

Iskanje najboljše poti po terenu

Gašper Jaklič

UL FGG, IMFM, UP IAM

Seminar za učitelje matematike, FMF, 21.9.2024

- načrtovanje planinske poti
- konstrukcija ceste preko razgibanega terena
- načrtovanje železnice



Trollstigen - Trolova cesta



Mulatjera v Zadnji Trenti



Pot na Breginjski Stol



- uporabimo poti predhodnikov: steze, stečine,...
- upoštevamo značilnosti terena: doline ob rekah, gorski prelazi,...
- direktna pot je običajno prestrma, naporna

- kako dobiti podatke o terenu (višinske točke)
- kako modelirati teren (matematični in računalniški zapis ploskve)
- iskanje optimalne krivulje na ploskvi je težak problem
- kako opisati krivuljo
- kako dobiti mrežo primernih krivulj in izbrati optimalno

Kaj je optimalno?

- pri vzponu na hrib bi radi porabili najmanj energije ali najhitreje prišli na vrh
- cesta ali železnica ne sme imeti prevelikih vzponov
- ovinki ne smejo biti kratki in ostri (železnica!)
- cesta/pot se mora izogniti določenim območjem (neprehoden teren,...)
- gradnja tunelov in mostov je zelo draga
- tudi gradnja vkopov in nasipov je draga (problem z materialom)

- študiramo problem iskanja optimalne poti (na vrh hriba, med dvema točkama)
- iz GPS podatkov bomo skonstruirali primerno ploskev
- na ploskvi bomo dobili mrežo poti
- poiskali bomo pot, na kateri porabimo najmanj energije
- izračunano pot bomo primerjali s potjo v naravi

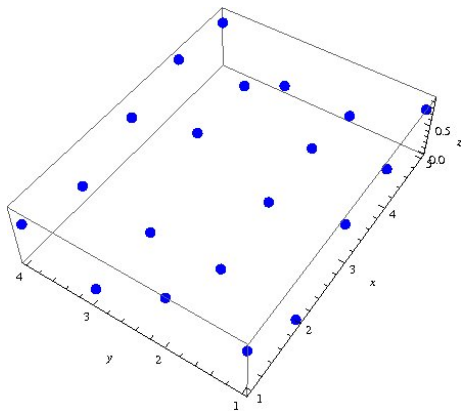
Pot čez puščavo - sledimo karavani

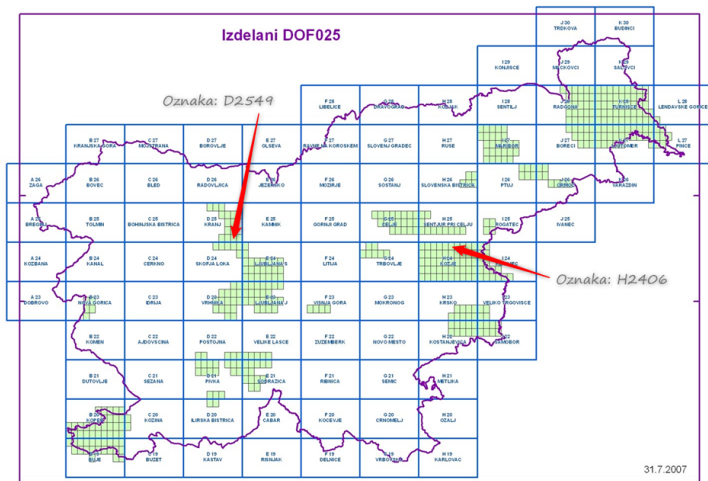
- Beduin umre, in zapusti 35 kamel svojim 3 sinovom
- 1. sin dobi $\frac{1}{2}$ kamel, 2. sin $\frac{1}{3}$ in 3. sin $\frac{1}{9}$
- kako razdeliti kamele?

- vprašajo za nasvet vaškega učitelja
- on razmisli, pripelje svojo kamelo in jo doda k 35.
- Delitev: $1/2 \cdot 36 = 18$, $1/3 \cdot 36 = 12$, $1/9 \cdot 36 = 4$, ostaneta 2
- učitelj odpelje svojo kamelo, za nagrado dobi še eno
- vsi so zadovoljni

Višinske točke (x, y, z):

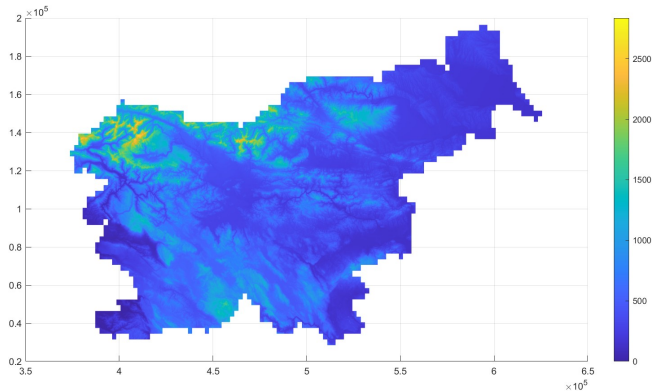
458141.17	109796.15	522
458153.67	109796.15	523
458166.17	109796.15	524
458178.67	109796.15	523
458191.17	109796.15	520
458203.67	109796.15	517
458216.17	109796.15	511
458228.67	109796.15	505
458241.17	109796.15	501
458253.67	109796.15	496
458266.17	109796.15	493
458278.67	109796.15	491
458291.17	109796.15	490





- <https://www.e-prostor.gov.si/>
- ločljivost 100, 25, 12.5, 5m

Relief Slovenije



(Vektorski) prostor X je množica, opremljena s $+$, $*$:

$$x + y \in X, \quad \lambda x \in X, \quad x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Primeri:

- Geometrijski vektorji (\mathbb{R}^3)
- prostor zveznih funkcij
- prostor polinomov
- prostor polinomov stopnje ≤ 3

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

- **Baza** prostora je množica e_1, e_2, \dots, e_n elementov X , ki so neodvisni in napolnijo X :

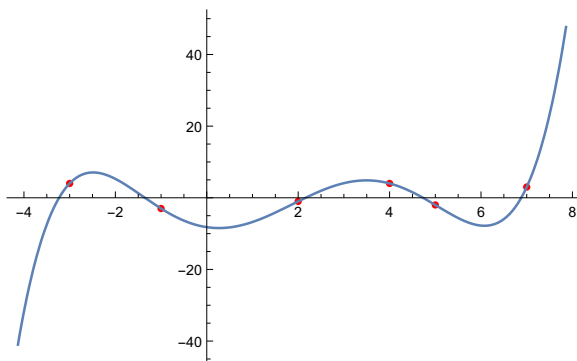
$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad x \in X.$$

- **Dimenzija prostora (dim)** je enaka številu elementov v bazi.

Aproksimacija

- 1 aproksimiraj dano funkcijo z bolj enostavno (npr. Taylorjev polinom, Fourierova vrsta)
- 2 za dane točke konstruiraj interpolacijsko krivuljo (ali dobro aproksimacijsko krivuljo)

Uporaba: numerično računanje odvoda, numerična integracija, numerično reševanje diferencialnih enačb

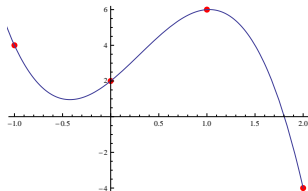


- podatki: točke, tangente, ...
- omejitve: interpolacijski pogoji, pogoji gladkosti, ...
- obstoj interpolanta in enoličnost
- hiter in stabilen numerični izračun

Interpolacija

- Dane so točke v ravnini (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$
- Poišči polinom, ki gre skozi dane točke

Primer: $(-1, 4)$, $(0, 2)$, $(1, 6)$, $(2, -4)$



$$p(x) = 2 + \frac{13}{3}x + 3x^2 - \frac{10}{3}x^3$$

- baza $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$



$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- zapišemo sistem enačb $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$
- sistem $Va = y$, kjer je V Vandermondeova matrika, in $\det V \neq 0$
- sledi: sistem ima rešitev, ki je enolična
- problem: postopek je počasen

- Lagrangeove bazne funkcije L_i , $i = 0, 1, \dots, n$



$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

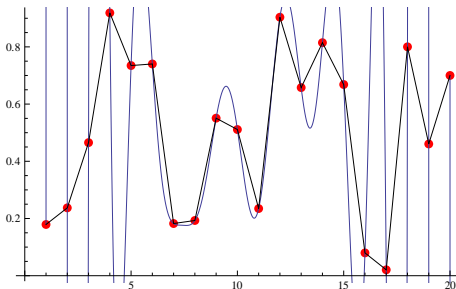
- velja $L_i(x_i) = 1$ in $L_i(x_j) = 0, j \neq i$
- interpolacijski polinom

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x)$$

- preprosta in hitra konstrukcija

Polinomi visoke stopnje in zlepki

- polinomi preveč oscilirajo
- rešitev so odsekoma polinomske funkcije - zlepki





$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- x, y, z so polinomi stopnje $\leq n$
- pospošitev so zleпки

$$\mathbf{s}(t_i) = \mathbf{T}_i, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

- s parametričnim polinomom stopnje n v ravnini lahko interpoliramo $n + 1$ točk



$$\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{T}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- pri neznanih parametrih t_i lahko morda interpoliramo $2n$ točk
- v splošnem - interpoliramo geometrijske podatke (točke, smer tangente, ukrivljenost)
- krivulja sama izbere parametre
- posplošitev na ploskve

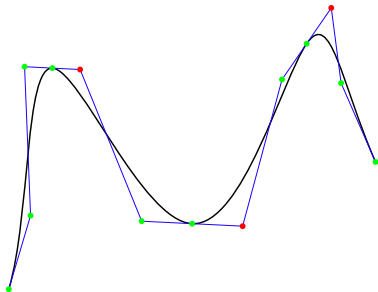
Zleppek

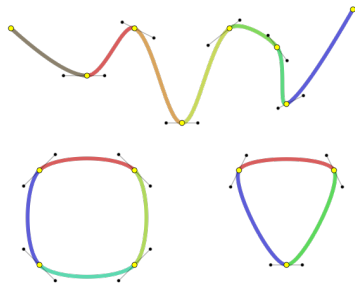
- dana je delitev intervala $t_0 < t_1 < \dots < t_k$
- Zleppek stopnje n in gladkosti r je odsekoma polinomska funkcija

$$s \in C^r([t_0, t_k]), \quad s|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

- dimenzija prostora zlepkov $S_n^r(\Delta)$ je enaka

$$n + 1 + (k - 1) \cdot (n - r)$$





- interpolacijo s polinomi in zlepki posplošimo na ploskve

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

- polinomi

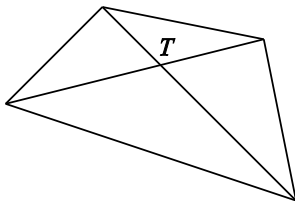
$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \cdots + a_Dy^n$$

- dimenzija prostora polinomov $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ je $D = \binom{n+2}{2}$
- s polinomom se ne da interpolirati poljubnega števila točk, le vrednosti D
- veliko število interpolacijskih točk \Rightarrow zleпки

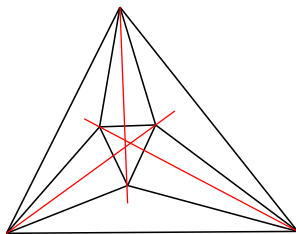
- Prostor $S_n^r(\Delta)$ ima kompleksno strukturo.
- Osnovni problemi: določitev dimenzije, konstrukcija baze, so v splošnem še vedno odprti.
- Dimenzija je odvisna od grafa triangulacije in od pozicij točk
- Posebne lokalne konfiguracije točk in povezav povzročijo spremembo dimenzije $S_n^r(\Delta)$.

Vprašanje

$$\dim S_3^1(\Delta) = ?$$



Slika: Singularna točka in $\dim S_n^r(\Delta)$, $n \geq 3r + 2$.



Slika: Morgan-Scottova triangulacija in $\dim S_2^1(\Delta) = 7$ (sim.) ali 6 (nesim.).

Izrek (Schumakerjeva spodnja meja za dimenzijo)

$$\dim S_n^r(\Delta) \geq \binom{n+2}{2} + \binom{n-r+1}{2} E_I - \left(\binom{n+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right) V_I + \sum_{i=1}^{V_I} \sigma_i,$$

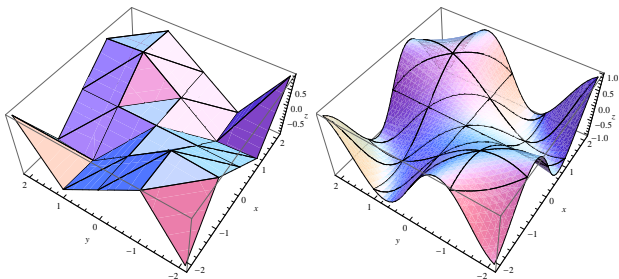
kjer je

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n-r} (r+j+1 - j e_i)_+, \quad i = 1, 2, \dots, V_I,$$

E_I = število notranjih povezav,

V_I = število notranjih točk,

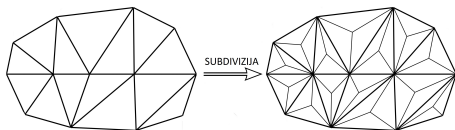
e_i = število povezav z različnimi nakloni v notranji točki v_i .



Slika: Odsekoma linearna ploskev in kubični zlepek.

Prednosti kubičnih zlepkov

- enostaven opis delov ploskve s polinomi
- ploskev je bolj gladka kot triangulacija
- robovi ploskvic so kubični polinomi
- dobili smo mrežo krivulj, na kateri bomo iskali optimalno pot
- če zahtevamo večjo natančnost, ploskev razdelimo

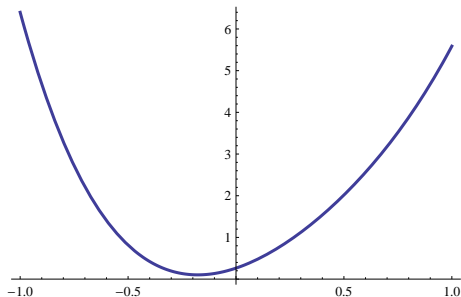


- uporablja naravne prehode
- ni prestrma (nevarnost zdrs, plezanje)
- ne izgublja višine
- je čim krajša
- strme dele premaga v ključih (cik-cak)

Poraba energije

- funkcija porabe energije na enoto poti povprečnega pohodnika glede na strmino klanca (poz. del je vzpon, neg. pa spust)

$$M(s) := 0.2635 + 1.737 s + 4.237 s^2 - 2.143 s^3 + 1.493 s^4$$

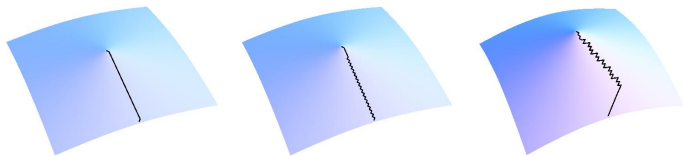


- dobljena je iz meritev
- ni simetrična
- najmanj energije potrebujemo za spust po položnem hribu
- po strmem hribu je lažje hoditi gor kot dol

- če je naklon hriba prevelik (15.6° za gor, 12.5° za dol), se spleča uporabiti hojo v ključih (cik-cak)
- pot je daljša, poraba energije pa manjša
- v [Llobera-Sluckin-zigzagging-2007] so uporabili energijsko funkcijo

$$I(\delta) := \frac{M(\tan \theta \cos \delta)}{\cos \delta}$$

- θ je naklon terena, δ pa kot med trenutno smerjo pohodnika in njegovo smerjo proti cilju
- pri nas cik-cak gibanje nastane zaradi uporabe zlepkov in subdivizije



Slika: Optimalne poti na ploskvah z različnimi konstantnimi nakloni:
 $\tan \theta = 0.25, 0.3, 0.5$.

- naša ploskev nima konstantnega naklona φ
- “sešteti” je treba energijo po poti (upoštevati dolžino in naklon)
- delček poti je krivulja

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$$

- energija E na delu poti $d\ell$ je

$$dE(\mathbf{r}) = M(s(t)) d\ell,$$

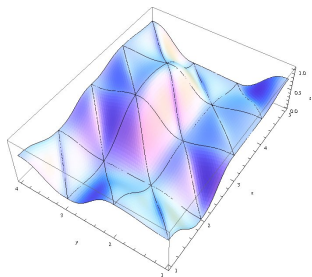
-

$$s(t) = \tan \varphi(t) = \frac{\dot{r}_z(t)}{\sqrt{\dot{r}_x^2(t) + \dot{r}_y^2(t)}}.$$

- poraba energije na krivulji je

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^1 M(s(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt.$$

- energijo izračunamo na vsakem delu mreže krivulj



Dijkstrov algoritem

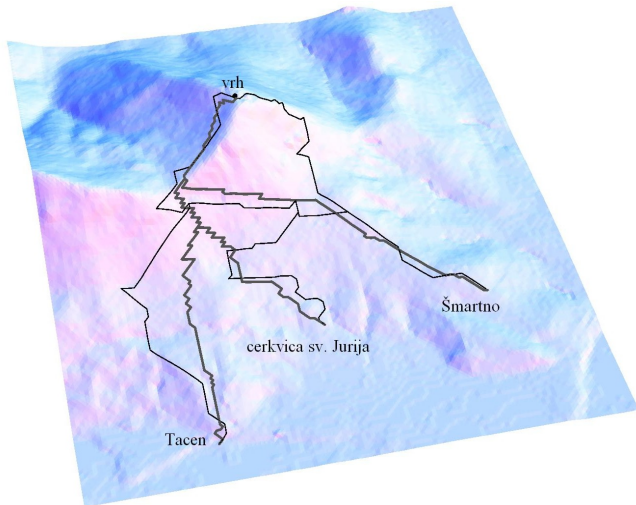
- imamo omrežje poti (V, E) med točkami, vsaka povezava e ima ceno $w_e \geq 0$ (cena = energija, dolžina,...)
- cena poti je vsota cen vseh povezav na poti
- algoritem določi najcenejšo pot od ene točke s do vseh drugih
- raziskani del omrežja: množica S točk u , za katere smo že določili dolžino najcenejše poti od točke s
- za vsako točko $v \in V - S$ določimo najcenejšo pot, ki jo lahko dobimo tako, da potujemo po raziskanem delu S do neke točke u in po povezavi od u do v .
- opazujemo količino

$$c'(v) = \min_{\substack{e=uv: \\ u \in S}} (c(u) + w_e).$$

- izberemo točko $v \in V - S$, za katero je ta količina najmanjša, in dodamo v v množico S .
- zapomnimo si povezavo uv , na kateri je bil dosežen minimum

Šmarna gora





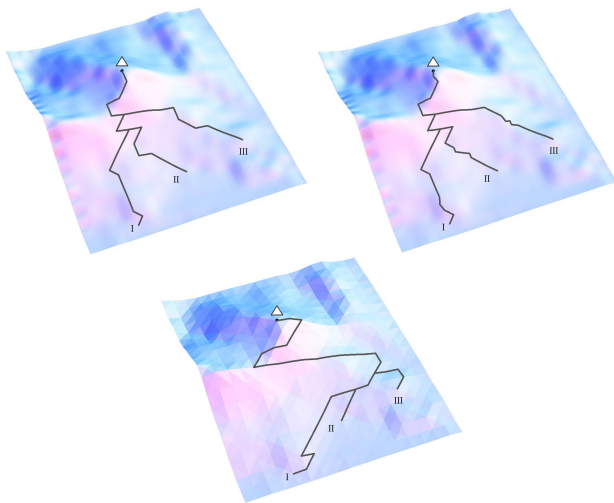
Slika: Šmarna gora s priljubljenimi potmi (črno, tanko) in izračunanimi potmi (sivo, krepko).

Poraba energije

Izhodišče	Pot	Poraba (kJ)	Prihranek (kJ)	Razlika (%)
Tacen (čez Sp. kuhinjo)	prava optim.	1589 1403	186	11.7
c. sv. Jurija (Romarska pot)	prava optim.	1484 1252	232	15.6
Šmartno (Šmarska pot)	prava optim.	1403 1250	153	10.9
Šmartno (Partizanska pot)	prava optim.	1456 1250	206	14.1

Tabela: Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro.

Optimalne poti

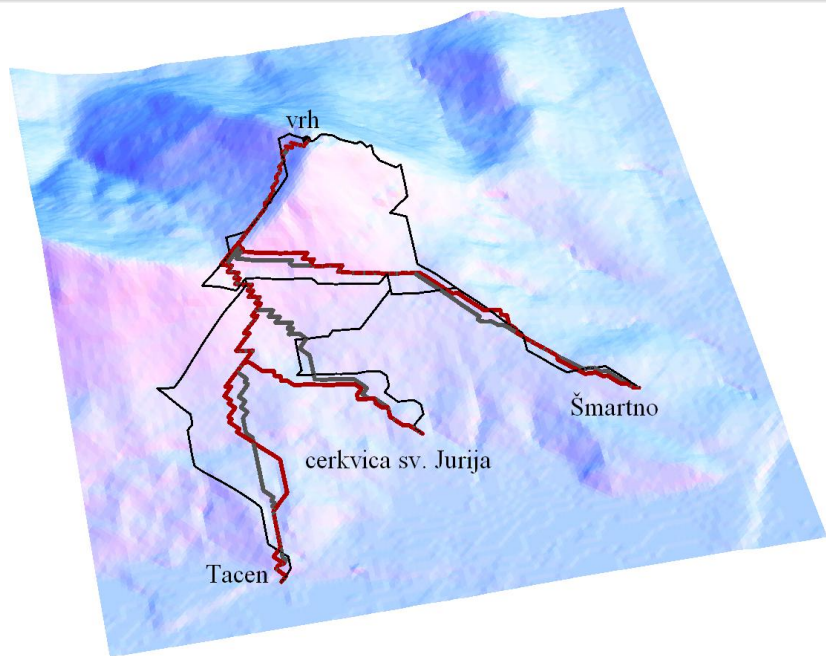


Slika: Optimalne poti na grobi mreži, po enem koraku subdivizije in na odsekoma linearnem terenu.

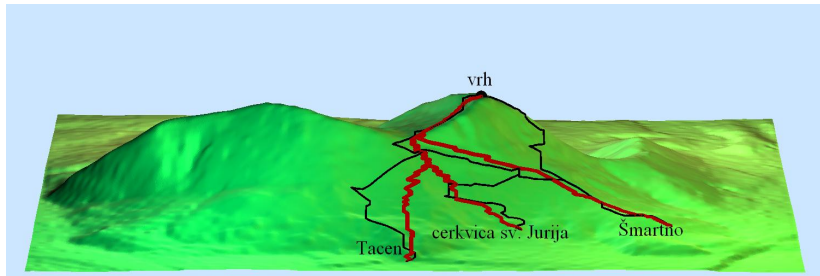
	P. energije (kJ)		
Start	Groba	Razdeljena	O. linearna
I	1373	1371	1935
II	1281	1279	1699
III	1194	1191	1632

Tabela: Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro na grobi mreži, po uporabi subdivizije in na odsekoma linearni ploskvi.

Poti navzdol



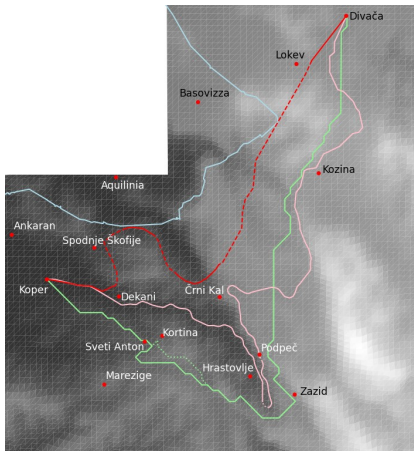
Šmarna gora



- nagib proge je omejen (izločimo neustrezne dele)
- zavoji ne smejo biti ostri (spremenimo iskanje v algoritmu)
- tuneli?

- preveč možnosti za izračun
- podati je potrebno začetek, konec in ceno
- uporabimo prejšnji algoritem

- Katarina Gačnik, mag. delo, FMF, 2022

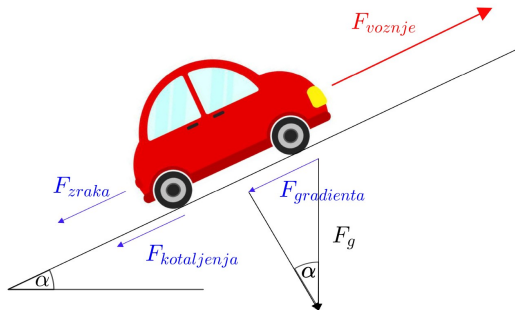


Slika: 1. tir (roza), 2. tir (rdeče), rezultat (zeleno)

- algoritem - vožnja po Luni
- dano je cestno omrežje
- znani sta začetna in končna točka poti
- odvisnost od vozila (upor zraka, teža, izgube pri prenosih)
- napolnjenost baterije, čas polnjenja
- temperatura zraka, razmere na cesti
- velika poraba energije na avtocestah in pri vožnji v klanec
- rekuperacija pri vožnji navzdol

Avto na klancu

- Tadej Meglič, mag. delo, FMF, 2022

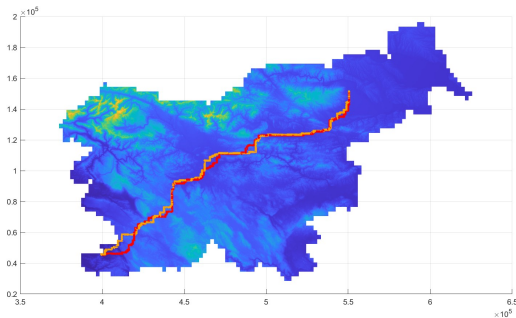


Slika: Sile na klancu.

- hitra vožnja in krajši/daljši postanki za polnjenje?
- počasnejša vožnja?
- daljša pot, brez polnjenja?
- Dijkstrov algoritem na uteženem grafu = Johnsonov algoritem

Pot Koper - Maribor z regenerativnim zaviranjem

- Tadej Meglič, mag. delo, FMF, 2022



Slika: Optimalna pot KP-MB (oranžno), in MB-KP (rdeče).

- G. Jaklič, T. Kanduč, S. Praprotnik, E. Žagar, Energy minimizing mountain ascent, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Volume 155, Issue 2 (2012), pp. 680–693.
- G. Jaklič, T. Kanduč, S. Praprotnik, E. Žagar, Z najmanj truda na Šmarno goro!, *Obzornik za matematiko in fiziko* 59 (1) 2012, 1–10.
- G. Jaklič, T. Kanduč, Hermite interpolation by triangular cubic patches with small Willmore energy, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 90, No. 9 (2013), 1881–1898.
- Tadej Meglič: Konstrukcija optimalne poti električnega avtomobila po terenu, mag. nal. (2022)
- Katarina Gačnik: Konstrukcija optimalnega železniškega tira po terenu, mag. nal. (2022)