

# Kdaj je neko število enako vsoti 2-eh kvadratov

1. Ali je 2024 vsota dveh kvadratov? Kaj pa 2025 in 2023...?
2. Ali je  $2005^{2004}$  oziroma  $2004^{2005}$  vsota dveh kvadratov?
3. Dokaži, da je  $\frac{27^n - 1}{3^n - 1}$  celo število, ki ga lahko zapišemo kot vsoto dveh kvadratov, če je  $n$  liho število.
4. Dokaži, da je  $(a^2 + 9)(4b^2 + 1)$  vsota dveh kvadratov.
5. Dokaži, da je množica vseh celih števil, ki jih lahko zapišemo kot vsoto dveh kvadratov, zaprta za množenje.
6. Dokaži, da je  $m$  vsota dveh kvadratov natanko tedaj, ko je  $2m$  vsota dveh kvadratov.
7. Naj bo praštevilo  $p$  vsota dveh kvadratov. Potem je celo število  $m$  vsota dveh kvadratov natanko tedaj ko je  $pm$  vsota kvadratov.
8. Naj bo  $p$  praštevilo. Dokaži:
  - če je  $p \equiv_4 3$  potem  $p$  ni vsota dveh kvadratov.
  - če je  $p \equiv_4 3$  in  $p \mid a^2 + b^2$  potem  $p \mid a, b$ .
  - če je  $p \equiv_4 1$  potem  $p$  je vsota dveh kvadratov. **Fermatov izrek**
9. **Lagrangeov izrek**
  - Vsako naravno število, ki ni oblike  $4^n(8k + 7)$ , pri čemer sta  $n, k \in \mathbb{N}_0$ , lahko zapišemo kot vsoto 3-eh kvadratov.
  - Vsako naravno število lahko zapišemo kot vsoto 4-ih kvadratov.
10. Dokaži, da je v zaporedju 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... vsak lih člen vsota dveh kvadratov.

**Rešitev:** Ni težko videti, da je  $f_n$  število načinov na katere lahko ploščo  $2 \times n - 1$  pravilno tlakujemo z dominami.

Torej  $f_{2n+1}$  pomeni število načinov na katere lahko tlakujemo ploščo  $2 \times 2n$ . Razdelimo ploščo na dva enaka dela dolžin  $n$  in mejno daljico pobarvajmo rdeče. Če nobena domina ne seka rdeče potem je število tlakovanj enako  $f_{n+1}^2$ , če pa jo ena domina seka jo mora sekati še ena, torej nam ostaneta dva dela plošče dolžine  $n - 1$ , ki pa ju lahko tlakujemo na  $f_n^2$  načinov.