

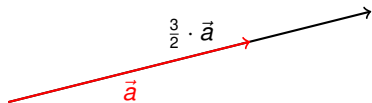
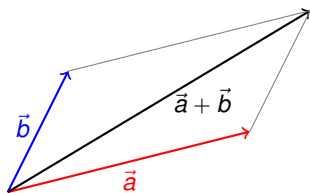
Grafi komutativnosti matrik

Damjana Kokol Bukovšek



20. september 2025

Vektorji v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$

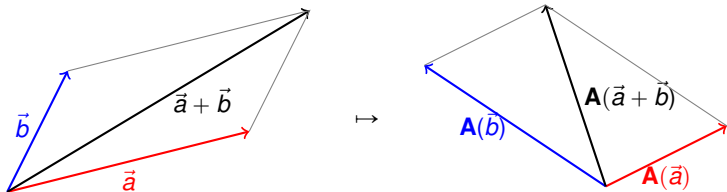


$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad (-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Linearne preslikave v $\mathbb{R}^2$

Preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je **aditivna**, če velja



$$\mathbf{A}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{A}(\vec{a}) + \mathbf{A}(\vec{b}).$$

Preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je **homogena**, če velja



$$\mathbf{A}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \mathbf{A}(\vec{a}).$$

Linearne preslikave

Preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **aditivna**, če velja

$$\mathbf{A}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{A}\vec{b}.$$

Preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **homogena**, če velja

$$\mathbf{A}(\alpha\vec{a}) = \alpha\mathbf{A}\vec{a}.$$

Preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **linearna**, če je aditivna in homogena.

Za vsako linearno preslikavo $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ velja $\mathbf{A}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Linearne preslikave v $\mathbb{R}^2$

Primeri linearnih preslikav $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

- pravokotna projekcija na premico (skozi izhodišče),
- poševna projekcija na premico (skozi izhodišče),
- zrcaljenje čez premico (skozi izhodišče),
- razteg v smeri vektorja,
- rotacija okrog izhodišča,
- strig,
- kombinacije zgornjih.

Translacija v smeri vektorja ni linearna preslikava.

Linearne preslikave v $\mathbb{R}^3$

Primeri linearnih preslikav $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- projekcija na premico,
- projekcija na ravnino,
- zrcaljenje čez premico,
- zrcaljenje čez ravnino,
- razteg v smeri vektorja,
- rotacija okrog premice,
- strig,
- kombinacije zgornjih.

Linearne preslikave v $\mathbb{R}^2$

Vsaka linearna preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je oblike

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{bmatrix}.$$

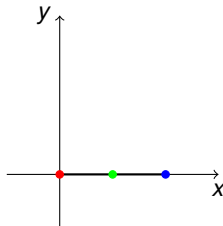
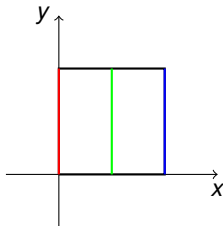
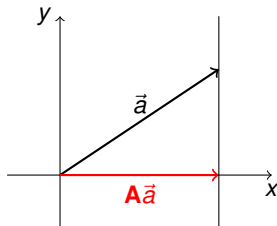
Linearna preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je natanko določena s števili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Linearni preslikavi $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ priredimo matriko $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Primer: pravokotna projekcija na os x

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

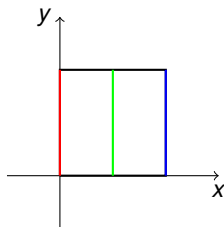
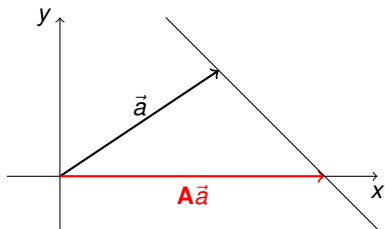
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



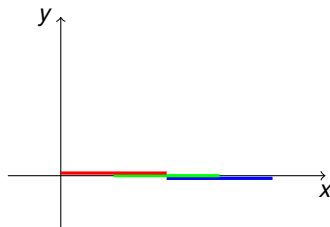
Primer: poševna projekcija na os x

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



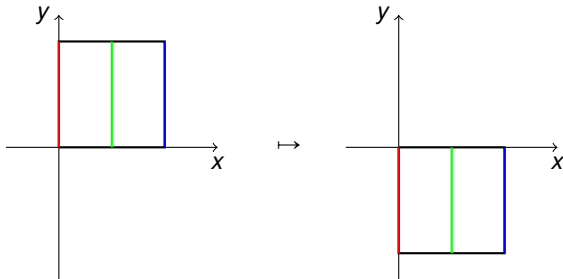
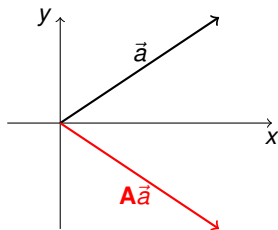
$\mapsto$



Primer: zrcaljenje čez os x

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

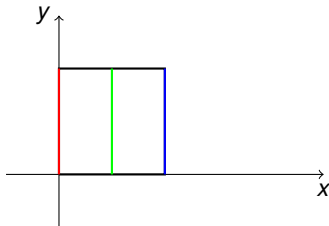
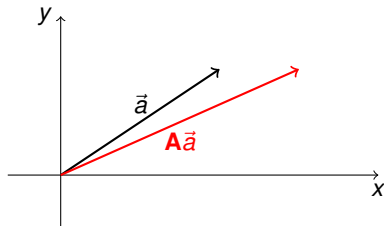
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$



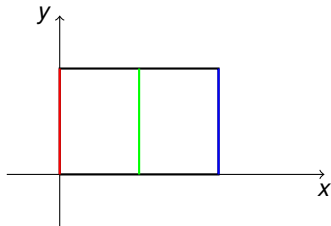
Primer: razteg v smeri osi x za faktor $\frac{3}{2}$

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



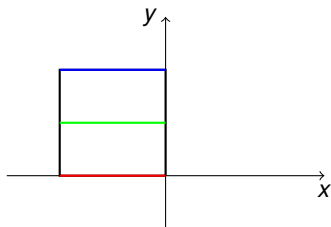
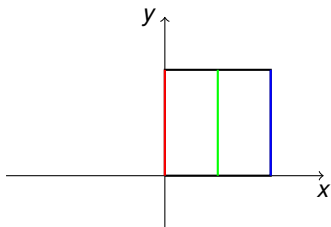
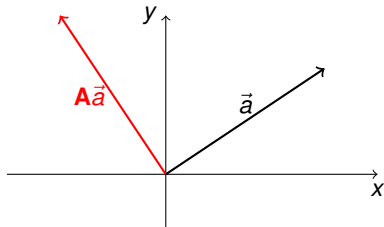
$\mapsto$



Primer: rotacija za kot $\frac{\pi}{2}$

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

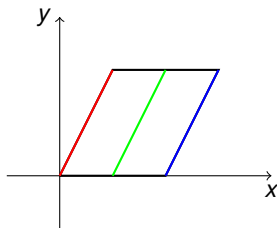
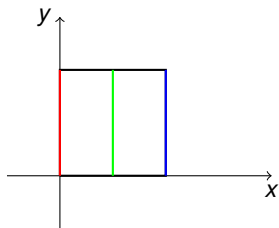
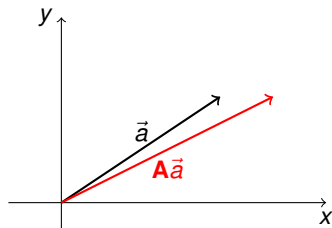
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$



Primer: strig

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

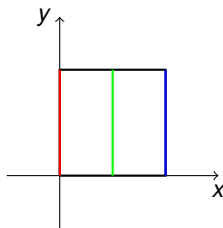
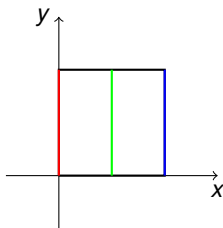
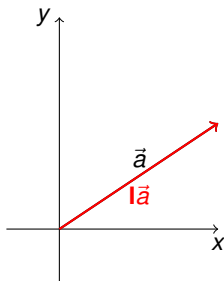
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



Primer: identiteta

$$I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2:$$

$$I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



Linearne preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Vsaka linearna preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je oblike

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je natanko določena s števili α_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Linearni preslikavi $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ priredimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrike

Matrika velikosti $m \times n$ je tabela mn števil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sestavljena je iz m vrstic in n stolpcev, posamezna števila se imenujejo **elementi**.

Krajše zapišemo

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Z matrikami lahko računamo.

Vsota matrik

Matriki iste velikosti lahko **seštejemo**. **Vsoto** dobimo tako, da seštejemo istoležne elemente.

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vsoti matrik ustreza vsota linearnih preslikav.

Produkt s sklarjem

Matriko lahko pomnožimo s skalarjem (številom). **Produkt s skalarjem** dobimo tako, da s skalarjem pomnožimo vse elemente matrike.

$$\alpha[\mathbf{a}_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \mathbf{a}_{ij}]_{m \times n}.$$

Primer:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Produktu matrike s sklarjem ustreza produktu linearne preslikave s skalarjem.

Lastnosti seštevanja in produkta s skalarjem

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$
- $0 \cdot A = 0$
- $A + (-A) = 0$
- $(-1) \cdot A = -A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Produkt matrik

Matriki

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times p}$$

lahko zmnožimo. Njun **produkt** je matrika

$$C = [c_{ij}]_{m \times p},$$

kjer je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

- Da lahko zmnožimo dve matriki, mora imeti prvi faktor toliko stolpcev, kot ima drugi vrstic.
- Elementi produkta so **skalarni produkti** vrstic prvega faktorja in stolpcev drugega faktorja.
- Produkt ima toliko vrstic, kot ima prvi faktor vrstic, in toliko stolpcev, kot ima drugi faktor stolpcev.
- Produktu matrik ustreza komponiranje linearnih preslikav.

Primer

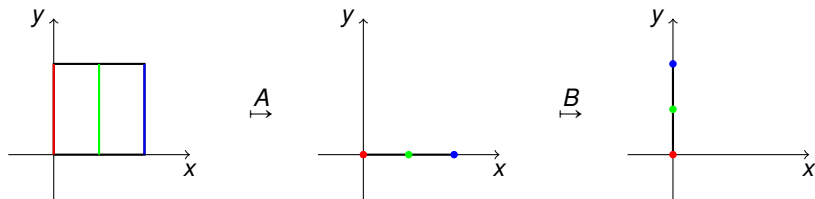
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 10 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Primer: komponiranje linearnih preslikav

A : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projekcija na os x

B : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotacija za kot $\frac{\pi}{2}$



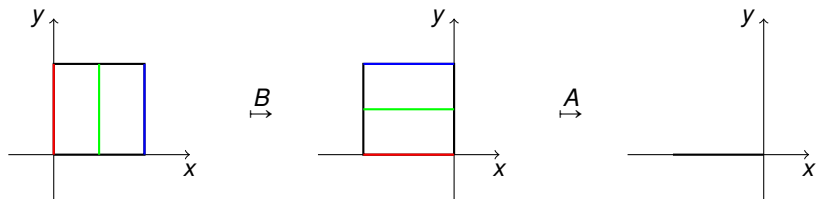
BA : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer: komponiranje linearnih preslikav

A : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projekcija na os x

B : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotacija za kot $\frac{\pi}{2}$



AB : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Identična matrika

Identična matrika je kvadratna matrika, ki ima po diagonali enke, drugod pa ničle.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Identična matrika ustreza identiteti kot linearni preslikavi.

Skalarna matrika je kvadratna matrika, ki ima po diagonali vse vrednosti enake, drugod pa ničle:

$$A = \alpha I.$$

Lastnosti množenja matrik

Množenje matrik **ni komutativno**, v splošnem je

$$AB \neq BA.$$

Veljajo lastnosti:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AI = IA = A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Množica vseh kvadratnih matrik

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n}; a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

je **algebra**.

Centralizator

Če za kvadratni matriki $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ velja $AB = BA$, rečemo, da matriki **komutirata**.

Množica vseh matrik, ki komutirajo z matriko $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AB = BA\}$$

se imenuje **centralizator** matrike A .

Primeri:

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}; a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}; a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Velja

$$\mathcal{C}(I) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Množica vseh matrik, ki komutirajo z vsemi matrikami $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathcal{C}(B) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

se imenuje **center** algebre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Velja

$$Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{B = \alpha I; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Graf komutativnosti matrik

Graf komutativnosti algebre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ je graf $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, katerega vozlišča so vse necentralne matrike v $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$V(\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})),$$

dve matriki $A, B \in V(\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$ pa sta povezani, če $A \neq B$ in komutirata, $AB = BA$.

Vsaka neskalarna matrika je v $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ povezana z vsemi matrikami iz $\mathcal{C}(A)$, razen s skalarnimi matrikami in sama s sabo.

Algebra, generirana z matriko

Če je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrika in p polinom

$$p(x) = a_m x^m + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

lahko izračunamo

$$p(A) = a_m A^m + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I.$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad p(x) = 3x^2 - 7x + 4, \quad p(A) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

Množico

$$\mathbb{R}[A] = \{p(A); p \text{ polinom}\}$$

imenujemo **algebra, generirana z matriko** A .

Algebra, generirana z matriko

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}[A] = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}; a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Za vsako matriko $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ velja $\mathbb{R}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}[A] = \mathcal{C}(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}[A] = \mathcal{C}(A)$$

Algebra, generirana z matriko

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}[A] = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix} ; a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

Za vsako matriko A je algebra $\mathbb{R}[A]$ komutativna, množica $\mathcal{C}(A)$ pa ne nujno.

Izrek Cayley-Hamilton

Izrek (Cayley-Hamilton)

Za vsako matriko $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ velja

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I.$$

Posledica

Za vsako neskalarno matriko $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ velja

$$\mathbb{R}[A] = \{\alpha A + \beta I; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

Trditev

Za vsako neskalarno matriko $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ velja

$$\mathcal{C}(A) = \{\alpha A + \beta I; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Če sta $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ neskalarni matriki in velja $AB = BA$, potem je $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.

Trditev

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ je nepovezan. Vsaka njegova komponenta je klika, katere vozlišča so matrike iz množice $\mathcal{C}(A) \setminus Z(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ za neko neskalarno matriko A .

Razdalja v grafu in premer grafa

Naj bosta A, B dve vozlišči v grafu Γ . Razdalja med A in B je dolžina najkrajše poti med njima. Če je

$$A = X_0 \sim X_1 \sim \dots \sim X_k = B$$

najkrajša pot med A in B , je $d(A, B) = k$. Če pot med A in B ne obstaja, je $d(A, B) = \infty$.

Če je v grafu komutatovnosti $AB = BA$, je $d(A, B) = 1$.

Premer grafa Γ je največja razdalja $d(A, B)$, ki je dosežena v med dvema vozliščema v $V(\Gamma)$. Če graf Γ ni povezan, je njegov premer neskončen.

Razdalja v $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ in $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$

Če sta $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ neskalarni matriki, velja

- če je $AB = BA$, je $d(A, B) = 1$,
- če je $AB \neq BA$, je $d(A, B) = \infty$.

Če je $n = 3$, to ne velja več:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

ampak

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

Zato je $d(A, B) = 2$.

Premier grafa $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

Velja $d(A, C) = 4$.

Izrek (Miguel, 2013)

Če je $n \geq 3$, potem je graf $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ povezan in njegov premier je enak 4.

Drugi obsegi

Namesto realnih števil so lahko elementi matrik tudi kaj drugega, na primer racionalna števila $\mathbb{Q}$, kompleksna števila $\mathbb{C}$, ...

Množico, v kateri lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, ter veljajo enake lastnosti kot pri realnih števili, imenujemo **obseg**.

Izrek (Akbari, Mohammadian, Radjavi, Raja, 2006)

Naj bo $\mathbb{F}$ poljuben obseg. Če je graf $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{F}))$ povezan, je njegov premer največ 6.

Trditev (Dolžan, KB, Kuzma, Oblak, 2016)

Naj bo $\mathbb{F}$ poljuben obseg. Če je graf $\Gamma(\mathcal{M}_4(\mathbb{F}))$ povezan, je njegov premer enak 4.

Obseg $\mathbb{Z}_2$

Naj bo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ množica ostankov pri deljenju z 2.

V $\mathbb{Z}_2$ lahko seštevamo

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

odštevamo

$$-0 = 0, \quad -1 = 1,$$

in množimo

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Množica $\mathbb{Z}_2$ je obseg.

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$

Trditev

Za vsako neskalarno matriko $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ velja

$$\mathcal{C}(A) = \{\alpha A + \beta I; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Če sta $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ neskalarni matriki in velja $AB = BA$, potem je $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.

Trditev

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ je nepovezan. Vsaka njegova komponenta je klika, katere vozlišča so matrike iz množice $\mathcal{C}(A) \setminus Z(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ za neko neskalarno matriko A .

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$

Algebra $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ ima 16 elementov, njen center $Z(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ pa dva elementa, 0 in I . Zato ima graf $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ 14 vozlišč.

Če je $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ neskalarmna matrika, je

$$\mathcal{C}(A) = \{A, A + I, 0, I\}.$$

V grafu $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ ima vsaka matrika A samo enega soseda, $A + I$. Graf $\Gamma(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2))$ ima 7 komponent.

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Graf komutativnosti $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2))$

Trditev

Graf $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2))$ je povezan natanko takrat, ko n ni praštevilo.

Izrek (Dolžan, KB, Kuzma, Oblak, 2016)

Če n ni niti praštevilo niti kvadrat praštevila, potem je premer grafa $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2))$ največ 5.

Če je n sodo število, potem je premer grafa $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2))$ enak 4.

Trditev (Dolžan, KB, Kuzma, 2016)

Premier grafa $\Gamma(\mathcal{M}_{15}(\mathbb{Z}_2))$ je 5.

Premier grafa $\Gamma(\mathcal{M}_{p^2}(\mathbb{Z}_2))$ ostaja odprto vprašanje.

Trditev

Graf $\Gamma(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}))$ je nepovezan za vsak n .

Izrek (Dolžan, KB, Kuzma, 2017)

Za vsako praštevilo $p \geq 7$ praštevilo obstajata matriki $A, B \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{Q})$, za kateri je $d(A, B) = 6$.

Primer: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Velja

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{F} \right\}.$$

Če je $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ neskalarna matrika in $AB = BA$, je $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A)$, zato je $\mathcal{C}(A) \setminus Z(\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}))$ komponenta v $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}))$ in graf $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}))$ je nepovezan.

Če je $B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[3]{2} & 1 \\ 2 & 0 & \sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2} & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(A)$, je

$\mathcal{C}(A) \subsetneq \mathcal{C}(B)$, zato $\mathcal{C}(A) \setminus Z(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ ni komponenta v $\Gamma(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.

Hvala!