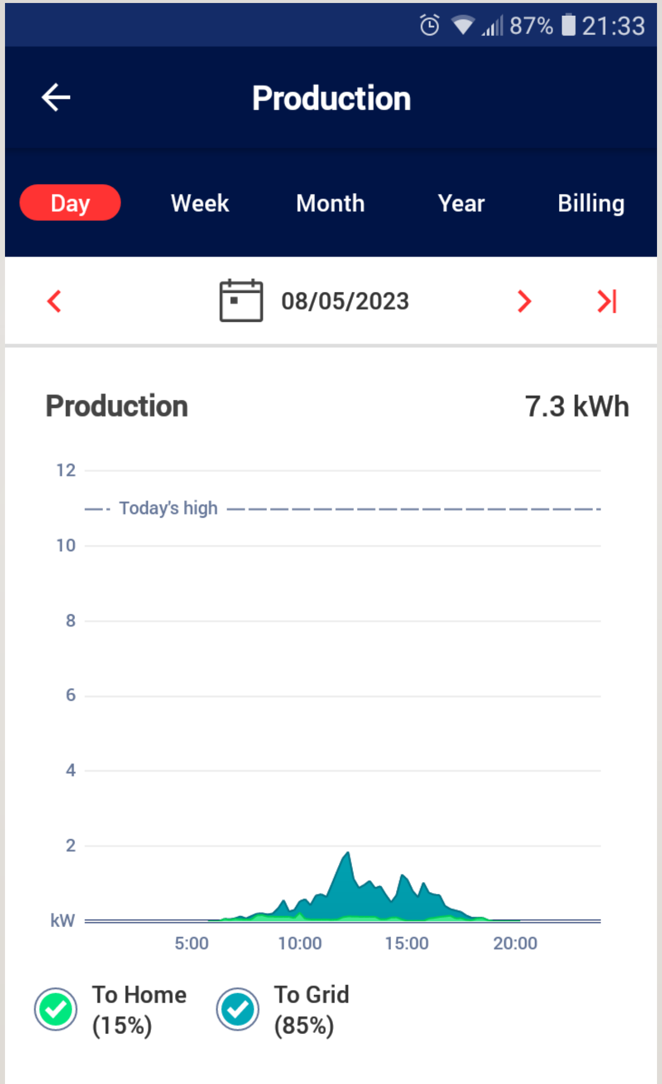
$$g(x)\, f(x)^{g(x)-1}\, f'(x) + f(x)^{g(x)} \log(f(x))\, g'(x)$$

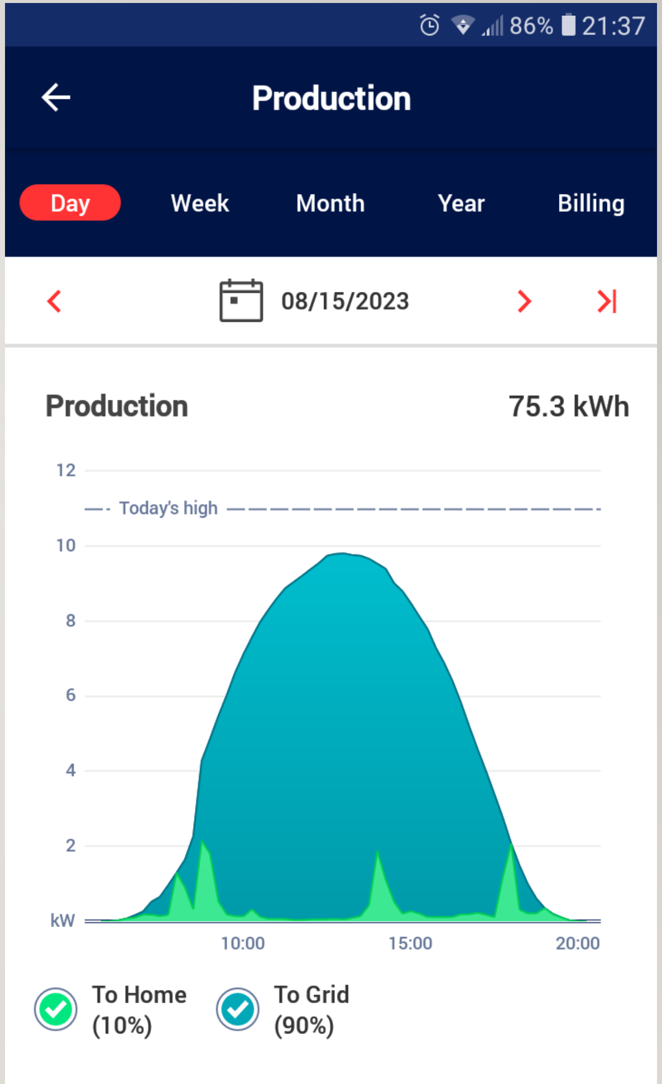

WolframAlpha computational intelligence.
d/dx x^(x^x)
NATURAL LANGUAGE
MATH INPUT
EXTENDED KEYBOARD
EXAMPLES
UPLOAD
RANDOM
Derivative
Step-by-step solution
$\frac{d}{dx}\left(x^{x^x}\right) = x^{x^x+x-1}\left(x\log^2(x) + x\log(x) + 1\right)$
$\log(x)$ is the natural logarithm

ODVAJALNI HUMOR

- Odvajaj funkcijo $f(n) = x^n, x > 0$
- Odvajaj funkcijo $\mathrm{g}(a) = a^x, x \in \mathbb{Z}$
- Odvajaj funkcijo $h(x) = \log_x x^{\mathrm{x}}$

DOLOČENI INTEGRALI V PRAKSI





POGREŠANI NAPOTKI ZA DOLOČENI INTEGRAL

- Računanje površine vrtenin, $dS = 2\pi|y|ds = 2\pi|y|\sqrt{1 + y'^2}dx$
- Računanje prostornine piramide, stožca
- Računanje dolžin krivulj, $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$
- Formule za prostornino soda (krivulja soda bodisi del parabole ali elipse)
- Posebni primer eliptičnega soda je krogla $(h = 2R, r = 0)$
- $V_e(R, r, h) = \pi h \frac{2R^2 + r^2}{3}, V_p(R, r, h) = \frac{\pi h}{15}(8R^2 + 4Rr + 3r^2)$
- Formuli delujeta tudi za izrojen primer „naftnega“ soda: $R = r$

KROG VS. ELIPSA 2:1

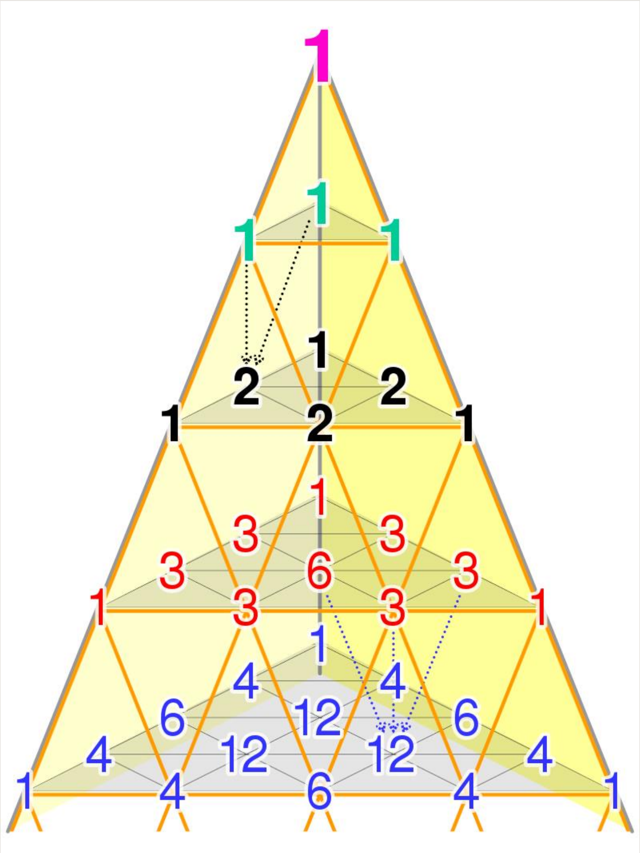
- Za krog lahko z določenim integralom izračunamo tako ploščino πr^2 kot obseg $2\pi r$
- Za elipso lahko preprosto izračunamo ploščino πab, vendar za obseg ne velja formula $\pi(a+b)$ (to je le grob približek)

$$C \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right] = \pi \left[3(a+b) - \sqrt{10ab + 3\left(a^2+b^2\right)} \right]$$

EKSTREMNA LEPOTA

- Kvader z minimalno površino pri danem volumnu?
- $V = abc = 1, P = 2(ab + bc + ac)$ minimalen, $a, b, c > 0$
- $P(a,b) = 2\left(ab + \frac{a+b}{ab}\right) \geq 2\left(ab + 2\frac{\sqrt{ab}}{ab}\right)$ zaradi neenakosti $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (enakost v primeru $a = b$)
- $t = \sqrt{ab}, f(t) = 2\left(t^2 + \frac{2t}{t^2}\right) = 2\left(t^2 + \frac{2}{t}\right)$
- f ima globalni minimum za $t = 1$, sledi $a = b = c = 1$, torej je iskani kvader **kocka**

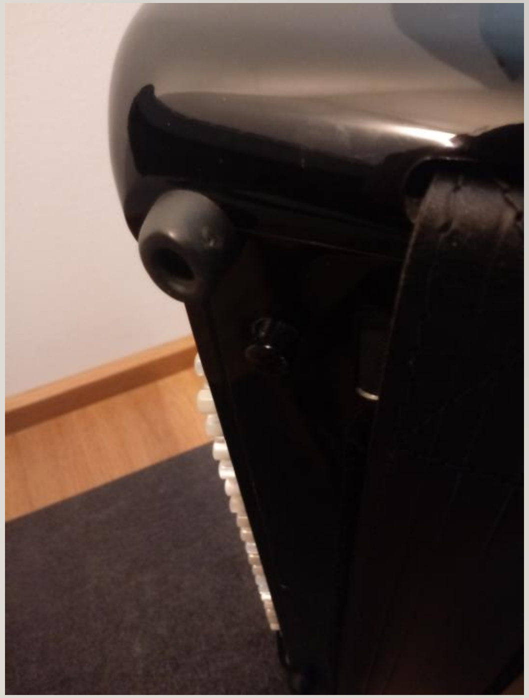
PASCALOVA PIRAMIDA



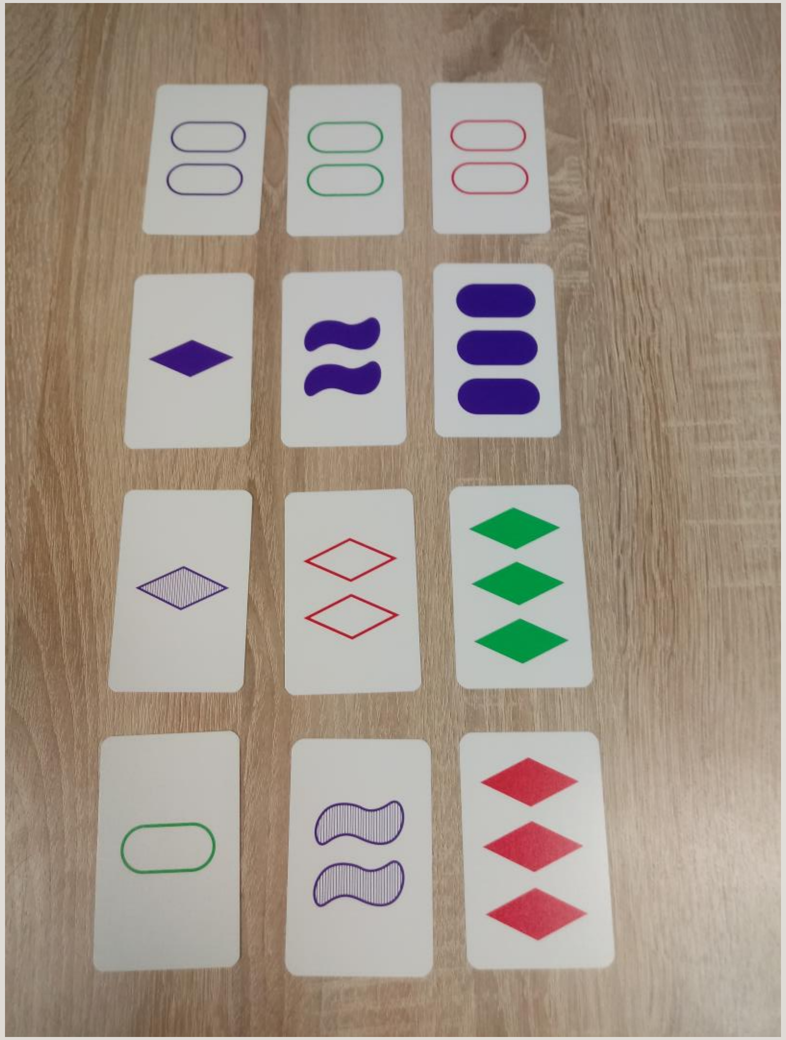
PASCALOV TRIKOTNIK IN MOČ POTENČNE MNOŽICE

- $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}, 16 = 2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + \mathbf{1}$





DRUŽABNA IGRA SET

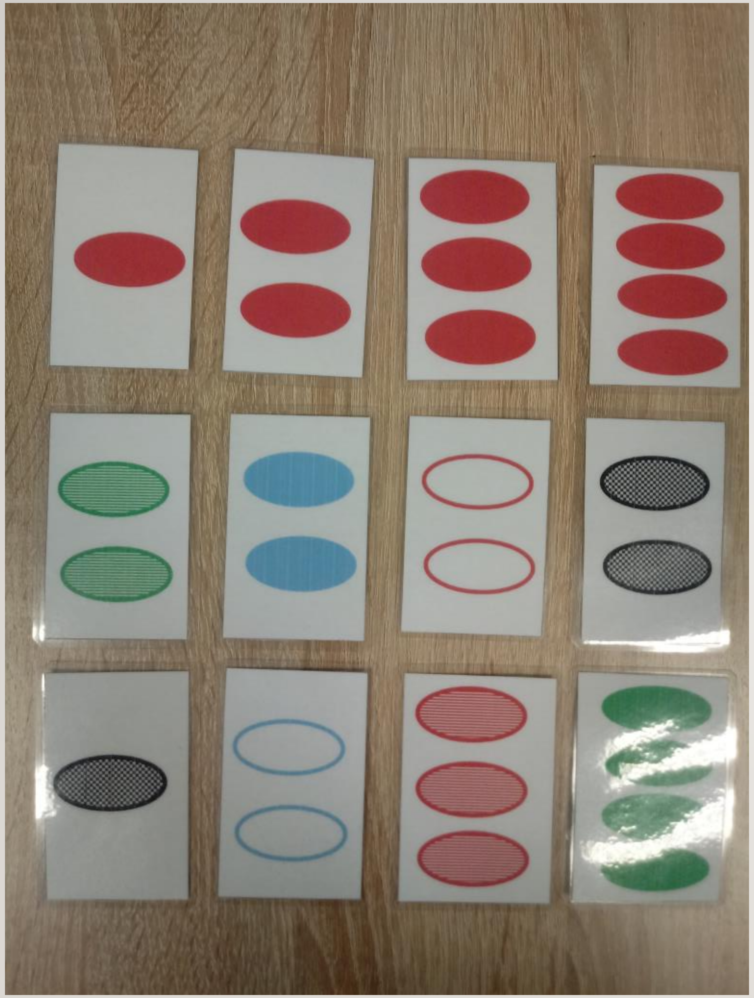


#različnih atributov	#načinov izbir različnih atributov	#enakih atributov	#opcij pri enakih	#opcij pri različnih	Prilagoditev štetja zaradi permutacij (deljenje s $3!$)	Produkt (2.,4.,5.,6. stolpec)
1	$\binom{4}{1} = 4$	3	$3^3 = 27$	$(3!)^1 = 6$	$\frac{1}{3!}$	108
2	$\binom{4}{2} = 6$	2	$3^2 = 9$	$(3!)^2 = 36$	$\frac{1}{3!}$	324
3	$\binom{4}{3} = 4$	1	$3^1 = 3$	$(3!)^3 = 216$	$\frac{1}{3!}$	432
4	$\binom{4}{4} = 1$	0	$3^0 = 1$	$(3!)^4 = 1296$	$\frac{1}{3!}$	216

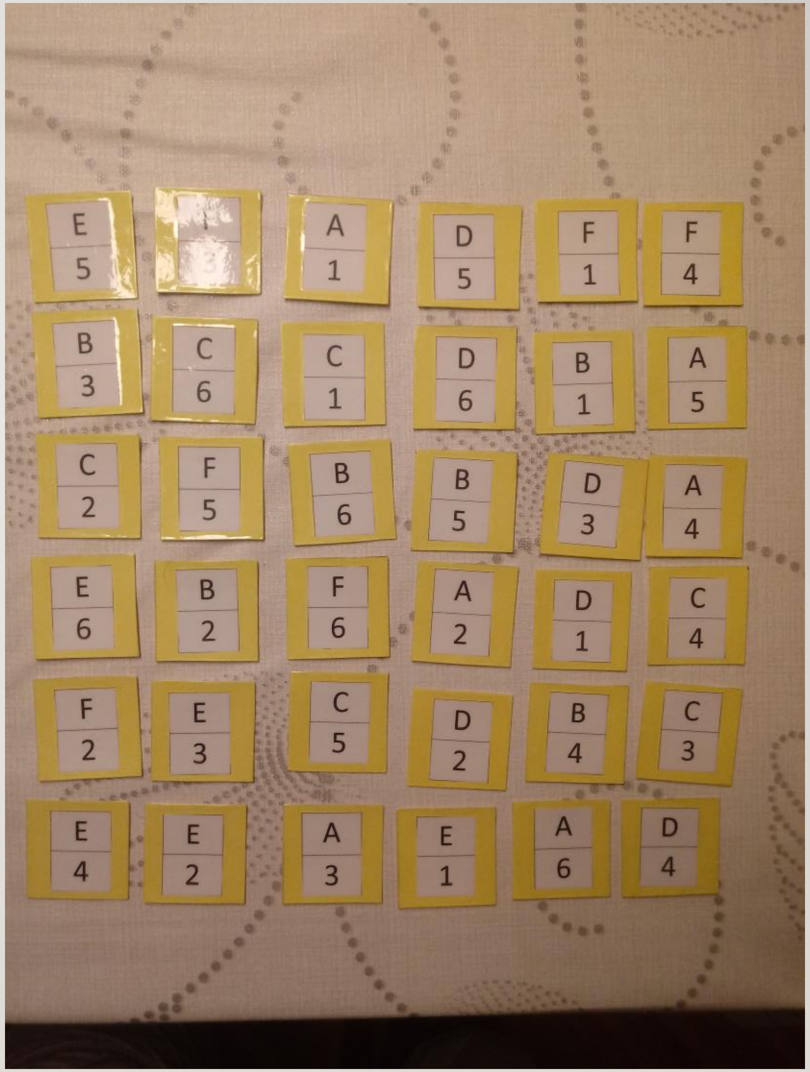
- $\binom{4}{0}3^4(3!)^0 + \left\{\binom{4}{1}3^3(3!)^1 + \binom{4}{2}3^2(3!)^2 + \binom{4}{3}3^1(3!)^3 + \binom{4}{4}3^0(3!)^4\right\} = (3+3!)^4 = 9^4$,
- $(3+3!)^4 - 3^4 = (3+6)^4 - 3^4 = 9^4 - 3^4 = 3^4(3^4-1)$ število vseh možnih setov, če bi upoštevali še vrstni red kart v setu
- Set je v resnici enolično določen s parom kart (dve karti že določata tretjo)
- Posplošitev igre Set: na kartah namesto štirih kar n atributov. Potem bi bilo število vseh kart 3^n, vseh možnih setov pa $3^n(3^n-1)/3!$

VAJE V POSPLOŠEVANJU

- na kartah n atributov, vsak od atributov lahko zavzame m različnih vrednosti
- set je torej sestavljen iz ustreznih m kart, vseh kart m^n.
- $((m+m!)^n - m^n)/m!$ število vseh možnih setov
- za $m = 4, n = 3$ dobimo „pirhe“



RAHLO SPODLETEL PROTOTIP



ZABAVNE STAVE

- Kako velika naj bo družba, da je dokaj verjetno, da obstajata v njej dva posameznika, ki praznujeta rojstni dan na isti dan?
- Če jih bo vsaj 366, bo zagotovo obstajal par …
- $1 - \frac{(365-1)}{365} \cdot \frac{(365-2)}{365} \cdot \frac{(365-3)}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{(365-(n-1))}{365}$
- Verjetnost za 23 ljudi $> 50\%$, za 30 ljudi $> 70\%$, za 35 ljudi $> 80\%$, za 41 ljudi $> 90\%$
- Posplošitev na skupno najljubšo knjigo, najljubšo glasbeno skupino …

KORIST IN ŠKODA PRESEJALNIH TESTOV

	bolan	zdrav
pozitiven test	$a = RP$	$b = LP$
negativen test	$c = LN$	$d = RN$

- Občutljivost: $o = \frac{a}{a+c}$
- Specifičnost: $s = \frac{d}{b+d}$
- Pozitivna napovedna vrednost (preciznost): $NV_+ = \frac{a}{a+b}$
- Negativna napovedna vrednost: $NV_- = \frac{d}{c+d}$
- Natančnost: $n = \frac{a+d}{a+b+c+d}$
- Idealen test bi imel vse kazalnike 100% $(b = c = 0)$

Slika 7: Od 1.000.000 britanskih državljanov, ki opravijo test elisa, jih 1600 pravilno prepoznajo za HIV-pozitivne, 2995 pa povedo, da so HIV-pozitivni, čeprav bolezni nimajo.

DVOFAZNI POSKUS: OKUŽBA/OBOLENJE, TESTIRANJE

- Običajni zgledi z žepi, žarami, frnikolami, kroglicami so rahlo *passe*…
- Zakaj raje ne računamo verjetnosti, da je nekdo zdrav pri pozitivnem testu oz. bolan z negativnim testom?
- Dva (četudi enaka) testa sta boljša od enega
- Celo izjemno natančni testi so lahko strašljivo neprecizni (test za HIV, rak dojk …)
- Domače branje: Kit Yates, Matematika med življenjem in smrtjo
- Popolnoma natančni testi obstajajo (CJB)

STOLETNE VODE, DVESTOLETNI DOGODEK …

»Kot smo že večkrat slišali, so bile to stoletne vode, tako da v tem stoletju ne pričakujemo več kaj podobnega in verjamemo, da se to ne bo ponovilo.«

Second, even if the rate is unchanged for several hundred years, 200 yr is the not the average waiting time until the next large-magnitude event. It is the mathematical expectation of the waiting time, which is a different thing. The average is better represented by the median, which is 30% lower, i.e. about 140 yr. This difference between the expectation and the median arises because the waiting-time distribution has a strong positive skew, so that lots of short waiting-times are balanced out a few long ones. In 25% of all outcomes, the waiting time is less than 60 yr, and in 10% of outcomes it is less than 20 yr.

So to use ‘1-in-200 year’ in public discourse is very misleading. It gives people the impression that the event will not happen even to their children’s children, but in fact it could easily happen to them. If it does happen to them, people will understandably feel that they have been very misled, and science and policy will suffer reputational loss, which degrades its future effectiveness.

So what to use instead? ‘Annual rate of 0.005 /yr’ is much less graspable than its reciprocal, ‘200 yr’. But ‘1-in-200 year’ gives people the misleading impression that they have understood something. As Mark Twain said “It ain’t what you don’t know
that gets you into trouble. It’s what you know for sure that just ain’t so.” To demystify ‘annual rate of 0.005 /yr’, it can be associated with a much larger probability, such as 0.1 (or 10%). So I suggest ‘event with a 10% chance of happening in the next 20 yr’.