Nekaj enostavnih polinomskih (skrivnosti)

FMF seminar

21. 9. 2024

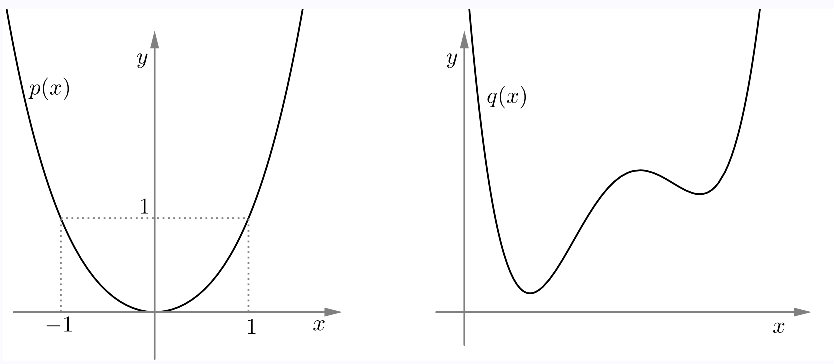
D. Kobal

Stopnja polinoma in njegov graf

Poznamo stopnjo polinoma. $\Longrightarrow$ Kaj vemo o grafu polinoma?

Kaj vemo o stopnji polinoma? $\Longleftarrow$ Poznamo graf polinoma.

Katere stopnje sta polinoma na sliki?



https://www.geogebra.org/m/tg7arju4

Kaj lahko vidimo in kaj je potrebno razumeti?

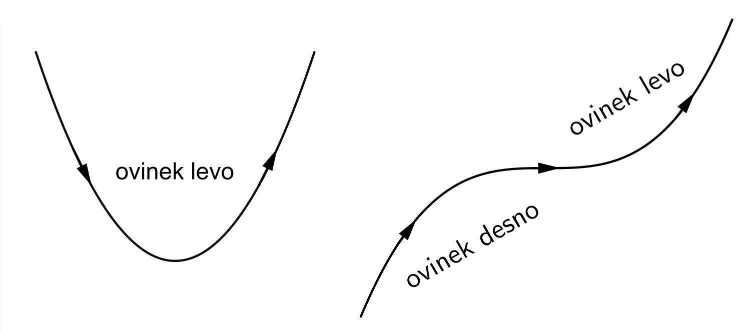
- Ugotovili smo: Iz slike grafa polinoma v splošnem težko sklepamo, kakšna je njegova stopnja.
- Ko slika (brez razumevanja) zavaja...
- https://www.geogebra.org/m/fzwgg3ky
- hip.nb (https://uc.fmf.uni-lj.si/mi/arhivpoletih/gradiva/2425/hiperbola_ali_elipsa.gif)
- https://www.geogebra.org/m/x84tuyrg (https://www.geogebra.org/m/q4epvnnv)

Graf polinoma $\longleftrightarrow$ Stopnja polinoma

- Kaj torej graf pove o stopnji polinoma in obratno?
- Ne veliko ... 'Več krivin grafa' pomeni 'višjo stopnjo'. 'Krivine grafa' nekako lahko 'štejemo' s presečišči grafa s 'poljubnimi premicami'. Sklepamo lahko, da če graf polinoma seka neko premico n-krat, potem je vsaj stopnje n.
- Obratno, iz stopnje polinoma lahko sklepamo zelo malo o 'krivinah grafa'. V primeru, da je stopnja polinoma večja od 1 lahko sklepamo zgolj

$$\text{stopnja je soda} \implies \text{graf ima 'vsaj en ovinek'}$$

$$\text{stopnja je liha} \implies \text{graf ima 'vsaj dva ovinka'}$$



Polinomi stopnje 1, 2 in 3

- Polinomi stopnje 1 in 2 (lahko bi jih imenovali 'srednješolski polinomi') so zelo 'lepi' v smislu, da je pri njih stopnja enolično povezana z maksimalnim številom presečišč grafa s premico. Velja to tudi za polinome stopnje 3? DA!
- Polinomi stopnje 3 so še posebej zanimivi. Kako naj na grafu (poljubnega) polinoma $p(x)$ stopnje 3 izberemo točki $A\big(x_1, p(x_1)\big)$ in $B\big(x_2, p(x_2)\big)$, da bo premica skozi A in B sekala graf polinoma $p(x)$ še v tretji točki $C\big(x_3, p(x_3)\big)$?
- Kakorkoli! (Z upoštevanjem multiplikativnosti/dotikališča!)

Razmislek potrdi nekoliko mučen a enostaven račun:
Za $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in točki $A\big(x_1, p(x_1)\big)$, $B\big(x_2, p(x_2)\big)$ dobimo premico
$q(x) = p(x_2) + \frac{p(x_2)-p(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_2)$.
In za $x_3 = -\frac{b}{a} - x_1 - x_2$ izračunamo $p(x_3) = q(x_3)$.
Z razumevanjem translacije $\big(x_2, p(x_2)\big) \longmapsto (0,0)$, lahko račun poenostavimo v $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, točki $A\big(x_1, p(x_1)\big)$, $B(0,0)$, premico $q(x) = \frac{p(x_1)}{x_1}x$, in za $x_3 = -\frac{b}{a} - x_1$ dobimo $p(x_3) = q(x_3) = -(\frac{b}{a} + x_1)(c + bx_1 + ax_1^2)$.

Naloge

- Vzemimo poljubna števila a, b, c polinom tretje stopnje $p(x)$, ki ima v a, b, c ničle. Narišimo tangento t na polinom $p(x)$ v točki $M\big(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2})\big)$. Kje glede na tangento t leži točka $C(c, 0)$? Je lahko točka C nad tangento t? Lahko točka C leži na tangenti t? Pod kakšnimi pogoji?
- Vzemimo poljuben polinom tretje stopnje $p(x)$ in poljubne tri kolinearne točke $A\big(a, p(a)\big)$, $B\big(b, p(b)\big)$ in $C\big(c, p(c)\big)$ na grafu $p(x)$. Narišimo tangento t na polinom $p(x)$ v točki $M\big(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2})\big)$. Kje glede na tangento t leži točka $C\big(c, p(c)\big)$? Je lahko točka C nad tangento t? Lahko točka C leži na tangenti t? Pod kakšnimi pogoji?

Rešitev

Tangenta t vselej vsebuje točko C. Vizualizacija: https://www.geogebra.org/m/bzufkhe4

Če povedano drži, dobimo enostavno in precej neverjetno posledico:

- Če so a, b, c ničle kubičnega polinoma $p(x)$ in če narišemo tangento na graf $p(x)$ v točki $M\big(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2})\big)$, tangenta vsebuje točko $(c, 0)$. Izkaže se celo, da je smerni koeficient te tangente neodvisen od c. Vizualizacija: https://www.geogebra.org/m/tcqgjrc3

Dokaz trditve je zelo preprost in celo splošnejši od povedanega

Vzemimo funkcijo $g(x)$ z ekstremom v točki $\big(w, g(w)\big)$. Torej $g'(w) = 0$. Definirajmo $f(x) = \alpha \cdot g(x) \cdot (x - c)$, in izračunajmo

$$f'(x) = \alpha \cdot g'(x) \cdot (x - c) + \alpha \cdot g(x).$$

Torej

$$f'(w) = \alpha \cdot g(w).$$

Premica skozi točki $T\big(w, f(w)\big)$ in $C(c, 0)$ ima smerni koeficient

$$\frac{f(w)}{w - c} = \frac{\alpha \cdot g(w) \cdot (w - c)}{w - c} = \alpha \cdot g(w).$$

Torej je ta premica tudi tangenta na $f(x)$ v $T\big(w, f(w)\big)$ in njen smerni koeficient $f'(w) = \frac{f(w)}{w-c} = \alpha \cdot g(w)$ je neodvisen od c.

Vizualizacija: https://www.geogebra.org/m/h96yxg89
Dokazali smo torej:

Izrek

Če velja $g'(w) = 0$, potem tangenta na graf funkcije $f(x) = \alpha \cdot g(x) \cdot (x - c)$ v točki $T\big(w, f(w)\big)$ vsebuje točko $C(c, 0)$ in njen smerni koeficient je neodvisen od c.

Posledica 1

Če so a, b, c ničle kubičnega polinoma $p(x)$ in če narišemo tangento na $p(x)$ v točki $M\big(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2})\big)$, potem ta tangenta vsebuje točko $(c, 0)$ in njen smerni koeficient je neodvisen od c.

Dokaz je zelo preprost

Vzamemo kvadratni polinom $g(x) = (x - a) \cdot (x - b)$ in $p(x) = \alpha \cdot g(x) \cdot (x - c)$. Ker je $g'(w) = 0$ za $w = \frac{a+b}{2}$ po izreku takoj sledi, da tangenta na $p(x)$ v točki $M\big(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2})\big)$ vsebuje točko $(c, 0)$ in njen smerni koeficient je neodvisen od c in je enak $p'(w) = \frac{p(w)}{w-c}$.

Posledica 2

Če premica seka polinom $p(x)$ v točkah $A(a, p(a))$, $B(b, p(b))$ in $C(c, p(c))$, potem tangenta na graf polinoma $p(x)$ v točki $M(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2}))$ vsebuje točko $C(c, p(c))$.

Tudi dokaz te posledice ni težak

Premico l, ki seka polinom tretje stopnje $p(x)$ v točkah $A(a, p(a))$, $B(b, p(b))$ and $C(c, p(c))$, lahko zapišemo $l(x) = p(a) + k(x-a)$, pri čemer je $k = \frac{p(b)-p(a)}{b-a}$. Seveda $p(a) = l(a)$, $p(b) = l(b)$ in $p(c) = l(c)$. Definiramo polinom $r(x) = p(x) - l(x)$. Polinom $r(x)$ ustreza pogojem prejšnje posledice in za $w = \frac{a+b}{2}$ velja $r'(w) = \frac{r(w)}{w-c}$. Torej

$$p'(x) = k + r'(x)$$

in smerni koeficient tangente na $p(x)$ v $M(w, p(w))$ izračunamo

$$\begin{aligned} p'(w) &= k + \frac{r(w)}{w-c} = k + \frac{p(w)-l(w)}{w-c} = \\ &= k + \frac{p(w)-p(a)-k(w-a)}{w-c} = \frac{p(w)-p(a)-k(c-a)}{w-c} = \\ &= \frac{p(w)-l(c)}{w-c} = \frac{p(w)-p(c)}{w-c}, \end{aligned}$$

kar je smerni koeficient premice skozi točki $M(w, p(w))$ in $C(c, p(c))$.

Posledica 3

Če je $f(x)$ poljubna funkcija, točka $C(c, d)$ poljubna točka na grafu funkcije $f(x)$ (torej $f(c) = d$) in če je premica t, ki gre skozi točko C tangenta na graf $f(x)$ v točki $T(w, f(w))$, potem za funkcijo $g(x) = \frac{f(x)-d}{x-c}$ velja $g'(w) = 0$.

Dokaz

Ker omenjena tangenta vsebuje točki $C(c, f(c))$ in $T(w, f(w))$, velja $f'(w) = \frac{f(w)-f(c)}{w-c}$ in izračunamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)\cdot(x-c)-f(x)+d}{(x-c)^2} \\ g'(w) &= \frac{f'(w)\cdot(w-c)-f(w)+d}{(w-c)^2} = \\ &= \frac{\frac{f(w)-f(c)}{w-c}\cdot(w-c)-f(w)+d}{(w-c)^2} = 0 \end{aligned}$$

Zadnja trditev je sama po sebi precej neuporabna. Je pa zanimiva s stališča razumevanja, saj jo je mogoče videti kot 'geometrijski način iskanja rešitev' enačb $g_c'(x) = 0$ za družino funkcij $g_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Rešitve so namreč dotikališča tangent na graf $f(x)$, ki gredo skozi ustrezne točke $(c, f(c))$.
Vizualizacija: https://www.geogebra.org/m/zvkm2gum