

Opazka o permutacijah brez fiksnih točk

Oliver Dragičević

September 1999 (z dodatkom iz septembra 2022)

Povzetek

Poiščemo število elementov v simetrični grupi S_n brez negibnih točk in izpeljemo sklep o asimptotičnem obnašanju. Temu sledi izračun matematičnega upanja števila negibnih točk dane permutacije.

Notacija Naj bo n pozitivno celo število. Z b_n označimo število permutacij v S_n brez negibnih točk. Omenimo, da se v angleščini takšne permutacije imenujejo “derangements”, včasih “dearrangements”.

Naj bo tudi $s_n = |S_n| = n!$ in $z_n = s_n - b_n$ število permutacij z vsaj eno negibno točko.

Izrek 1. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja*

$$b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Dokaz Opazimo, da je $\binom{n}{k} b_{n-k}$ število permutacij n elementov z natanko k negibnimi točkami. Res, k elementov izmed n lahko izberemo na natanko $\binom{n}{k}$ načinov; za izbrano k -terico na preostalih mestih ne smemo imeti nobene negibne točke, zato dobimo faktor b_{n-k} . Prav tako ne obstaja permutacija z natanko $n - 1$ negibnimi točkami. To nam da prvo rekurzijsko zvezo

$$z_n = \binom{n}{1} b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} b_2 + 1. \quad (1)$$

Z uporabo (1) lahko zdaj izračunamo prvih nekaj b_n .

Slika 1:

n	z_n	b_n	s_n
1	1	0	1
2	1	1	2
3	4	2	6
4	15	9	24
5	76	44	120
6	455	265	720

Na podlagi [Slike 1](#) sklepamo še na drugo rekurzijsko zvezo, ki jo bomo dokazali kasneje:

$$z_{n+1} = (n+1)z_n + (-1)^n. \quad (2)$$

Definirajmo $a_n = z_n/s_n$. Tedaj iz (2) sledi

$$a_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{(n+1)z_n}{s_{n+1}} + \frac{(-1)^n}{s_{n+1}} = a_n + \frac{(-1)^n}{s_{n+1}}.$$

Označimo $\frac{(-1)^n}{s_{n+1}}$ s c_{n+1} . Tedaj velja

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + c_2, \\ a_3 &= a_2 + c_3 = a_1 + c_2 + c_3 \\ a_4 &= a_3 + c_4 = a_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ &\dots \\ a_n &= a_1 + \sum_{j=2}^n c_j. \end{aligned}$$

Ker je $c_0 + c_1 = 0$ in $a_1 = z_1/s_1 = 1$, dobimo

$$a_n = 1 + \sum_{j=0}^n c_j.$$

Zato velja

$$z_n = s_n + s_n \sum_{j=0}^n c_j,$$

od koder sledi iskana zveza

$$b_n = s_n - z_n = -s_n \sum_{j=0}^n c_j = -n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Ostane nam še dokaz (2). V ta namen uporabimo indukcijo po n .

- Veljavnost formule za $n = 1, 2, 3, 4$ lahko enostavno preverimo s pomočjo Slike 1.
- Sedaj predpostavimo, da za $k = 2, \dots, n$ velja

$$z_k = k z_{k-1} + (-1)^{k-1}.$$

Radi bi dobili $z_{n+1} = (n+1)z_n + (-1)^n$.

Iz predpostavke sledi

$$b_k = s_k - z_k = k s_{k-1} - k z_{k-1} - (-1)^{k-1} = k b_{k-1} - (-1)^{k-1},$$

torej

$$b_k = k b_{k-1} + (-1)^k \quad (3)$$

za $k = 2, \dots, n$. Enakost (1) da

$$z_{n+1} = \binom{n+1}{1} b_n + \binom{n+1}{2} b_{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n-1} b_2 + 1.$$

Nadalje iz (3) dobimo

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \binom{n+1}{1} (n b_{n-1} + (-1)^n) + \binom{n+1}{2} ((n-1) b_{n-2} + (-1)^{n-1}) + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n+1}{n-2} (3 b_2 + (-1)^3) + \binom{n+1}{n-1} b_2 + 1. \end{aligned}$$

Z uporabo zveze $\binom{n+1}{k} (n+1-k) = (n+1) \binom{n}{k}$ sledi

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (n+1) \binom{n}{1} b_{n-1} + \binom{n+1}{1} (-1)^n \\ &\quad + (n+1) \binom{n}{2} b_{n-2} + \binom{n+1}{2} (-1)^{n-1} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (n+1) \binom{n}{n-2} b_2 + \binom{n+1}{n-2} (-1)^3 + \binom{n+1}{n-1} b_2 + 1. \end{aligned}$$

Če združimo vse člene, ki vsebujejo faktor $(n+1)$, nato ponovno uporabimo (1) in na koncu še upoštevamo, da je $b_2 = 1 = (-1)^2$, dobimo

$$z_{n+1} = (n+1)(z_n - 1) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} + 1.$$

Binomska formula da

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j = (1-1)^m = 0, \quad (4)$$

zato

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (n+1)(z_n - 1) + \left[0 - \binom{n+1}{0} (-1)^{n+1} - \binom{n+1}{n} (-1)^1 \right] \\ &= (n+1)z_n - n - 1 + (-1)^n + (n+1), \end{aligned}$$

od koder sledi (2), kot smo želeli dokazati. $\square$

Posledica 1. *Ob zgornjih oznakah velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

To pomeni, da če se nam raztrese bombonjera s tisoč bomboni, ki jih nato naključno zložimo nazaj, je verjetnost, da niti eden ne bo sédel na svoje prvotno mesto, enaka približno 37%.

Opazimo tudi, da se za $n = 6$ delež permutacij brez fiksnih točk, ki je glede na zadnjo vrstico [Slike 1](#) enak $265/720$ oz. $53/144$, od limitne vrednosti za $n \rightarrow \infty$ (torej $1/e$) razlikuje zelo malo, in sicer za približno 0,000176. To si lahko razložimo s tem, da so b_n/s_n delne vsote konvergentne alternirajoče vrste, in sicer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad (5)$$

katere členi izredno hitro konvergirajo proti nič. Namreč, po Leibnizovem kriteriju vemo, da lahko ostanek takšne vrste (to je, razliko od delne vsote do polne) ocenimo navzgor z absolutno vrednostjo prvega izpuščenega člena, torej za $c_k \searrow 0$ velja

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k c_k \right| \leq c_{n+1}.$$

Ker pa je v našem primeru $c_k = 1/k!$ in ker $k!$ zelo hitro narašča proti ∞ , sledi, da c_k zelo hitro pada proti 0, zato se že zgodnje delne vsote vrste (5), ki so enake b_n/s_n , zelo malo razlikujejo od polne vsote. Eksplicitno,

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{b_n}{s_n} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Dodatek: matematično upanje števila negibnih točk (dodano septembra 2022)

Naj $d_{n,k}$ označuje verjetnost, da ima dana permutacija v S_n natanko k negibnih točk. V prejšnjem razdelku smo opazili, da velja

$$d_{n,k} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} b_{n-k},$$

kar se po Izreku 1 poenostavi v

$$d_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \quad (6)$$

Naj bo D_n slučajna spremenljivka z vrednostmi na množici $\{0, 1, \dots, n\}$, za katero velja $P(D_n = k) = d_{n,k}$. Za $m \in \mathbb{N}$ njen m -ti moment definiramo kot matematično upanje slučajne spremenljivke D_n^m , torej

$$E(D_n^m) = \sum_{k=0}^n k^m d_{n,k}.$$

Za $m = 1$ je to torej (uteženo) povprečje števila negibnih točk med vsemi permutacijami iz S_n .

Analitično si lahko D_n predstavimo tako, da najprej interval $[0, 1]$ razdelimo na disjunktne podintervale $I_0, I_1, \dots, I_n$, pri čemer ima I_k dolžino $d_{n,k}$. Nato D_n definiramo kot funkcijo $[0, 1] \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, ki interval I_k celega slika v k . Teda je

$$E(D_n^m) = \int_{[0,1]} D_n^m(x) dx = \sum_{k=0}^n k^m d_{n,k}.$$

Naš cilj je izračunati števila $E(D_n^m)$. Proti koncu tega razdelka bomo videli, da sovpadajo s tako imenovanimi *Bellovimi števili*.

Za začetek obravnavajmo primera $m = 1, 2$.

Izrek 2. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja*

- $E(D_n) = 1$;
- $E(D_n^2) = 2$, če je $n \geq 2$.

Zato je varianca slučajne spremenljivke D_n enaka $E(D_n^2) - E(D_n)^2 = 1$ za $n \geq 2$.

Dokaz Velja

$$E(D_n) = \sum_{k=0}^n k d_{n,k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{n-1-l} \frac{(-1)^j}{j!}}_{=d_{n-1,l}} = 1,$$

preprosto zato, ker je vsota vseh verjetnosti diskretne slučajne spremenljivke enaka $E(1) = 1$.

Kar zadeva $E(D_n^2)$, dobimo

$$\begin{aligned} E(D_n^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 d_{n,k} \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] \cdot \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{n-2-l} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{n-1-l} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{l=0}^{n-2} d_{n-2,l} + \sum_{l=0}^{n-1} d_{n-1,l} \\ &= 2. \end{aligned} \quad \square$$

Stirlingova števila druge vrste

Dokaz Izreka 2 lahko razširimo tako, da izračunamo višje momente slučajne spremenljivke D_n . Analiza zgornjega dokaza v primeru D_n^2 nakazuje, da je ključno izraziti potence $k, k^2, k^3, \dots$ kot linearne kombinacije polinomov

$$\begin{aligned} &k \\ &k(k-1) \\ &k(k-1)(k-2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Na primer,

$$\begin{aligned} k^2 &= k(k-1) + k \\ k^3 &= k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k \\ &\dots \end{aligned}$$

To lahko storimo bolj sistematično, kar nas bo naposled pripeljalo do *Stirlingovih števil druge vrste*.

Najprej se moramo spomniti pojma *Pochhammerjevega simbola*. Za $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1).$$

Ti simboli so priročen zapis za zgornje polinome. Res,

$$\begin{aligned} (k)_1 &= k \\ (k)_2 &= k(k-1) \\ (k)_3 &= k(k-1)(k-2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Naj bodo $c_{n,k} \in \mathbb{R}$ koeficienti, določeni z zahtevo

$$x^n = \sum_{k=1}^n c_{n,k}(x)_k \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Utemeljimo obstoj takih koeficientov. Veljati mora $c_{n,n} = 1$, da se ujema koeficient (=1) pri potenci x^n . Nato izberemo $c_{n,n-1}$ tako, da se ujema koeficient (=0) pri x^{n-1} . Postopek nadaljujemo induktivno in na ta način vidimo, da obstaja natanko ena družina koeficientov $c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$, ki zadošča (7).

Naš naslednji cilj je izračunati $c_{n,k}$. Velja

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} c_{n+1,k}(x)_k. \quad (8)$$

Po drugi strani pa

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^n \cdot x \\
&= \sum_{k=1}^n c_{n,k} x(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^n c_{n,k} (x - k + k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^n c_{n,k} (x)_{k+1} + k \sum_{k=1}^n c_{n,k} (x)_k \\
&= \sum_{l=2}^{n+1} c_{n,l-1} (x)_l + k \sum_{k=1}^n c_{n,k} (x)_k \\
&= \sum_{k=2}^n (c_{n,k-1} + k c_{n,k}) (x)_k + c_{n,1} (x)_1 + c_{n,n} (x)_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ker so koeficienti v (8) enolično določeni, dobimo

$$\begin{aligned}
c_{n+1,1} &= c_{n,1} \\
c_{n+1,n+1} &= c_{n,n} \\
c_{n+1,k} &= c_{n,k-1} + k c_{n,k} \quad \text{za } k = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Ker je očitno $c_{1,1} = 1$, iz prvih dveh enačb sledi $c_{n,1} = c_{n,n} = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Tako pridemo do naslednjih rekurzijskih zvez, ki v celoti določajo koeficiente $c_{n,k}$:

$$\begin{aligned}
c_{n,1} &= c_{n,n} = 1 \\
c_{n+1,k} &= c_{n,k-1} + k c_{n,k} \quad \text{za } k = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{9}$$

V kombinatoriki je znano dejstvo (ki ga bomo kmalu dokazali), da so števila $c_{n,k}$ natančno *Stirlingova števila druge vrste*. Ta se običajno označujejo z zavitimi oklepaji in imajo naslednjo eksplisitno formulo:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Obratno lahko z neposrednim izračunom lahko preverimo, da zgornja formula zadošča rekurzijskim zvezam in začetnim pogojem iz (9). S tem dobimo identiteto $c_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Za dokaz najprej potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 1. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $m \in \{0, 1, \dots, k\}$. Tedaj velja

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^m = \begin{cases} -1 & ; \text{ če je } m = 0 \\ 0 & ; \text{ če je } 1 \leq m \leq k-1 \\ (-1)^k k! & ; \text{ če je } m = k \end{cases}$$

Dokaz. Uporabljali bomo naslednjo preprosto identiteto, veljavno za cela števila $b \leq a$:

$$b \binom{a+1}{b} = (a+1) \left[\binom{a+1}{b} - \binom{a}{b} \right]. \quad (10)$$

Za $m \leq k$ označimo

$$\gamma_{k,m} := \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^m.$$

Prva identiteta, $\gamma_{k,0} = -1$, je ravno (4). Prav tako neposredno preverimo, da je $\gamma_{1,1} = -1$.

Nadalje iz (10) dobimo

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1,m+1} &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} j^{m+1} \\ &= (k+1) \left[\sum_{j=1}^k (-1)^j \left[\binom{k+1}{j} - \binom{k}{j} \right] j^m + (-1)^{k+1} (k+1)^m \right] \\ &= (k+1) \left[\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} j^m - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^m \right]. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\gamma_{k+1,m+1} = (k+1)(\gamma_{k+1,m} - \gamma_{k,m}).$$

Skupaj z začetnima pogojema $\gamma_{k,0} = \gamma_{1,1} = -1$ to z indukcijo dokaže lemo. $\square$

Izrek 3. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $k \in \{1, \dots, n\}$ velja

$$c_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Dokaz. Kot je bilo napovedano, pokažemo, da Stirlingova števila druge vrste zadoščajo rekurijskim zvezam (9).

Očitno je $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$. Poseben primer $m = k$ Leme 1 pomeni ravno $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$. Nazadnje dobimo

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} j^n + k \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} j^n \underbrace{\left[\binom{k}{j} - \binom{k-1}{j} \right]}_{= \frac{j}{k} \binom{k}{j}, \text{ po (10)}} + \frac{k^n}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} j^{n+1} \binom{k}{j} \\
&= \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Bellova števila in višji momenti D_n

Identiteto/definicijo (7) ter Izrek 3 povzamemo v

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} (x)_k \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

To uporabimo za izračun momentov $E(D_n^m)$ za $m \in \{1, \dots, n\}$. V ta namen združimo (6) in (11), kot sledi:

$$\begin{aligned}
E(D_n^m) &= \sum_{k=0}^n k^m d_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\} (k)_l \cdot \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\
&= \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\} \sum_{k=l}^n \frac{1}{(k-l)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\
&= \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\} \sum_{p=0}^{n-l} \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^{n-l-p} \frac{(-1)^j}{j!} \\
&= \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\} \sum_{p=0}^{n-l} d_{n-l,p} \\
&= \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Ta števila so znana kot *Bellova števila* in jih označujemo z B_m . Tako dobimo

$$B_m = \sum_{l=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right\} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{l!} \sum_{j=1}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} j^m = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{l-j} j^m}{j!(l-j)!}.$$

Izraz lahko še drugače zapišemo kot

$$B_m = \sum_{j=1}^m \frac{j^m}{j!} \sum_{l=j}^m \frac{(-1)^{l-j}}{(l-j)!} = \sum_{j=1}^m \frac{j^m}{j!} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{(-1)^k}{k!},$$

oziroma

$$B_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^{m-k} \frac{j^m}{j!}.$$

Zanimivo je omeniti, da obstaja še en način predstavitve B_m , ki je zelo podoben zgornjemu. Znan je kot *formula Dobiňskega* in se glasi

$$B_m = \sum_{k=0}^{\infty-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty-k} \frac{j^m}{j!}, \quad (12)$$

kar se seveda poenostavi v

$$B_m = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^m}{j!}. \quad (13)$$

Zanimivo bi bilo izpeljati (13) iz (12). Potrebno je pokazati, da je vsota po komplementu enaka nič.

Za ponazoritev hitrosti rasti B_m naštejmo prvih nekaj vrednosti:

m	B_m
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4140

Prišli smo do naslednjega rezultata.

Izrek 4. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $m \leq n$ velja*

$$E(D_n^m) = B_m.$$

V posebnem je $E(D_n^m)$ naravno število, neodvisno od n .