

Spernerjeva lema in Brouwerjev izrek o negibni točki

Aleksandra Franc

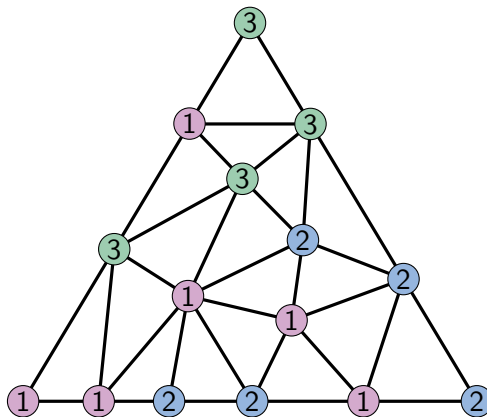
Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani

24. januar 2026

Outline

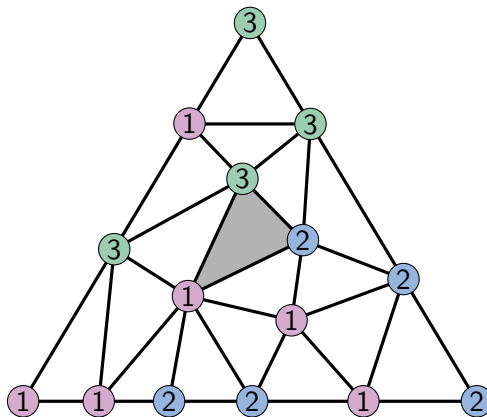
- 1 Uvod
- 2 Spernerjeva lema
- 3 Brouwerjev izrek o negibni točki
- 4 Zaključek

Uvod - Spernerjeva lema



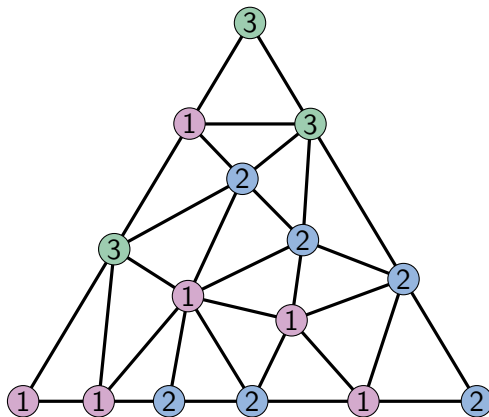
V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja liho mnogo trobarvnih trikotnikov.

Uvod - Spernerjeva lema



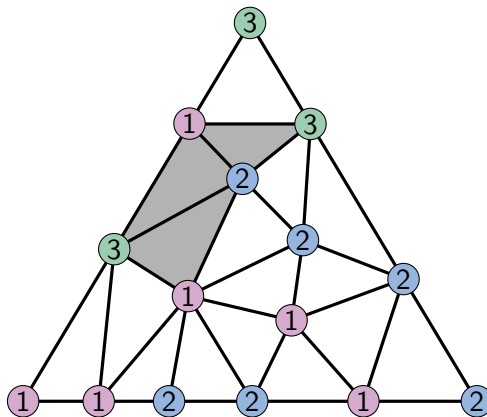
V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja liho mnogo trobarvnih trikotnikov.

Uvod - Spernerjeva lema



V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja liho mnogo trobarvnih trikotnikov.

Uvod - Spernerjeva lema



V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja liho mnogo trobarvnih trikotnikov.

Uvod - Spernerjeva lema za daljice



Na vsaki pravilno pobarvani daljici obstaja liho mnogo daljic z krajišči različnih barv.

Uvod - Spernerjeva lema za daljice



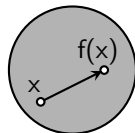
Na vsaki pravilno pobarvani daljici obstaja liho mnogo daljic z krajišči različnih barv.

Dokaz: Domača naloga :)

Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki

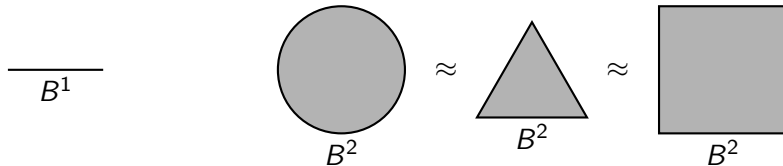
Definicija

Točka $x \in X$ je *negibna točka* preslikave $f: X \rightarrow X$, če je $f(x) = x$.

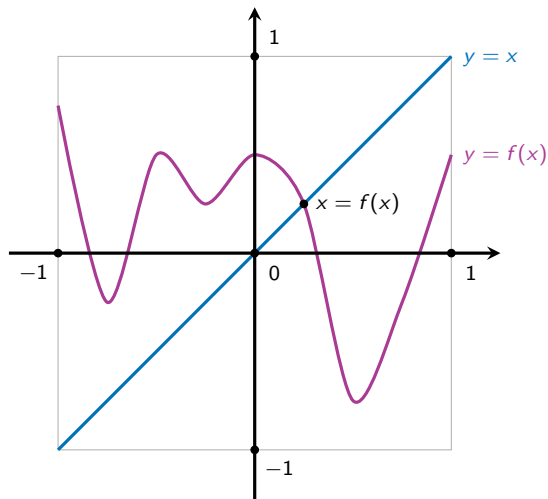


Izrek (Brouwer, 1912)

Vsaka zvezna preslikava $f: B^n \rightarrow B^n$ ima negibno točko.

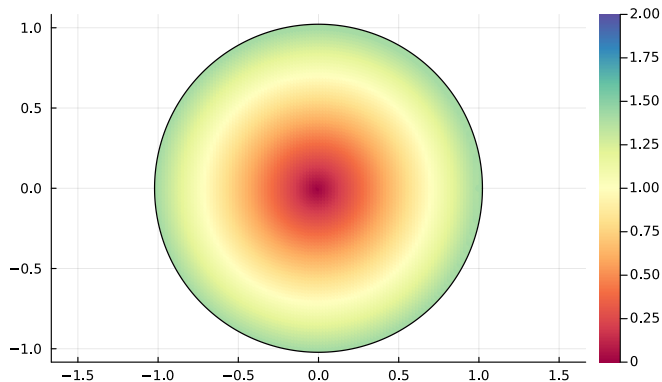


Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki (primer $n = 1$)



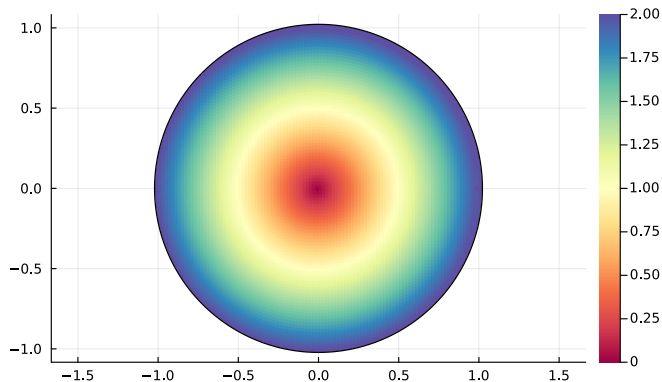
Preslikava $f: B^1 \rightarrow B^1$ ima negibno točko.

Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki (primer $n = 2$)



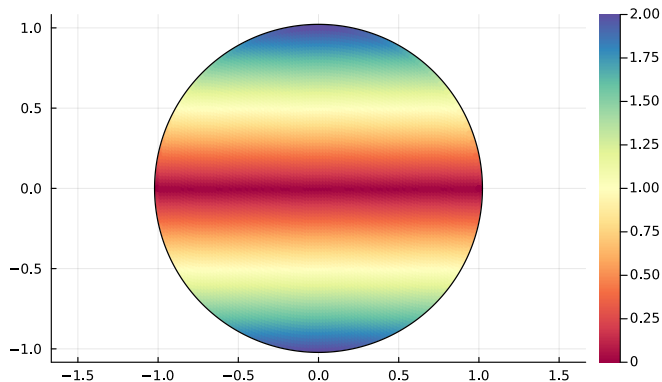
Prikaz $|f(x) - x|$ za rotacijo okrog $(0,0)$ za $\frac{\pi}{2}$.

Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki (primer $n = 2$)



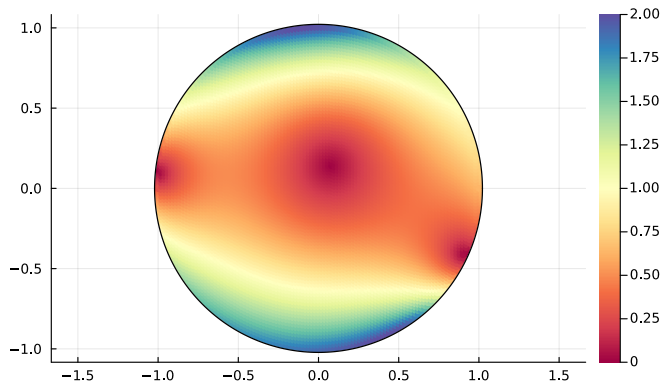
Prikaz $|f(x) - x|$ za zrcaljenje čez izhodišče.

Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki (primer $n = 2$)



Prikaz $|f(x) - x|$ za zrcaljenje čez x -os.

Uvod - Brouwerjev izrek o negibni točki (primer $n = 2$)



Prikaz $|f(x) - x|$ za funkcijo s tremi fiksnimi točkami.

Spernerjeva lema - Formulacija

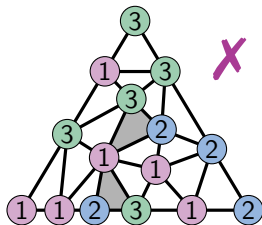
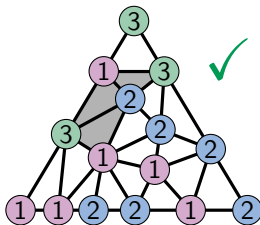
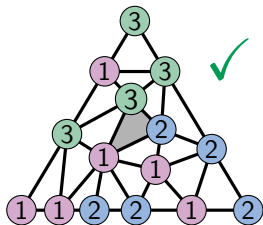
Izrek (Sperner, 1928)

V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja trobarvni trikotnik.

Barvanje triangulacije je **pravilno**, če:

- so oglišča velikega trikotnika različnih barv in
- je vsako oglišče na stranici velikega trikotnika enake barve kot eno od oglišč te stranice.

Oglišča v notranjosti velikega trikotnika lahko pobarvamo s poljubno barvo.



Spernerjeva lema - Dokaz

Dokazali bomo močnejšo trditev:

Izrek

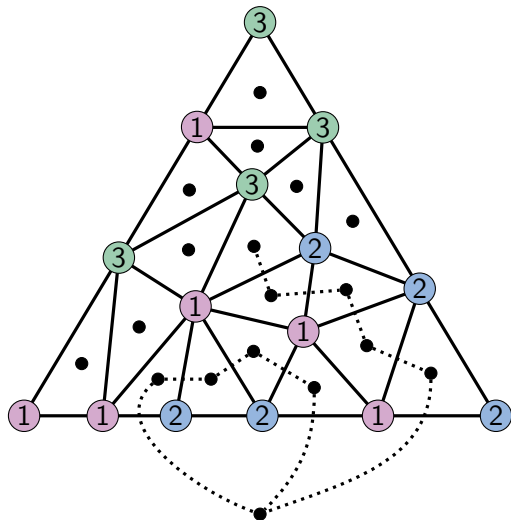
V vsaki pravilno pobarvani triangulaciji obstaja liho mnogo trobarvnih trikotnikov.

Za dano triangulacijo konstruiramo dualni graf:

- vozlišča grafa so središča trikotnikov triangulacije,
- dve vozlišči sta povezani, če se pripadajoča trikotnika stikata vzdolž ①②-daljice.

Poleg tega dodamo še eno vozlišče za zunanje območje in vse pripadajoče povezave.

Spernerjeva lema - Dokaz



Opazimo:

- Trobarvnim trikotnikom pripadajo vozlišča stopnje 1.
- Trikotnikom, ki ne vsebujejo oglišča barve ①, in trikotnikom, ki ne vsebujejo oglišča barve ②, pripadajo vozlišča stopnje 0.
- Trikotnikom, ki ne vsebujejo oglišča barve ③, vsebujejo pa oglišča barve ① in barve ②, pripadajo vozlišča stopnje 2.
- Število ①②-daljic na robu velikega trikotnika določa stopnjo vozlišča, ki pripada zunanjemu območju. Torej je zunanje vozlišče lihe stopnje.

Spernerjeva lema - Dokaz

Izrek (Lema o rokovanju)

Vsota stopenj vozlišč grafa je enaka dvakratniku števila povezav:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Posledica

Vozlišč lihe stopnje je sodo mnogo.

V našem dualnem grafu so vozlišča lihe stopnje

- zunanje vozlišče in
- vozlišča, ki pripadajo trobarvnim trikotnikom.

Trobarvnih trikotnikov je torej liho mnogo.



Brouwerjev izrek o negibni točki - Formulacija

Izrek (Brouwer, $n = 2$)

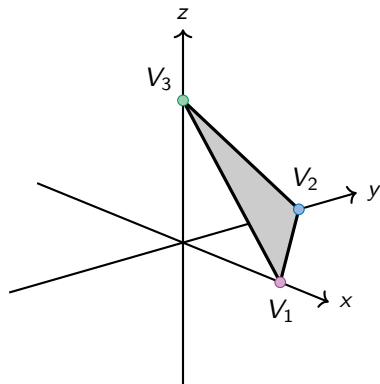
Vsaka zvezna preslikava $f: B^2 \rightarrow B^2$ ima negibno točko.

Disk $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ je homeomorfen trikotniku Δ . Zato bomo dokazali:

Izrek

Vsaka zvezna preslikava $f: \Delta \rightarrow \Delta$ ima negibno točko.

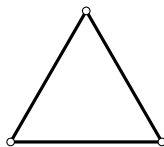
Brouwerjev izrek o negibni točki - Dokaz



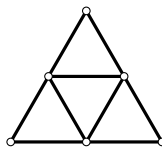
$$\textcircled{1} V_1(1, 0, 0) \quad \textcircled{2} V_2(0, 1, 0) \quad \textcircled{3} V_3(0, 0, 1)$$

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$$

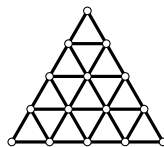
Poiščemo triangulacije $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), pri katerih konvergirajo premeri trikotnikov δ_n proti 0. Primer:



$$\delta_1 = \sqrt{2}$$



$$\delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} = 0$$

Brouwerjev izrek o negibni točki - Dokaz

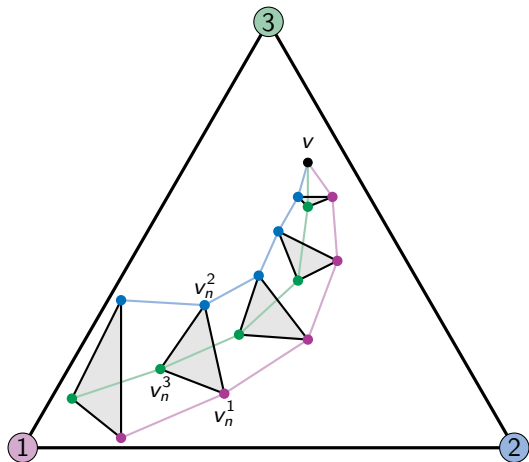
Oglišča v triangulaciji $\mathcal{T}_n$ pobarvamo s pomočjo preslikave $f: \Delta \rightarrow \Delta$:

- Za $v \in \Delta$ s koordinatami $v = (x, y, z)$ velja $x + y + z = 1$.
- Za $f(v) \in \Delta$ s koordinatami $f(v) = (x', y', z')$ velja $x' + y' + z' = 1$.
- Torej za $f(v) - v = (x' - x, y' - y, z' - z)$ velja

$$(x' - x) + (y' - y) + (z' - z) = 0.$$

- Če so $(x' - x)$, $(y' - y)$ in $(z' - z)$ vsi enaki 0, potem je v fiksna točka preslikave f .
- Sicer pa naj bo $i \in \{1, 2, 3\}$ indeks najmanjše negativne koordinate $f(v) - v$.
- Pobarvamo v z barvo $i \in \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}\}$.
- To barvanje zadošča pogojem Spernerjeve leme.

Brouwerjev izrek o negibni točki - Dokaz



- V vsaki triangulaciji $\mathcal{T}_n$ izberemo po en trobarvni trikotnik. Označimo oglišča z

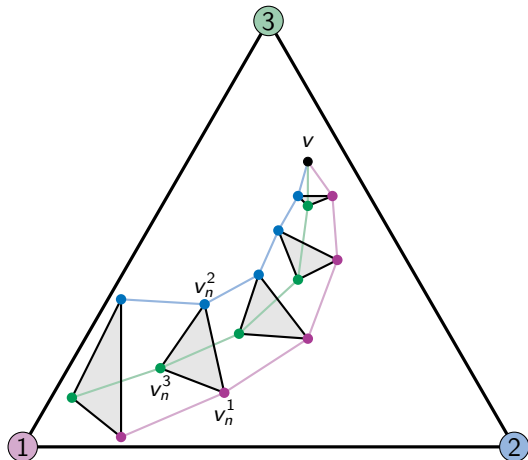
$$\textcircled{1} v_n^1, \quad \textcircled{2} v_n^2 \quad \text{in} \quad \textcircled{3} v_n^3.$$

- Dobimo tri neskončna zaporedja oglišč:

$$\{v_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \{v_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{in} \quad \{v_n^3\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

- Ker je trikotnik kompakten, ima vsako od teh treh zaporedij konvergentno podzaporedje, tj. za neko podmnožico triangulacij $\mathcal{T}_n$ bodo zgornja zaporedja konvergirala k točkam $v^1, v^2, v^3 \in \Delta$.
- Ker $\delta_n \rightarrow 0$, je $v^1 = v^2 = v^3 = v$.

Brouwerjev izrek o negibni točki - Dokaz



- Kam se v preslika s preslikavo f ?
- Naj bo $v = (x, y, z)$, $f(v) = (x', y', z')$.
- Ker so oglišča v_n^1 barve ①, ima

$$f(v_n^1) - v_n^1$$

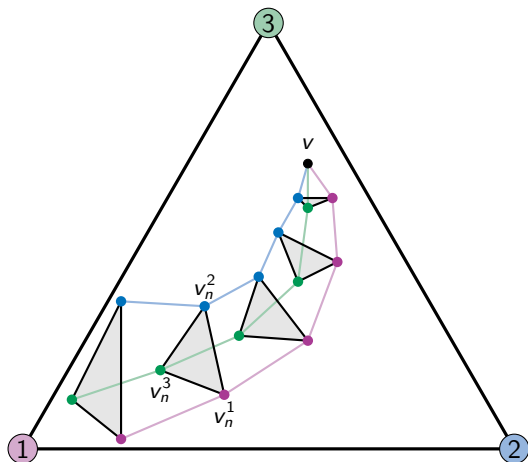
negativno prvo koordinato za vse n .

- Ker je

$$f(v) - v = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(v_n^1) - v_n^1),$$

torej velja, da je $x' - x \leq 0$.

Brouwerjev izrek o negibni točki - Dokaz



- Analogen argument pokaže, da je $y' - y \leq 0$ in $z' - z \leq 0$.
- Iz pogoja

$$(x' - x) + (y' - y) + (z' - z) = 0$$

sledi, da je $x' - x = 0$, $y' - y = 0$ in $z' - z = 0$.

- Ker je $x = x'$, $y = y'$ in $z = z'$, je

$$f(v) = v$$

in je v fiksna točka preslikave f .



Uporaba Browerjevega izreka



- Zvezna preslikava $f: B^3 \rightarrow B^3$ ima fiksno točko. Ne glede na to, kako močno premešamo skodelico kave, bo po mešanju vedno obstajala točka, ki bo na istem mestu kot pred mešanjem.

Ilustracije: irasutoya.com

- Turist se z zemljevidom Ljubljane sprehaja po Ljubljani. Ko mu zemljevid pade na tla, obstaja lokacija na zemljevidu, ki pristane natančno na lokaciji, ki jo predstavlja.



Literatura

- M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2018): 203–205.
- L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen 71 (1912): 97–115.
- E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6 (1928) 265–272.



Hvala za pozornost.

Vprašanja?